CAPITOLUL 4

SOLICITAREA DE TRACŢIUNE – COMPRESIUNE

4.1. Forţe axiale

Dacă asupra unei bare drepte se aplică forţe dirijate în lungul axei longitudinale bara este solicitată la tracţiune (Fig.4.1.a) sau la compresiune (Fig.4.1.b). In cazul cel mai simplu, reprezentat în Fig.4.1, când se aplică numai forţele F la capetele barei, egale si de sens contrar, în orice secţiune transversală a barei forţa axială N este egală cu forţa aplicată F, fiind pozitivă dacă întinde bara şi negativă dacă o comprimă.

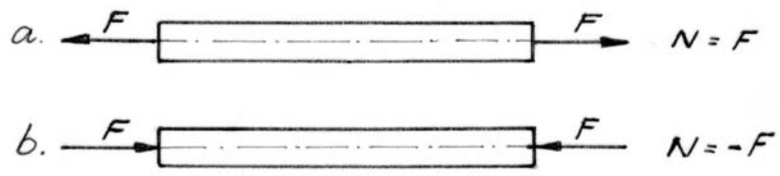

Fig.4.1

Dacă în lungul axei barei sunt aplicate mai multe forţe este necesară construirea unei diagrame a forţelor axiale. Într-o secţiune oarecare forţa axială este egală cu suma algebrică a proiecţiilor tuturor forţelor situate de o parte a barei pe axa longitudinală a acesteia.

În Fig.4.2 s-a reprezentat o bară încastrată solicitată de forţe axiale. Pentru a trasa diagrama forţelor axiale se împarte bara în tronsoane, limitele acestora fiind secţiunile în care apar încărcări exterioare. Se aplică metoda secţiunilor, parcurgând bara de la capătul liber spre încastrare.

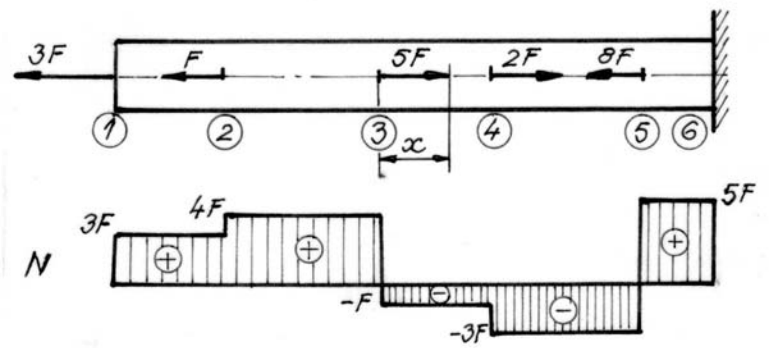

Fig.4.2

Diagrama de forţe axiale se trasează pe baza funcţiei de efort N(x). De exemplu, pentru tronsonul (3-4), forţa axială va fi:

$$N(x) = 3F + F - 5F = -F$$

Diagrama arată că forţa axială este maximă pe tronsonul (5-6), având valoarea 5F, egală cu reacţiunea axială X din încastrare.

4.2. Tensiuni şi deformaţii

Dacă în bara prismatică din Fig.4.3. se face o secţiune normală BC pe axa longitudinală a barei, forţa axială N produce pe secţiune tensiuni normale σ, de acelaşi sens cu forţa axială.

Pentru solicitările de tracţiune sau compresiune, în cazul barelor omogene, se admite ipoteza lui Bernoulli: o secţiune plană normală pe axa barei înainte de deformare rămâne plană şi normală la axa barei şi după deformare.

Din enunţarea ipotezei lui Bernoulli rezultă că deformaţiile Δl sunt constante pe întreaga secţiune, deci şi deformaţiile specifice, $\varepsilon = \Delta l/l$, sunt constante pe secţiune. Aplicând legea lui Hooke: $\sigma = E\cdot\varepsilon$, rezultă că tensiunea normală este constantă pe întreaga secţiune:

$$\sigma = \text{const.} \qquad (4.1)$$

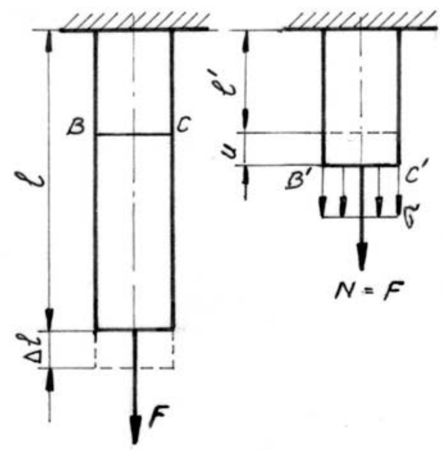

Fig.4.3

Trecând la ecuaţiile de echivalenţă din mecanică, se poate scrie că forţa axială din secţiune, N, este rezultanta forţelor interioare elementare $dF = \sigma\cdot dA$ de pe toate elementele de arie dA ale secţiunii:

$$N = \int_A dF = \int_A \sigma \cdot dA = \sigma \int_A dA = \sigma \cdot A \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \tag{4.2}$$

A reprezintă aria secţiunii transversale a barei.

Formula (4.2) reprezintă relaţia fundamentală a solicitării de tracţiune - compresiune.

Conform legii lui Hooke, deformaţia specifică (lungire specifică în cazul tracţiunii şi scurtare specifică în cazul compresiunii) va fi:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{E \cdot A} \tag{4.3}$$

Având în vedere că deformaţia specifică este dată de relaţia binecunoscută: $\varepsilon = \Delta l / l$, deformaţia (lungirea) barei va fi:

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \tag{4.4}$$

Mărimea $E \cdot A$ se numeşte rigiditatea la tracţiune a barei. Se observă că materialul barei este cu atât mai puţin deformabil (Δl mic), cu cât rigiditatea este mai mare.

Pentru un element de bară de lungime infinit mică dx, deformaţia va fi:

$$\Delta(dx) = \frac{N \cdot dx}{E \cdot A} \tag{4.5}$$

Deformaţia (lungirea) totală a barei se poate obţine şi prin integrarea relaţiei (4.5):

$$\Delta l = \int_l \Delta(dx) = \int_0^l \frac{N \cdot dx}{E \cdot A} = \frac{N}{E \cdot A} \int_0^l dx = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

Cu această relaţie se poate determina şi deplasarea unei secţiuni oarecare a barei întinse sau comprimate. De exemplu, deplasarea secţiunii BC a barei din Fig. 4.3. va fi:

$$u = \frac{N \cdot l'}{E \cdot A} \tag{4.6}$$

4.3. Probleme de rezistenţă la solicitarea de tracţiune - compresiune

Pentru a fi asigurată buna funcţionare a unui element de rezistenţă, trebuie ca acesta să îndeplinească condiţia de rezistenţă şi anume: tensiunea maximă produsă în elementul de rezistenţă trebuie să aibă o valoare inferioară tensiunii admisibile a materialului elementului de rezistenţă.

La solicitarea de tracţiune – compresiune, condiţia de rezistenţă se exprimă prin relaţia:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq \sigma_a \tag{4.7}$$

Relaţia (4.7), la limită, reprezintă o relaţie între trei mărimi, oricare dintre ele putând fi necunoscută. Cu ajutorul acestei formule se pot rezolva următoarele trei tipuri de probleme de rezistenţă:

a) Probleme de dimensionare

Se cunosc: forţa axială maximă care acţionează bara, determinată de pe diagrama forţelor axiale, N_{max} , şi tensiunea admisibilă a materialului din care este confecţionată bara σ_a.

Se determină aria necesară a secţiunii, A_{nec}, astfel încât tensiunea efectivă maximă produsă în bară sa nu depăşească valoarea tensiunii admisibile:

$$A_{nec} = \frac{N_{max}}{\sigma_a} \tag{4.8}$$

De exemplu, dacă se impune pentru bară o secţiune circulară, de diametru necunoscut d, diametrul necesar se va determina cu relaţia:

$$A_{nec} = \frac{N_{max}}{\sigma_a} = \frac{\pi \cdot d_{nec}^2}{4} \Rightarrow d_{nec} = \sqrt{\frac{4 \cdot N}{\pi \cdot \sigma_a}}$$

Diametrul efectiv al secţiunii circulare se va alege din standarde, mai mare decât diametrul necesar determinat, la valoarea cea mai apropiată de acesta.

b) Probleme de verificare

Se cunosc forţa axială maximă, N_{max} şi aria efectivă a secţiunii barei A_{ef}. Se calculează tensiunea efectivă maximă care se produce în bară. Valoarea tensiunii maxime efective trebuie să fie inferioară valorii tensiunii admisibile a materialului barei:

$$\sigma_{ef,max} = \frac{N_{max}}{A_{ef}} \le \sigma_a \tag{4.9}$$

c) Probleme de determinare a sarcinii capabile

Se determină sarcina capabilă sau admisibilă, N_{cap}, pe care o poate suporta bara cu secţiunea de arie efectivă cunoscută A_{ef}, astfel încât să nu se depăşească valoarea tensiunii admisibile a materialului barei σ_a:

$$N_{cap} = A_{ef} \cdot \sigma_a \tag{4.10}$$

Există situaţii în practică în care, pe lângă condiţia de rezistenţă, se impun pentru elementul de rezistenţă şi anumite condiţii de deformabilitate. În cazul solicitării de tracţiune – compresiune, dacă s-ar impune o valoare admisibilă pentru deformaţia Δl sau pentru deformaţia specifică ε, bara s-ar putea dimensiona pe baza unei condiţii de rigiditate:

$$\Delta l \le (\Delta l)_a \text{ sau } \varepsilon \le \varepsilon_a$$

Din relaţia (4.4) se poate determina, din condiţia de rigiditate, aria necesară a secţiunii:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \Rightarrow A_{nec} = \frac{N \cdot l}{E \cdot (\Delta l)_a} \tag{4.11}$$

Determinarea deformaţiei Δl cu relaţia (4.4) şi compararea acesteia cu valoarea admisibilă $(\Delta l)_a$ reprezintă, de asemenea, un calcul de verificare.

4.4. Probleme static nedeterminate la tracţiune - compresiune

O problemă static nedeterminată este o problemă cu mai multe necunoscute decât numărul ecuaţiilor de echilibru static ale mecanicii teoretice. Gradul de nedeterminare al unei probleme static nedeterminate este egal cu diferenţa dintre numărul necunoscutelor şi numărul ecuaţiilor de echilibru static.

Pentru a rezolva o astfel de problemă sunt necesare ecuaţii suplimentare, obţinute din condiţia de deformaţie pe care trebuie s-o satisfacă bara sau sistemul de bare. Rezolvarea problemelor static nedeterminate, pe baza consideraţiilor de deformaţii, implică cunoaşterea prealabilă a rigidităţilor EA. Alegând la întâmplare aceste rigidităţi se pot determina tensiunile normale, dar nu se pot realiza soluţii economice, care să ducă la atingerea tensiunii admisibile în toate elementele construcţiei.

a) Bara dublu articulată

Se consideră bara din Fig.4.4, de rigiditate EA, articulată la ambele capete şi încărcată cu o forţă în lungul axei longitudinale, aplicată în secţiunea 2. Se cer reacţiunile din articulaţiile reazemelor X_1 şi X_3.

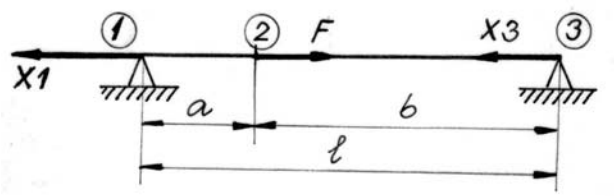

Fig.4.4

Singura ecuaţie de echilibru static care este utilă în rezolvarea acestei probleme este ecuaţia de proiecţii pe axa longitudinală a barei:

$$(\sum F)_x = 0 \Rightarrow X_1 + X_3 - F = 0 \qquad (1)$$

Această ecuaţie conţine două necunoscute. Pentru a determina o ecuaţie suplimentară trebuie stabilită condiţia de deformaţie. Se observă că tronsonul (1-2) al barei se întinde, iar tronsonul (2-3) se comprimă. Cum reazemele 1 şi 3 sunt fixe, lungirea totală a barei, egală cu suma algebrică a lungirilor celor două tronsoane, este nulă.

Forţele axiale de pe cele două tronsoane sunt:

$N_{12} = F$, pe tronsonul (1-2)

$N_{23} = X_1 - F = X_3$, pe tronsonul (2-3)

Ecuaţia de deformaţie este, deci:

$$\Delta l = \sum_i (\Delta l)_i = 0 \qquad (2)$$

Din ecuaţiile (1) şi (2) se pot determina cele două necunoscute X_1 şi X_3.

Din ecuaţia (2) rezultă:

$$(\Delta l)_{12} + (\Delta l)_{23} = 0 \Rightarrow \frac{N_{12} \cdot a}{E \cdot A} + \frac{N_{23} \cdot b}{E \cdot A} = 0 \Rightarrow X_1 \cdot a + (X_1 - F) \cdot b = 0 \Rightarrow$$

$$X_1 = F\frac{b}{a+b} = F\frac{b}{l}$$

Folosind şi ecuaţia de echilibru (1) se va obţine şi reacţiunea X_3. Deci, cele două reacţiuni vor fi:

$$X_1 = F\frac{b}{l}; \; X_3 = F\frac{a}{l}$$

Metoda este aplicabilă pentru orice număr de forţe axiale şi pentru cazul în care rigiditatea se schimbă pe diferite tronsoane ale barei.

b) Sistem de bare paralele

Se consideră bara rigidă OC din Fig.4.5, articulată în O, încărcată cu forţa F şi susţinută de doi tiranţi verticali de lungime l şi rigidităţi E_1A_1, respectiv E_2A_2. Se cer eforturile N_1 şi N_2 din cei doi tiranţi.

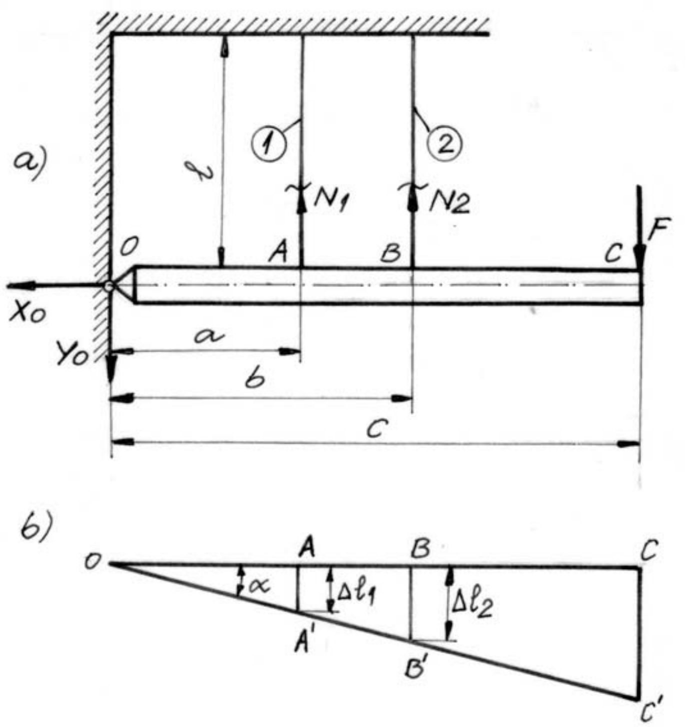

Fig.4.5

Componenta orizontală a reacţiunii din articulaţia O este nulă: $X_o = 0$.
Celelalte două ecuaţii de echilibru sunt:

$$(\sum F)_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 - Y_0 - F = 0 \quad (1)$$

$$(\sum M)_0 = 0 \Rightarrow a \cdot N_1 + b \cdot N_2 - c \cdot F = 0 \quad (2)$$

Problema are trei necunoscute: N_1, N_2 şi Y_o, deci trebuie precizată o condiţie de deformaţie pentru a obţine o ecuaţie suplimentară între cele trei mărimi necunoscute.

Bara rigidă OC nu suferă deformaţii, deci rămâne rectilinie când sistemul se deformează, ajungând în poziţia OC' (figura 4.5.b). Deplasarea punctului A (segmentul AA') reprezintă chiar lungirea tirantului 1: $(\Delta l)_1$, iar deplasarea punctului B (BB'), lungirea tirantului 2: $(\Delta l)_2$. Se observă asemănarea triunghiurilor OAA' şi OBB', din care se poate scrie relaţia (3):

$$\frac{(\Delta l)_1}{(\Delta l)_2} = \frac{a}{b} \quad (3)$$

Înlocuind lungirile celor doi tiranţi prin expresiile date de formula (4.4), ecuaţia (3) devine:

$$\frac{N_1 \cdot l}{E_1 \cdot A_1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{N_2 \cdot l}{E_2 \cdot A_2} \tag{3'}$$

S-au obţinut astfel trei ecuaţii care permit determinarea celor trei necunoscute.

c) Sistem de bare articulate concurente

Se consideră trei bare articulate ca în Fig.4.6, acţionate de forţa F, aplicată în articulaţia O.

Sistemul are simetrie geometrică şi mecanică, barele 1 şi 3 având rigiditatea E_1A_1, iar bara centrală 2, rigiditatea E_2A_2. Se cer eforturile axiale din cele 3 bare: N_1, N_2 şi N_3.

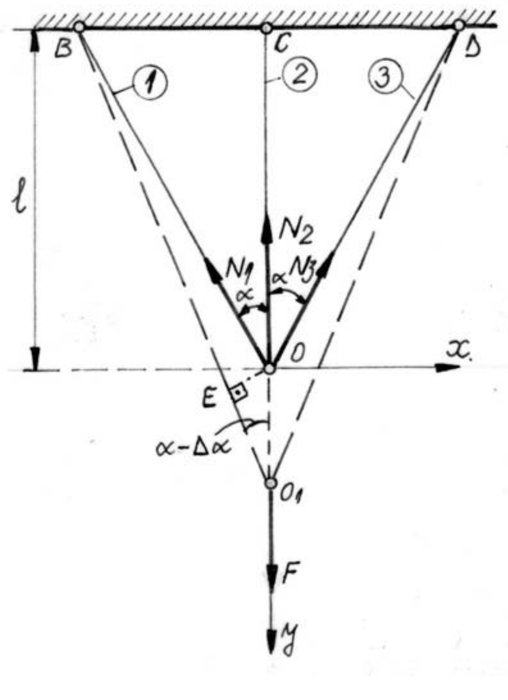

Fig.4.6

În nodul articulat O putem scrie două ecuaţii de echilibru static:

$$(\sum F)_x = 0 \Rightarrow N_1 \cdot \sin\alpha - N_3 \cdot \sin\alpha = 0 \Rightarrow N_1 = N_3 \tag{1}$$

$$(\sum F)_y = 0 \Rightarrow 2N_1 \cdot \cos\alpha + N_2 - F = 0 \tag{2}$$

Este necesară o a treia ecuaţie, stabilită din condiţia de deformaţie a sistemului de bare.

Condiţia de deformaţie rezultă din triunghiul OBO_1:

$$BO_1 = OO_1 \cdot \cos(\alpha - \Delta\alpha)$$

În această relaţie se observă că segmentul EO_1 este chiar lungirea barei 1: $(\Delta l)_1$, iar segmentul OO_1, lungirea barei 2: $(\Delta l)_2$. De asemenea, variaţia unghiului α, fiind foarte mică, se poate neglija ($\Delta\alpha \cong 0$). Astfel, se obţine a treia relaţie necesară pentru rezolvarea problemei:

$$(\Delta l)_1 = (\Delta l)_2 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} = \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{N_1 \cdot l}{E_1 \cdot A_1 \cdot \cos\alpha} = \frac{N_2 \cdot l}{E_2 \cdot A_2} \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{E_1 \cdot A_1}{E_2 \cdot A_2} \cdot \cos^2\alpha \qquad (3)$$

Rezolvând sistemul de ecuaţii (1), (2) şi (3) se vor obţine cele trei eforturi necunoscute:

$$N_1 = N_3 = F \cdot \frac{E_1 \cdot A_1 \cdot \cos^2\alpha}{2 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot \cos^3\alpha + E_2 \cdot A_2}$$

$$N_2 = F \cdot \frac{E_2 \cdot A_2}{2 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot \cos^3\alpha + E_2 \cdot A_2}$$

4.5.Aplicaţie

Pentru bara din Fig.4.7 se cunosc F = 12KN şi $\ell = 0{,}42\text{m}$. Bara este confecţionată din două materiale diferite, având ariile secţiunilor transversale A_1=6,4cm^2, respectiv A_2=5,6cm^2 şi modulele de elasticitate longitudinale $E_1 = 2{,}1 \cdot 10^5\, N/mm^2$, respectiv $E_2 = 1{,}3 \cdot 10^5\, N/mm^2$.

Se cer:

a. Diagrama forţelor axiale N
b. Verificarea barei, cunoscând tensiunile admisibile ale celor două materiale σ_{a1}=110N/mm^2, respectiv σ_{a2}=60N/mm^2.
c. Deplasarea secţiunii A.

a. Diagrama N se trasează pe baza funcţiei de efort N(x), plecând de la capatul liber spre încastrare:

Tronsonul AD: N(x) = 1,5 F
Tronsonul DH: N(x) = 1,5 F- 4F = -2,5F
Tronsonul HC: N(x) = 1,5 F- 4F + 5,5F = 3F

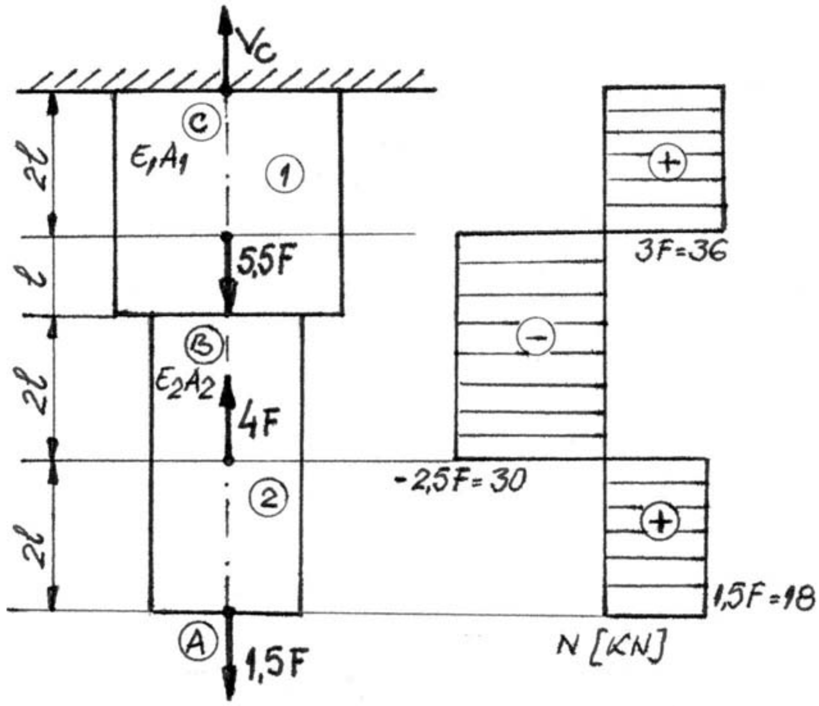

Fig.4.7

b. Verificarea barei:

$$\sigma_{1\max} = \frac{N_{1\max}}{A_1} = \frac{3F}{A_1} = \frac{3 \cdot 12 \cdot 10^3}{6{,}4 \cdot 10^2} = 56{,}25\,\mathrm{N/mm^2} \le \sigma_{a1}$$

$$\sigma_{2\max} = \frac{N_{21\max}}{A_2} = \frac{-2{,}5F}{A_2} = \frac{-2{,}5 \cdot 12 \cdot 10^3}{5{,}6 \cdot 10^2} = -53{,}57\,\mathrm{N/mm^2}; \left|\sigma_{2\max}\right| \le \sigma_{a2}$$

c. Deplasarea pe verticală a secţiunii A este egală cu deformaţia totală a barei, deci cu suma algebrică a deformaţiilor tronsoanelor:

$$v_A = (\Delta\ell)_{tot} = \sum_{i=1}^{4} \Delta\ell_i = \frac{1{,}5F \cdot 2\ell}{E_2A_2} + \frac{(-2{,}5F) \cdot 2\ell}{E_2A_2} + \frac{(-2{,}5F)\ell}{E_1A_1} + \frac{3F \cdot 2\ell}{E_1A_1} \Rightarrow$$

$$v_A = -0{,}72 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mm}$$