CAPITOLUL 9

SOLICITĂRI COMPUSE

9.1. Generalităţi

După cum se ştie în orice secţiune a unui element de rezistenţă solicitat torsorul forţelor interioare se descompune în şase componente numite eforturi. Dacă în secţiune acţionează un singur efort, celelalte fiind nule, elementul de rezistenţă este supus unei solicitări simple. Astfel, dacă în secţiune apare doar forţa axială N, corpul este solicitat la tracţiune sau compresiune; dacă apare doar una dintre forţele tăietoare T_y sau T_z solicitarea se numeşte forfecare; dacă singurul efort este un moment încovoietor M_y sau M_z elementul este supus la încovoiere pură, iar dacă în secţiune acţionează doar momentul de torsiune M_t solicitarea se numeşte torsiune.

În majoritatea problemelor practice se întâlneşte prezenţa simultană într-o secţiune a două sau mai multe eforturi, ceea ce conduce la ***solicitări compuse***. Pentru a studia solicitările compuse trebuie determinate tensiunile produse de aceste eforturi, felul în care se compun aceste tensiuni şi efectul lor maxim.

După felul în care se pot combina eforturile, solicitările compuse se împart în două categorii:

a) Solicitări compuse care produc tensiuni de aceeaşi natură, fie doar tensiuni normale σ, fie doar tensiuni tangenţiale τ. În această grupă intră următoarele solicitări:

- *încovoierea oblică* - pe secţiune apar eforturile moment încovoietor M_y şi M_z, ambele generând tensiuni normale.
- *încovoierea cu forţă axială* - pe secţiune apar forţa axială N şi momentele încovoietoare M_y şi M_z, toate aceste eforturi dând naştere la tensiuni normale.
- *întinderea sau compresiunea excentrică* - este un caz particular de încovoiere cu forţă axială.
- *solicitarea de forfecare cu torsiune* - produsă de prezenţa simultană pe secţiune a unei forţe tăietoare T_y sau T_z şi a unui moment de torsiune M_t, ambele eforturi producând tensiuni tangenţiale. Această solicitare compusă apare în cazul arcurilor elicoidale.

b) Solicitări compuse care produc tensiuni de natură diferită, atât tensiuni normale σ , cât şi tensiuni tangenţiale τ . În studiul acestor solicitări este necesară utilizarea unei teorii de rezistenţă. Exemplul cel mai des întâlnit în practică este calculul arborilor solicitaţi la *încovoiere cu torsiune*, tratat în paragraful 8.5.

9.2. Încovoierea oblică

Dacă forţele aplicate unei grinzi nu se află toate într-un plan principal de inerţie, vectorul moment încovoietor, perpendicular pe planul forţelor, nu va avea ca suport o axă principală de inerţie a secţiunii transversale a grinzii.

O astfel de solicitare, la care momentul încovoietor rezultant are o înclinaţie oarecare faţă de axele principale de inerţie ale secţiunii se numeşte ***încovoiere oblică***.

Dacă asupra unei grinzi acţionează atât forţe verticale după axa y (F_1, F_3, Y_1, Y_5), cât şi forţe orizontale după axa z (F_2, Z_1, Z_5), ca în Fig.9.1.a, se pot trasa două diagrame de momente încovoietoare: diagrama de momente încovoietore după axa z, produse de forţele aplicate pe axa y (M_z) şi diagrama de momente încovoietore după axa y, produse de forţele aplicate pe axa z (M_y).

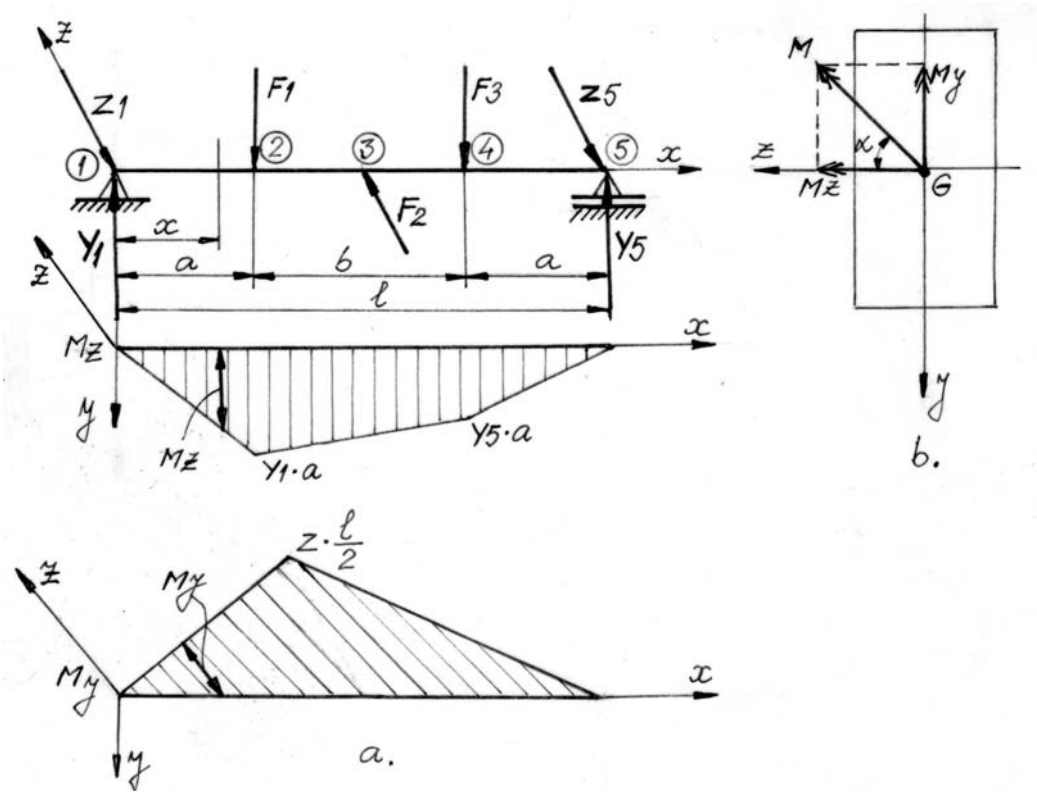

Fig.9.1

Într-o secţiune oarecare a grinzii, situată la distanţa x de reazemul 1 momentul încovoietor rezultant M înclinat cu unghiul α faţă de axa principală de inerţie Gz va avea două componente M_z şi M_y (Fig.9.1.b):

$$M_z = M\cos\alpha \; ; \; M_y = M\sin\alpha$$

Aplicând succesiv formula lui Navier (6.9) într-un punct oarecare al secţiunii considerate, de coordonate y, z, cele două componente ale momentului încovoietor M produc tensiunile normale:

$$\sigma(M_y)=\frac{M_y\cdot z}{I_y}\quad;\quad \sigma(M_z)=\frac{M_z\cdot y}{I_z}$$

Utilizând metoda suprapunerii efectelor, tensiunea normală rezultantă într-un punct al secţiunii de coordonate y, z va fi:

$$\sigma=\sigma(M_y)+\sigma(M_z)=\frac{M_y\cdot z}{I_y}+\frac{M_z\cdot y}{I_z} \tag{9.1}$$

Axa neutră este locul geometric al punctelor nesolicitate ale secţiunii, în care tensiunea normală este nulă. Astfel, anulând expresia tensiunii normale (6.18) se determină ecuaţia axei neutre:

$$\sigma=0\Rightarrow\frac{M_y\cdot z}{I_y}+\frac{M_z\cdot y}{I_z}=0\Rightarrow\frac{y}{z}=-\frac{M_y}{M_z}\cdot\frac{I_z}{I_y}=-\frac{M\sin\alpha}{M\cos\alpha}\cdot\frac{I_z}{I_y}\Rightarrow$$

$$\frac{y}{z}=-\mathrm{tg}\alpha\frac{I_z}{I_y} \tag{9.2}$$

Conform relaţiei (9.2) axa neutră este o dreaptă care trece prin centrul de greutate G al secţiunii, înclinată cu unghiul β faţă de axa Gz:

$$\mathrm{tg}\beta=\frac{y}{z}=-\mathrm{tg}\alpha\frac{I_z}{I_y} \tag{9.3}$$

În Fig.9.2. s-a reprezentat pe secţiunea considerată axa neutră şi diagrama tensiunii normale σ. Se observă că direcţia axei neutre nu coincide cu direcţia momentului încovoietor rezultant M decât la secţiuni pentru care momentele de inerţie axiale sunt egale ($I_z = I_y$) , ca de exemplu secţiunea circulară. La aceste secţiuni toate axele sunt axe principale de inerţie, deci nu există încovoiere oblică.

Cunoscând poziţia axei neutre se determină punctele cele mai îndepărtate de aceasta (situate la distanţa d_{max}), unde apar valorile extreme ale tensiunii normale. Aceste valori se obţin înlocuind în formula (9.1) coordonatele punctelor respective.

Pentru secţiunea dreptunghiulară din Fig.9.2, valorile extreme ale tensiunii normale se obţin în punctele R, de coordonate $y_R = h/2$; $z_R = b/2$ şi respectiv S, de coordonate $y_S = -h/2$; $z_S = -b/2$.

$$\sigma_R\left(\frac{h}{2};\frac{b}{2}\right)=\frac{M_y\cdot\frac{b}{2}}{I_y}+\frac{M_z\cdot\frac{h}{2}}{I_z}=\frac{M_y}{W_y}+\frac{M_z}{W_z}=\sigma_{max}$$

$$\sigma_S\left(-\frac{h}{2};-\frac{b}{2}\right)=\frac{M_y\left(-\frac{b}{2}\right)}{I_y}+\frac{M_z\left(-\frac{h}{2}\right)}{I_z}=-\left(\frac{M_y}{W_y}+\frac{M_z}{W_z}\right)=\sigma_{min}$$

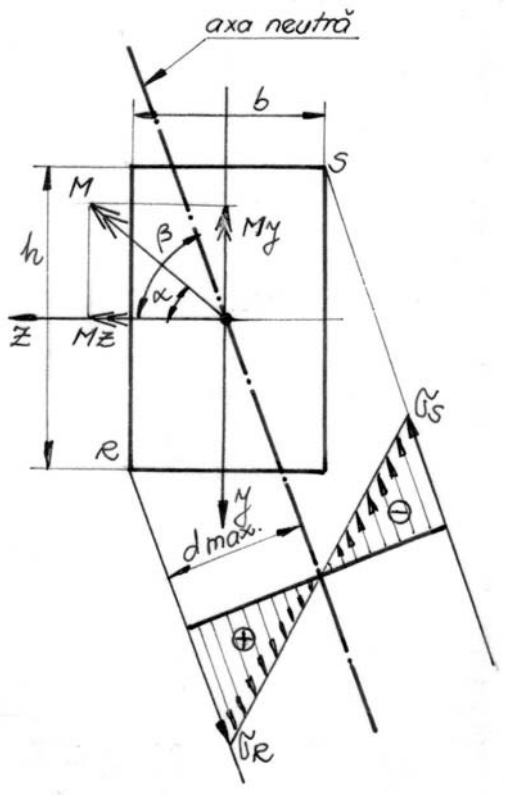

Fig.9.2

Se observă că punctele secţiunii situate în dreapta axei neutre sunt supuse la compresiune, iar cele din stânga la tracţiune. Valorile extreme ale tensiunii normale sunt egale în valoare absolută, datorită faptului că punctele R şi S sunt situate la distanţe egale de axa neutră.

9.3. Încovoierea cu forţă axială

În secţiunea grinzii din Fig.9.3.a. apar doar eforturile N, M_y şi M_z, toate generând tensiuni normale. Chiar dacă pe secţiune ar acţiona şi forţe tăietoare, la dimensiuni mari de gabarit tensiunile tangenţiale produse de acestea sunt relativ mici în raport cu tensiunile normale şi pot fi neglijate.

Conform principiului suprapunerii efectelor, pe elementul de arie dA de coordonate y, z va apare tensiunea normală σ_x, obţinută prin însumarea tensiunilor normale produse de cele trei eforturi din secţiune:

$$\sigma_x(y,z) = \sigma_x(N) + \sigma_x(M_y) + \sigma_x(M_z) \Rightarrow$$

$$\sigma_x(y,z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{M_z \cdot y}{I_z} \tag{9.4}$$

Ţinând cont de expresiile momentelor de inerţie axiale în funcţie de razele de inerţie ale secţiunii: $I_y = i_y^2 A$; $I_z = i_z^2 A$, relaţia (9.4) se poate scrie sub forma:

$$\sigma_x(y,z) = \frac{N}{A}\left[1 + \frac{M_y \cdot z}{N \cdot i_y^2} + \frac{M_z \cdot y}{N \cdot i_z^2}\right] \tag{9.4'}$$

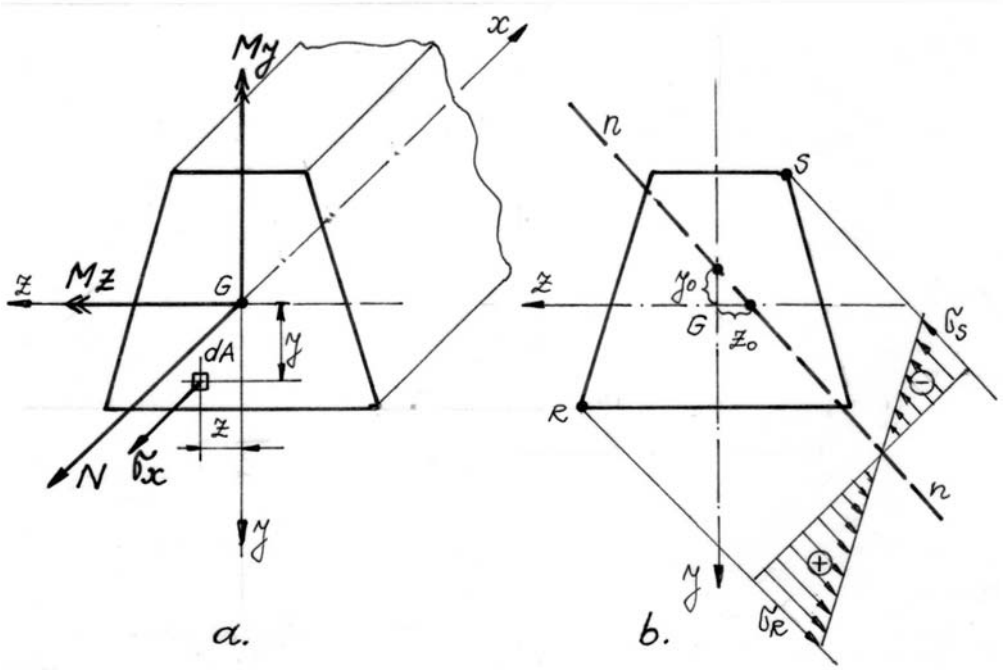

Fig.9.3

Pentru a determina distribuţia tensiunii normale pe secţiune trebuie stabilită ecuaţia axei neutre. Axa neutră este locul geometric al punctelor secţiunii în care

tensiunea normală este nulă. Anulând deci expresia (9.4) se va obţine ecuaţia axei neutre:

$$1+\frac{M_y \cdot z}{N \cdot i_y^2}+\frac{M_z \cdot y}{N \cdot i_z^2}=0 \tag{9.5}$$

S-a obţinut ecuaţia unei drepte care nu trece prin centrul de greutate G al secţiunii. Pentru a putea reprezenta axa neutră (nn) în planul secţiunii vom determina punctele în care aceasta intersectează axele Gy, Gz, adică tăieturile y_0 şi z_0:

- pentru y = 0, din ecuaţia (9.5) rezultă:

$$1+\frac{M_y \cdot z}{N \cdot i_y^2}=0 \Rightarrow \quad z_0=-\frac{N \cdot i_y^2}{M_y}$$

- pentru z = 0, din (9.5) rezultă:

$$1+\frac{M_z \cdot y}{N \cdot i_z^2}=0 \Rightarrow \quad y_0=-\frac{N \cdot i_z^2}{M_z}$$

În Fig.9.3.b. s-a reprezentat axa neutră (nn), precum şi distribuţia tensiunii normale pe secţiune. Se observă că cele mai îndepărtate puncte ale secţiunii de axa neutră sunt R de coordonate y_R, z_R şi S de coordonate y_S, z_S. În punctul R din cadranul I toate eforturile produc tensiuni normale pozitive de întindere, deci în R se obţine tensiunea maximă pozitivă:

$$\sigma_{max}=\sigma_R\left(y_R, z_R\right)=\frac{N}{A}+\frac{M_y \cdot z_R}{I_y}+\frac{M_z \cdot y_R}{I_z} \leq \sigma_{at}$$

În punctul S, de coordonate negative din cadranul III, momentele încovoietoare produc tensiuni negative de compresiune, de obicei mult mai mari decât tensiunea pozitivă produsă de forţa axială. Astfel în punctul S se obţine tensiunea normală minimă negativă, de compresiune:

$$\left|\sigma_{min}\right|=\left|\sigma_S\left(y_S, z_S\right)\right|=\left|\frac{N}{A}+\frac{M_y \cdot z_S}{I_y}+\frac{M_z \cdot y_S}{I_z}\right| \leq \sigma_{ac}$$

9.4. Compresiunea excentrică

Compresiunea excentrică este un caz particular al încovoierii cu forţă axială. În Fig.9.4.a. s-a reprezentat un stâlp cu secţiune oarecare supus unei forţe de compresiune F, aplicată într-un punct oarecare al secţiunii B de coordonate z_B, y_B.

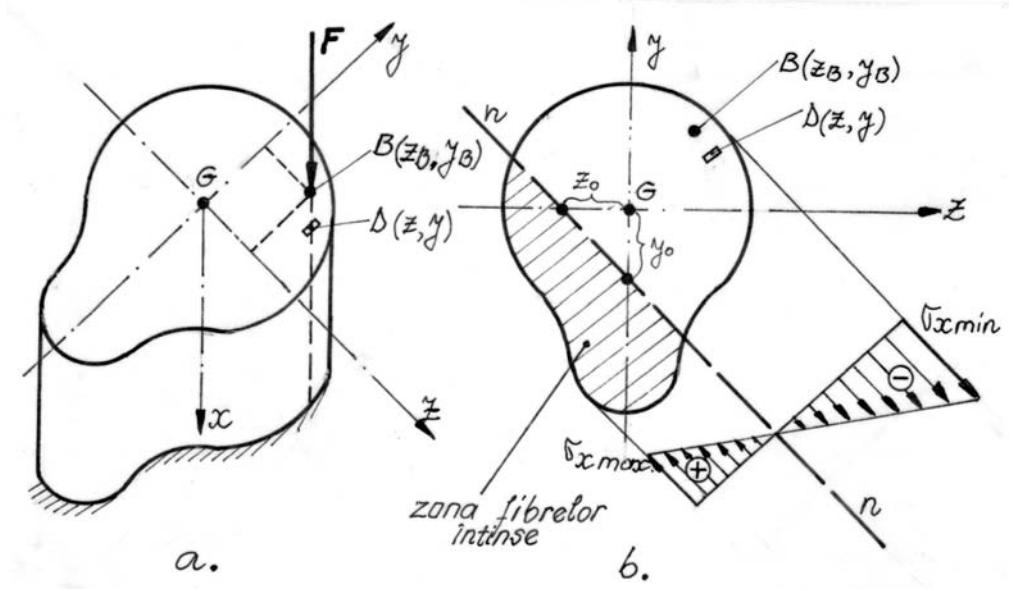

Fig.9.4

Ne propunem să determinăm eforturile din stâlp şi expresia tensiunii într-un punct oarecare al secţiunii D(z,y). Reducem forţa F în centrul de greutate al secţiunii G, obţinând următoarele elemente ale torsorului de reducere:

- forţa axială: N = -F,
- momentul încovoietor după axa Gy: $M_y = -F \cdot z_B$,
- momentul încovoietor după axa Gz: $M_z = -F \cdot y_B$,

Se observă că aceste eforturi sunt constante în orice secţiune transversală a stâlpului.

Conform principiului suprapunerii efectelor, într-un punct oarecare D al secţiunii de coordonate y, z va apare tensiunea normală σ, obţinută prin însumarea tensiunilor normale produse de cele trei eforturi din secţiune:

$$\sigma(y,z) = \sigma_x(N) + \sigma_x(M_y) + \sigma_x(M_z) \Rightarrow \sigma(y,z) = -\frac{F}{A} + \frac{(-F \cdot z_B) \cdot z}{I_y} + \frac{(-F \cdot y_B) \cdot y}{I_z}$$

$$\sigma(y,z) = -\frac{F}{A}\left[1 + \frac{z_B \cdot z}{i_y^2} + \frac{y_B \cdot y}{i_z^2}\right] \qquad (9.6)$$

Ecuaţia axei neutre se obţine anulând expresia tensiunii (9.6):

$$\sigma(y,z)=0 \Rightarrow 1+\frac{z_B \cdot z}{i_y^2}+\frac{y_B \cdot y}{i_z^2}=0 \qquad (9.7)$$

Deci axa neutră este o dreaptă care nu trece prin centrul de greutate al secţiunii. Tăieturile axei neutre sunt:

$$z=0 \Rightarrow y_0=-\frac{i_z^2}{y_B}; \quad y=0 \Rightarrow z_0=-\frac{i_y^2}{z_B} \qquad (9.8)$$

În Fig.9.4.b. s-a reprezentat pe secţiune axa neutră (nn), precum şi distribuţia tensiunii normale σ. Se observă că punctele situate în stânga axei neutre sunt supuse la tensiuni pozitive, de întindere (aria haşurată), punctele din zona nehaşurată fiind supuse la tensiuni negative, de compresiune. Evident, valorile extreme ale tensiunii normale se obţin în punctele cele mai îndepărtate de axa neutră.

9.5. Proprietăţile axei neutre. Sâmburele central.

În aplicaţiile practice ale compresiunii excentrice proprietăţile axei neutre sunt extrem de importante.

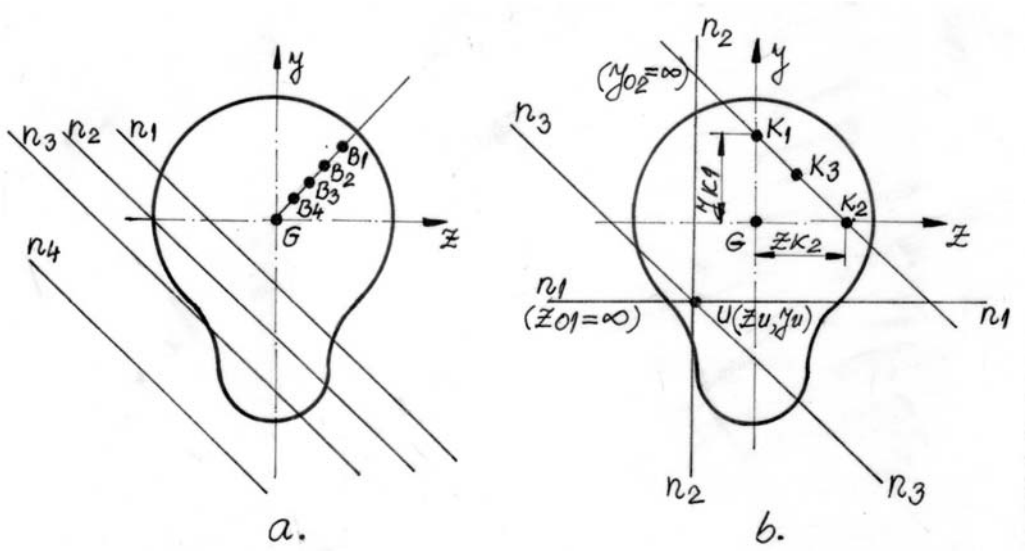

Fig.9.5

Din relaţiile (9.8) se observă că dacă coordonatele punctului de aplicaţie a fortei y_B, z_B cresc tăieturile axei neutre y_0, z_0 se micşorează, deci axa neutră se apropie

de gentrul de greutate G şi invers. Acest fapt este ilustrat în Fig.9.5.a. Dacă raportul y_B / z_B este constant, atunci şi raportul y_0 / z_0 va fi constant.

Din Fig.9.5.a. se observă că dacă punctul B_4 tinde către G, axa neutră tinde la infinit, solicitarea apropiindu-se de compresiunea pură. De asemenea, dacă punctul B_1 tinde la infinit, axa neutră tinde către G, aproximând solicitarea cu o încovoiere pură.

O altă proprietate importantă a axei neutre, ilustrată în Fig.9.5.b. este următoarea: când punctul de aplicaţie al forţei K se deplasează pe o dreaptă care nu trece prin G, axa neutră se va roti în jurul unui punct fix U. Şi reciproca acestei proprietăţi este valabilă: dacă axa neutră se roteşte în jurul unui punct U, punctele de aplicaţie ale forţei corespunzătoare diferitelor poziţii ale axei neutre se vor deplasa pe o dreaptă care nu trece prin centrul de greutate al secţiunii G.

Într-adevăr, dacă se cunosc tăieturile axei neutre, din relaţiile (9.8) se pot determina coordonatele punctului de aplicaţie al forţei B, corespunzător axei neutre respective:

$$y_B = -\frac{i_z^2}{y_0} \; ; \; z_B = -\frac{i_y^2}{z_0} \qquad (9.8')$$

Aplicând aceste relaţii pentru axa neutră (n_1n_1), paralelă cu Gz ($z_{01} = \infty$) se obţine un punct de aplicaţie al forţei situat pe axa Gy: $K_1(y_{K1}, 0)$. În mod analog, pentru axa neutră (n_2n_2), paralelă cu Gy ($y_{02} = \infty$) se obţine punctul $K_2(0, z_{K2})$, pe axa Gz. Intersecţia celor două axe neutre este punctul U, de coordonate:

$$y_U = -\frac{i_z^2}{y_{K1}} \; ; \; z_U = -\frac{i_y^2}{z_{K2}} \qquad (9.9)$$

În concluzie, unui punct K_3 situat pe dreapta care uneşte punctele K_1 şi K_2 îi va corespunde o axă neutră (n_3n_3) care trece prin punctul U (Fig.9.5.b).

<u>Sâmburele central</u>

În construcţii se utilizează materiale pentru susţineri foarte rezistente la compresiune dar slab rezistente la tracţiune, ca de exemplu fontele. Pentru ca aceşti stâlpi de susţinere să fie solicitaţi doar la compresiune axele neutre nu trebuie să intersecteze secţiunea (Fig.9.5.a), deci trebuie "aruncate" la infinit. Se caută domeniul în care trebuie situate punctele de aplicaţie ale forţei care determină axe neutre tangente la conturul exterior al secţiunii.

Locul geometric al punctelor de aplicaţie ale forţelor corespunzătoare axelor neutre tangente la conturul exterior al secţiunii este un contur închis, iar suprafaţa delimitată de acesta se numeşte *sâmbure central* (Fig.9.6).

Coordonatele punctelor de aplicaţie ale forţei corespunzătoare tăietorilor axelor neutre tangente trasate în Fig.9.6 se determină utilizând relaţiile (9.9).

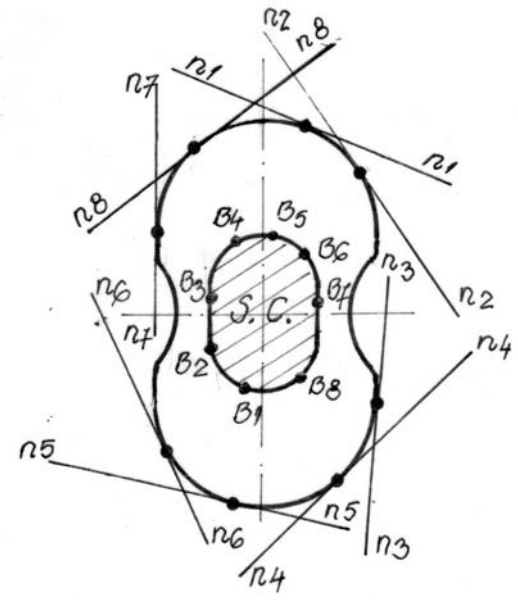

Fig.9.6

<u>Determinarea sâmburelui central pentru suprafeţe simple</u>

a) ***Secţiunea circulară*** (Fig.9.7.a)

Razele de inerţie ale secţiunii circulare de rază R se calculează cu relaţiile:

$$i_z^2 = i_y^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\pi d^4}{64} \cdot \frac{4}{\pi d^2} = \frac{d^2}{16} = \frac{R^2}{4}$$

Coordonatele punctului de aplicaţie al forţei B_1, corespunzător axei neutre (n_1n_1), cu $y_0 = R$, $z_0 = \infty$, vor fi conform relaţiilor (9.8'):

$$y_{B1} = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{R}{4} \; ; \; z_{B1} = -\frac{i_y^2}{z_0} = 0$$

În mod analog, axei neutre (n_2n_2), cu $y_0 = \infty$, $z_0 = R$, îi corespunde punctul B_2 de coordonate:

$$y_{B2} = -\frac{i_z^2}{y_0} = 0 \; ; \; z_{B2} = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{R}{4}$$

În concluzie, pentru secţiunea circulară sâmburele central este suprafaţa haşurată din Fig.9.7.a, delimitată de un cerc de rază r = R/ 4.

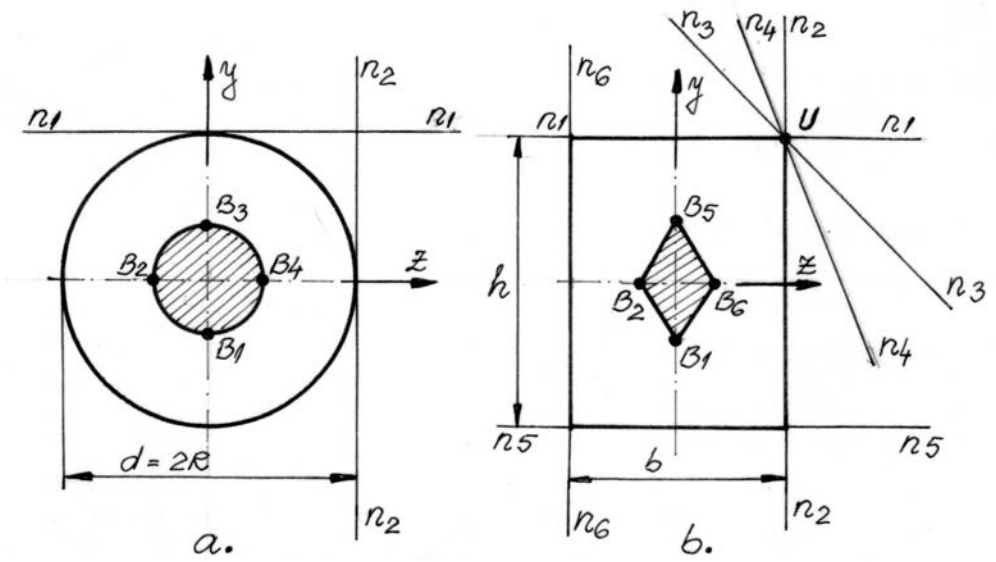

Fig.9.7

b) ***Secţiunea dreptunghiulară*** (Fig.9.7.b)

Razele de inerţie pentru secţiunea dreptunghiulară se calculeză cu relaţiile cunoscute:

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{bh} = \frac{h^2}{12} \; ; \; i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{hb^3}{12}}{bh} = \frac{b^2}{12}$$

Coordonatele punctului de aplicaţie al forţei B_1 corespunzător axei neutre (n_1n_1), cu $y_0 = h/2$, $z_0 = \infty$, vor fi conform relaţiilor (9.8'):

$$y_{B1} = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{\frac{h^2}{12}}{\frac{h}{2}} = -\frac{h^2}{6} \; ; \; z_{B1} = -\frac{i_y^2}{z_0} = 0$$

În mod analog, axei neutre (n_2n_2), cu $y_0 = \infty$, $z_0 = b/2$, îi corespunde punctul B_2 de coordonate:

$$y_{B2} = -\frac{i_z^2}{y_0} = 0 \; ; \; z_{B2} = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{\frac{b^2}{12}}{\frac{b}{2}} = -\frac{b^2}{6}$$

Conform cu cea de-a doua proprietate a axei neutre, rotind axa neutră (n_1n_1) în jurul punctului U, punctul B se va deplasa pe segmentul B_1B_2.

In concluzie, pentru secţiunea dreptunghiulară sâmburele central este suprafaţa haşurată din Fig.9.7.b. delimitată de un romb.

9.6. Solicitarea compusă de torsiune cu forfecare. Calculul arcurilor elicoidale cu spire strânse

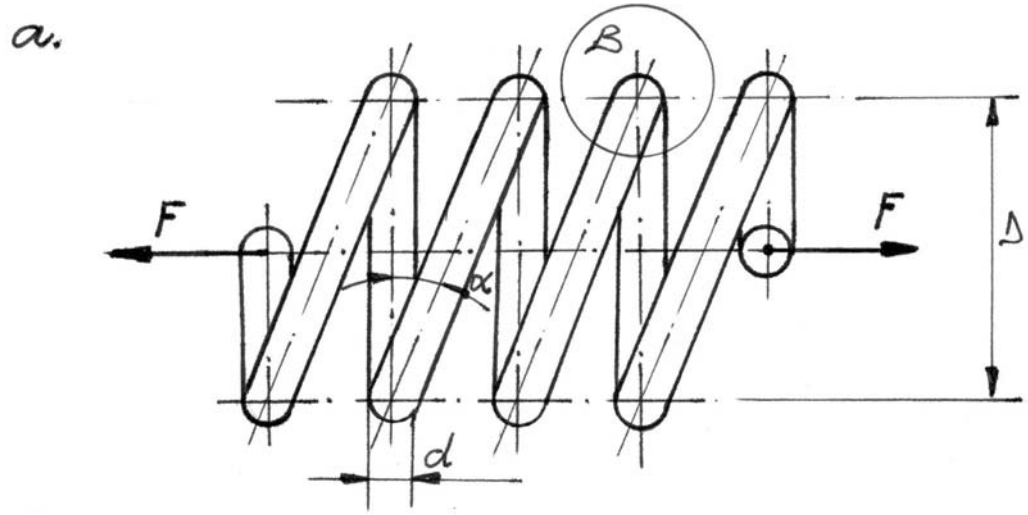

Fig.9.8.a

Arcurile elicoidale, foarte des utilizate în construcţia de maşini, sunt solicitate în ansamblu la întindere sau compresiune. Conform figurii 9.8.a, se notează: F sarcina aplicată arcului, D diametrul de înfăşurare al arcului, d diametrul secţiunii transversale a spirei, n numărul de spire şi α unghiul de înfăşurare al arcului. Dacă unghiul α este mai mic de $10°$, arcul se numeşte arc cu spire strânse. Vom determina eforturile din spira arcului (Fig.9.8.b).

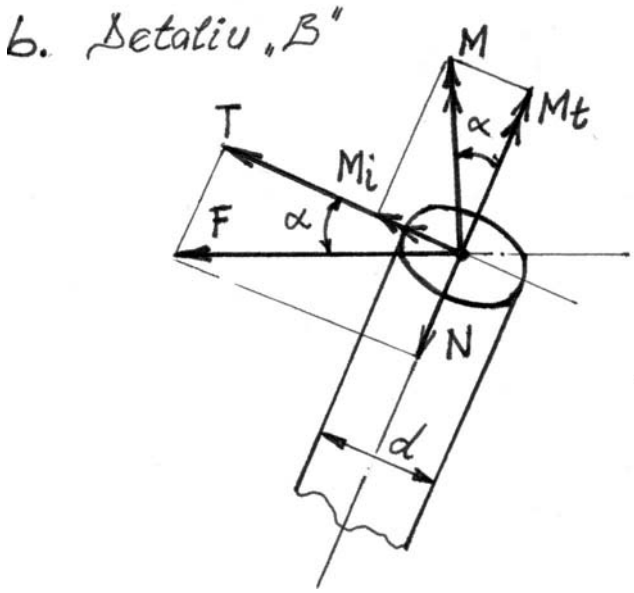

Fig.9.8.b

Se reduce forţa F în centrul de greutate al secţiunii B a spirei arcului la un torsor de reducere compus dintr-o forţă F şi un moment M (Fig.9.8.b).

Forţa F se descompune în două componente:

- o componentă perpendiculară pe planul secţiunii, reprezentând forţa axială din spiră: $N = F\sin\alpha$
- o componentă conţinută în planul secţiunii, reprezentând forţa tăietoare din spiră: $T = F\cos\alpha$

Momentul rezultant în spira arcului este:

$$M = F \cdot \frac{D}{2} \tag{9.10}$$

Componentele acestui moment sunt:

- momentul încovoietor, conţinut în planul secţiunii: $M_i = M\sin\alpha$
- momentul de torsiune, perpendicular pe planul secţiunii: $M_t = M\cos\alpha$

Dacă $\alpha \le 10°$ se poate face aproximaţia $\sin\alpha \cong 0; \cos\alpha \cong 1$, deci se poate considera că pe secţiunea spirei arcului acţionează doar forţa tăietoare şi momentul de torsiune, aşadar spira este solicitată la torsiune cu forfecare de eforturile:

$$M_t = F\frac{D}{2}; T = F \tag{9.11}$$

Ambele eforturi produc pe secţiune tensiuni tangenţiale. Tensiunea tangenţială produsă de forţa tăietoare se calculează cu formula lui Juravski. Valoarea maximă a acestei tensiuni apare în centrul secţiunii circulare (Fig.9.9):

$$\tau_{f\,max} = \frac{4}{3}\frac{T}{A} = \frac{4}{3}\frac{F}{A} \tag{9.12}$$

Tensiunea tangenţială produsă de momentul încovoietor are expresia:

$$\tau_t = \frac{M_t \cdot r}{I_p} \tag{9.13}$$

Valoarea maximă a acestei tensiuni apare pe conturul secţiunii circulare, după cum s-a reprezentat în Fig.9.9:

$$\tau_{t\,max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{\frac{FD}{2}}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{8FD}{\pi d^3} \tag{9.14}$$

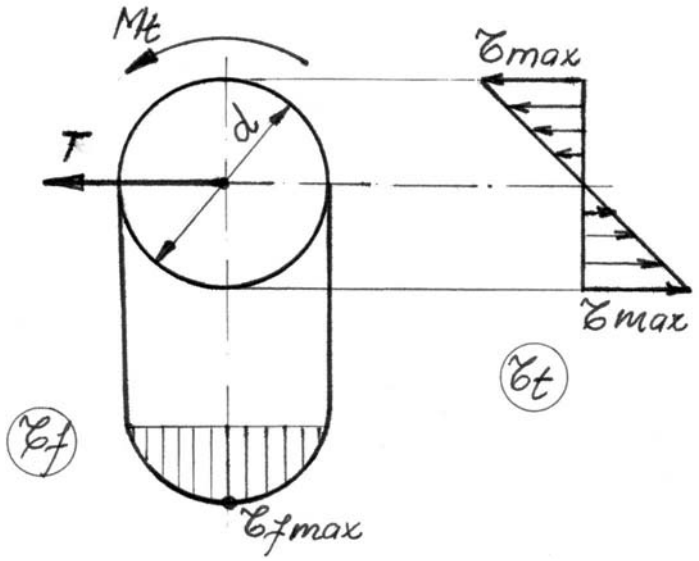

Fig.9.9

Cu toate că cele două tensiuni maxime se produc în puncte diferite ale secţiunii, condiţia de rezistenţă a spirei arcului se exprimă prin relaţia:

$$\tau_{max} = \tau_{f\,max} + \tau_{t\,max} \le \tau_a \tag{9.15}$$

9.7. Aplicaţii

1) Pentru grinda din Fig.9.10. se cunosc: F = 2,8 KN; t = 16 mm. Se cer:
a. Diagramele cotate ale eforturilor N, M_y, M_z;
b. Poziţia axei neutre şi diagrama tensiunii σ în secţiunea periculoasă.

a) *Poziţia centrului de greutate al secţiunii în raport cu sistemul yOZ*:

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{2} y_{Gi} A_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{1{,}75t \cdot 3{,}5t \cdot 5t - 2t \cdot 3t \cdot 4t}{3{,}5t \cdot 5t - 3t \cdot 4t} = 1{,}2t = 19{,}2\,mm \;;\; A = 5{,}5t^2$$

Calculul momentelor de inerţie axiale I_z, I_y:

$$c_1 = 1{,}75t - y_G = 0{,}55t \;;\; c_2 = 2t - y_G = 0{,}8t$$

$$I_z = \left[\frac{5t(3{,}5t)^3}{12} + (0{,}55t)^2 5t \cdot 3{,}5t\right] - \left[\frac{4t(3t)^3}{12} + (0{,}8t)^2 4t \cdot 3t\right] = 6{,}478t^4$$

$$I_y = \left[\frac{3{,}5t(5t)^3}{12}\right] - \left[\frac{3t(4t)^3}{12}\right] = 20{,}46t^4$$

$$I_z = 424{,}56 \cdot 10^3\,mm^4 ; I_y = 1340{,}76 \cdot 10^3\,mm^4$$

Funcţiile de eforturi pe tronsoane:

Tronsonul (1-2), $x \in [0;6t]$

$$N(x) = -8F = -22{,}4KN$$

$$M_z(x) = 8F \cdot y_G = 430{,}08KNm$$

$$M_y(x) = -8F \cdot \frac{5t}{2} = -896KNm$$

Tronsonul (2 -3), $x \in [0;12t]$

$$N(x) = -8F = -22{,}4KN$$

$$M_z(x) = 8F \cdot y_G - F \cdot x \Rightarrow M_{z2} = 430{,}08KNm \;;\; M_{z3} = -107{,}52KNm$$

$$M_y(x) = -8F \cdot \frac{5t}{2} = -896KNm$$

Pe baza funcţiilor de eforturi s-au trasat diagramele cotate ale eforturilor din Fig.9.10. Se observă de pe diagramele de eforturi că secţiunile periculoase sunt toate secţiunile de pe tronsonul (1 - 2), valorile maxime ale eforturilor fiind:

$$N = -22{,}4KN \;;\; M_z = 430{,}08KNm \;;\; M_y = -896KNm$$

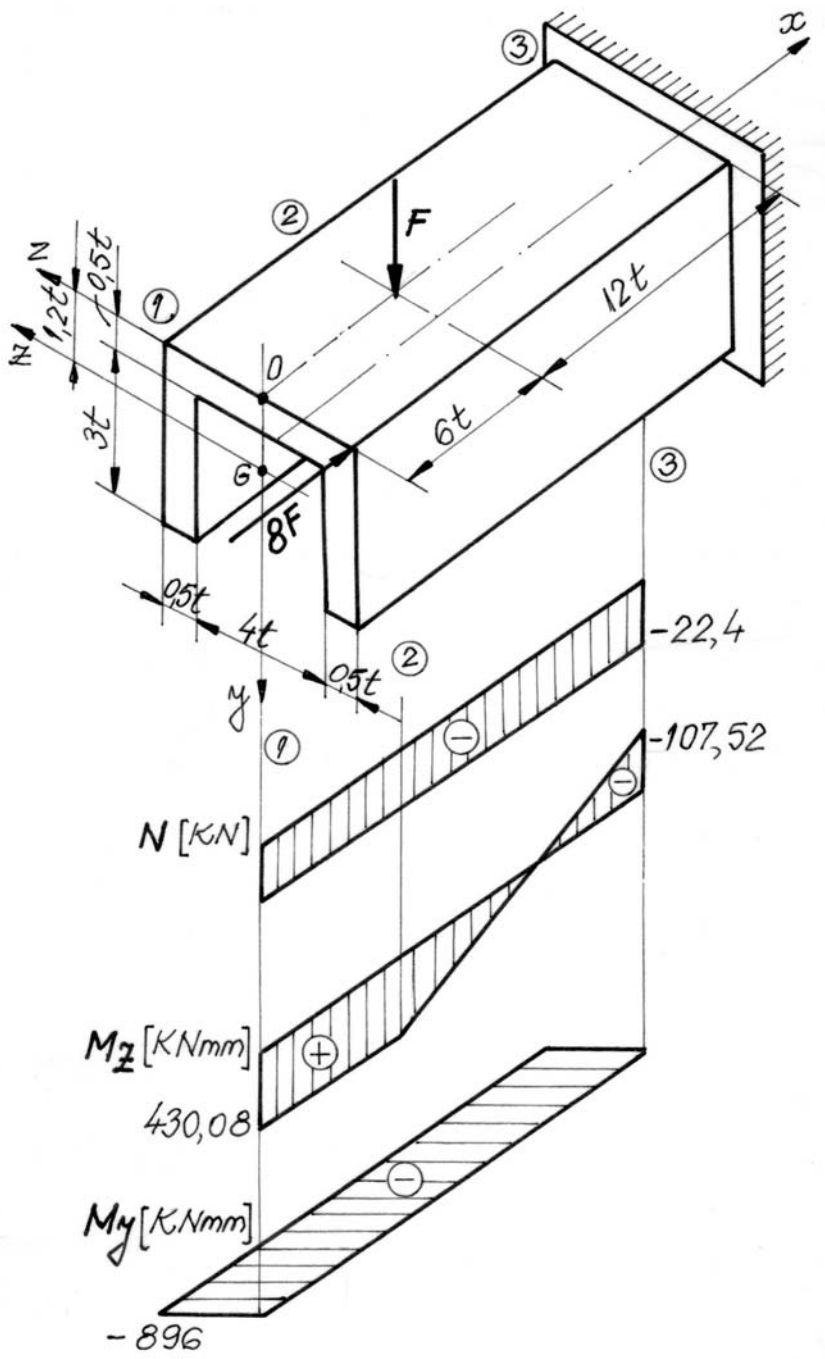
x
F
12t
6t
0
G
8F
1,2t
0,5t
3t
z
y
0,5t
4t
0,5t
-22,4
-107,52
N [KN]
Mz [KNmm]
430,08
My [KNmm]
-896

Fig.9.10

b) Particularizând *ecuaţia generală a tensiunii normale* σ pentru solicitarea compusă de compresiune cu încovoiere oblică se obţine:

$$\sigma(y,z)=\frac{N}{A}+\frac{M_z}{I_z}y-\frac{M_y}{I_y}z=-\frac{22{,}4\cdot 10^3}{5{,}5\cdot 16^2}+\frac{430{,}08\cdot 10^3}{424{,}56\cdot 10^3}y-\frac{\left(-896\cdot 10^3\right)}{1340{,}76\cdot 10^3}z\Rightarrow$$

$$\sigma(y,z)=-15{,}9+1{,}013y+0{,}668z \qquad (1)$$

Anulând expresia tensiunii normale (1) se va obţine *ecuaţia axei neutre*:

$$-15{,}9+1{,}013y+0{,}668z=0$$

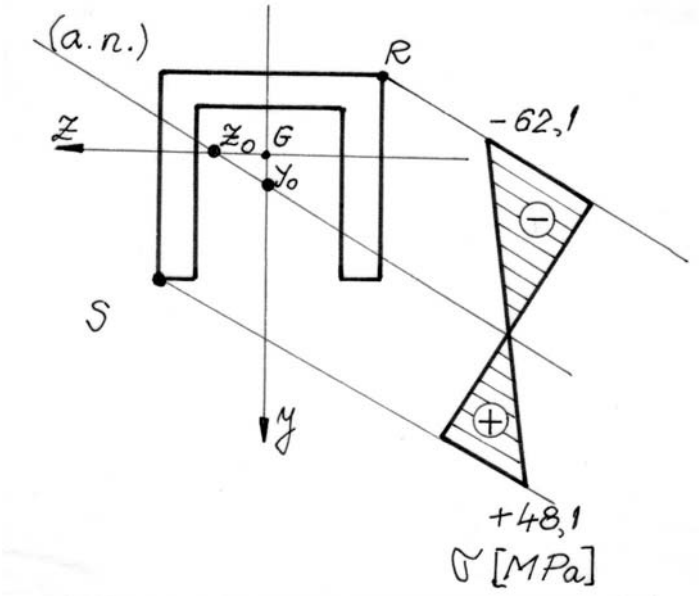

Fig.9.11

Axa neutră este o dreaptă în planul secţiunii care nu trece prin centrul de greutate G al acesteia (Fig.9.11). Tăieturile axei neutre sunt:

$$\text{Ptr.}\, z=0\Rightarrow y_0=\frac{15{,}9}{1{,}013}=15{,}7\text{mm}$$

$$\text{Ptr.}\, y=0\Rightarrow z_0=\frac{15{,}9}{0{,}668}=23{,}8\text{mm}$$

Punctele cele mai solicitate ale secţiunii sunt punctele cele mai îndepărtate de axa neutră: R şi S de coordonate:

$$y_R=-y_G=-19{,}2\text{mm};\ z_R=-2{,}5t=-40\text{mm}$$

$$y_S=3{,}5t-y_G=36{,}8\text{mm};\ z_S=2{,}5t=40\text{mm}$$

Valorile extreme ale tensiunii în aceste puncte vor fi:

$$\sigma_R(y_R, z_R) = -15{,}9 + 1{,}013(-19{,}2) + 0{,}668(-40) = -62{,}1\frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_S(y_S, z_S) = -15{,}9 + 1{,}013(+36{,}8) + 0{,}668(+40) = +48{,}1\frac{N}{mm^2}$$

În Fig.9.11. s-a reprezentat poziţia axei neutre, precum şi diagrama tensiunii normale σ în secţiunea periculoasă.

2) Arborele din Fig.9.12, de diametru d = 42 mm, transmite mişcarea de rotaţie prin intermediul roţilor de curea 1 şi 2, având diametrele D_1 = 600 mm şi D_2 = 800 mm. Eforturile din curele sunt S_1 = 0,4 KN , respectiv S_2 = 0,6 KN. Să se verifice arborele utilizând teoria a III-a de rezistenţă, cunoscând tensiunea admisibilă a materialului arborelui σ_a = 150 N/mm^2.

Pentru a face calculul de verificare al arborelui trebuie să se determine secţiunea periculoasă a acestuia. Pentru aceasta sunt necesare diagramele cotate ale eforturilor M_t, M_z, M_y. Tensiunile tangenţiale date de forţele tăietoare T_z, T_y fiind extrem de mici efectul acestora este neglijabil.

a. *Calculul momentului de torsiune_ M_t* transmis între cele două roţi de curea:

$$M_t = 3S_1\frac{D_1}{2} - S_1\frac{D_1}{2} = S_1D_1 = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24\text{KNm}$$

$$M_t = 2S_2\frac{D_2}{2} - S_2\frac{D_2}{2} = S_2\frac{D_2}{2} = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24\text{KNm}$$

b. *Calculul momentului încovoietor M_z*

Ne plasăm în sistemul de axe xOy (Fig.9.12.b). Proiecţiile după axa y a forţelor care acţionează cele două roţi de curea şi care vor da momente după axa z sunt:

- pe roata 1: $F_{y1}=(3S_1+S_1)\cdot\sin30° = 0{,}8$KN
- pe roata 2: $F_{y2}=(2S_2+S_2)\cdot\sin45° = 1{,}27$KN

Calculul reacţiunilor Y_A, Y_B:

$$\left(\sum M_z\right)_A = 0 \Rightarrow 200F_{y1} + 600Y_B - 400F_{y2} = 0 \Rightarrow Y_B = 0{,}58\text{KN}$$

$$\left(\sum M_z\right)_B = 0 \Rightarrow 800F_{y1} - 600Y_A + 200F_{y2} = 0 \Rightarrow Y_A = 1{,}49\text{KN}$$

Valoarea momentelor în secţiunile A şi 2:

$$M_{zA} = -F_{y1} \cdot 0{,}2 = -0{,}16\text{KNm}$$

$$M_{z2} = +Y_B \cdot 0{,}2 = +0{,}116\text{KNm}$$

Diagrama de variaţie a momentului încovoietor M_z este reprezentată în Fig.9.12.b.

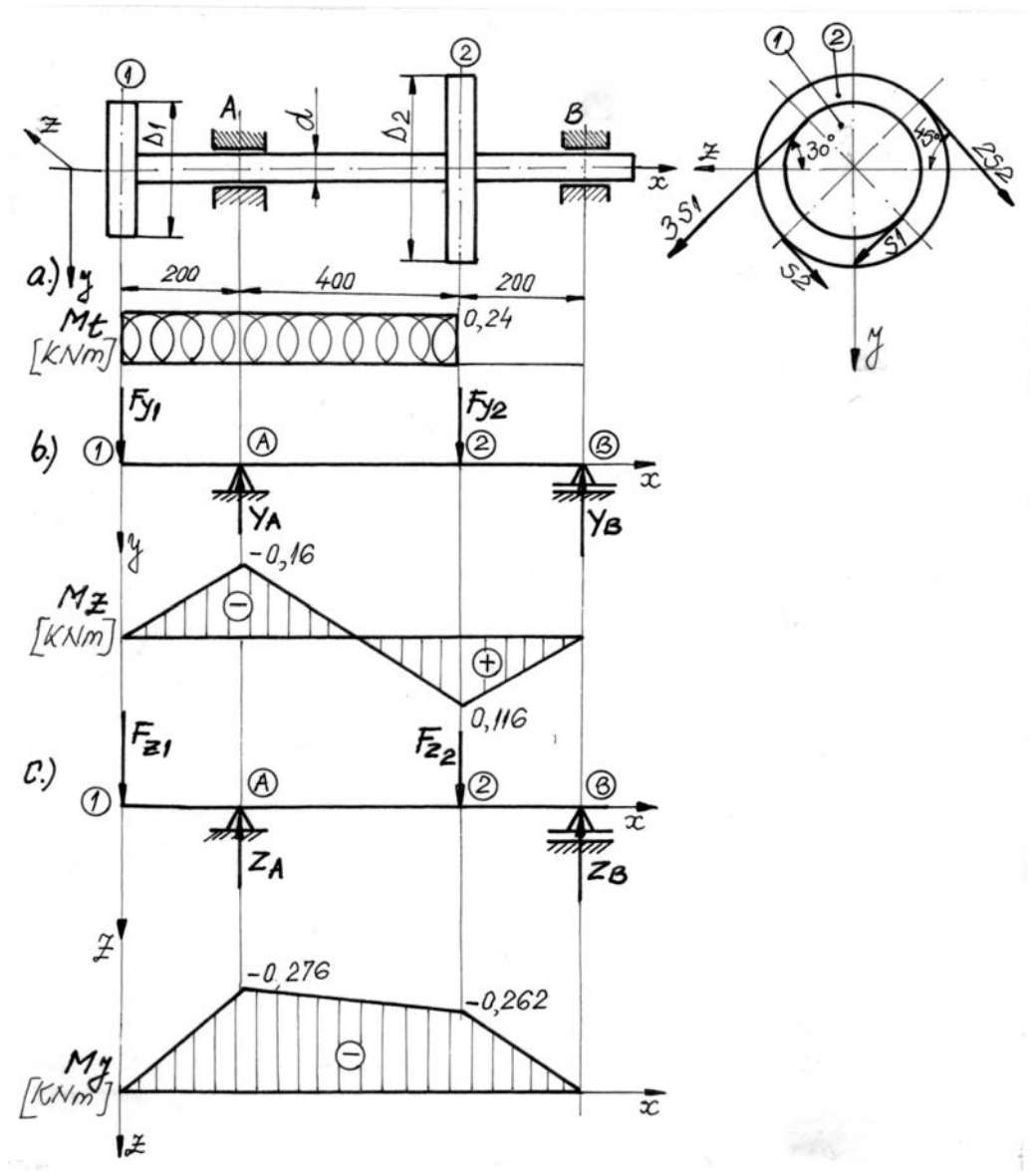

Fig.9.12

c. *Calculul momentului încovoietor M_y.*

Ne plasăm în sistemul de axe xOz (Fig.9.12.c). Proiecţiile după axa z ale forţelor care acţionează cele două roţi de curea şi care vor da momente încovoietoare după axa y sunt:

- pe roata 1: $F_{z1}=(3S_1+S_1)\cdot\cos30° =1,38KN$
- pe roata 2: $F_{z2}= -(2S_2+S_2)\cdot\cos45° = -1,27KN$

Calculul reacţiunilor Z_A, Z_B:

$$\left(\sum M_y\right)_A = 0 \Rightarrow 200F_{z1} + 600Z_B - 400F_{z2} = 0 \Rightarrow Z_B = -1{,}31\text{KN}$$

$$\left(\sum M_y\right)_B = 0 \Rightarrow 800F_{z1} - 600Z_A + 200F_{z2} = 0 \Rightarrow Z_A = 1{,}42\text{KN}$$

Valoarea momentelor în secţiunile A şi 2:

$$M_{yA} = -F_{z1} \cdot 0{,}2 = -0{,}276\text{KNm}\,;\quad M_{y2} = +Z_B \cdot 0{,}2 = +0{,}262\text{KNm}$$

Diagrama de variaţie a momentului încovoietor M_y este reprezentată în Fig.9.12.c.

Din diagramele de eforturi se observă că secţiunea periculoasă este secţiunea A, în care acţionează eforturile:

M_z = -0,16 KNm ; M_y = -0,276 KNm ; M_t = 0,24 KNm

Modulul de rezistenţă axial al secţiunii arborelui este:

$$W_z = W_y = \frac{W_p}{2} = \frac{\pi d^3}{32} = 7273{,}57\text{mm}^3$$

Tensiunea echivalentă după teoria a III-a de rezistenţă:

$$\sigma_{ech3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2}}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_t}{W_p}\right)^2} = \frac{M_{ech}}{W_z}\text{, unde}$$

$$M_{ech} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_t^2} = \left(\sqrt{0{,}16^2 + 0{,}276^2 + 0{,}24^2}\right) \cdot 10^6 = 159376\,\text{Nmm}$$

Relaţia de verificare:

$$\sigma_{ech3} = 54{,}88\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \le \sigma_a$$

În concluzie arborele rezistă la această solicitare compusă.

Observaţie: Datorită rotirii arborelui, tensiunile normale σ produse de forţele de întindere din ramurile curelelor variază la fiecare rotire într-un punct oarecare al secţiunii transversale după o sinusoidă, între o valoare maximă σ_{max} şi o valoare minimă $\sigma_{min} = -\sigma_{max}$. Din acest motiv, tensiunea admisibilă a materialului σ_a este de numai cca. 50% din tensiunea admisibilă la solicitarea statică.