CAPITOLUL 3

TENSIUNI. DEFORMAŢII.

3.1.Tensiuni

Fie un corp solid solicitat de un sistem de forţe în echilibru, ca în Fig. 3.1.a.

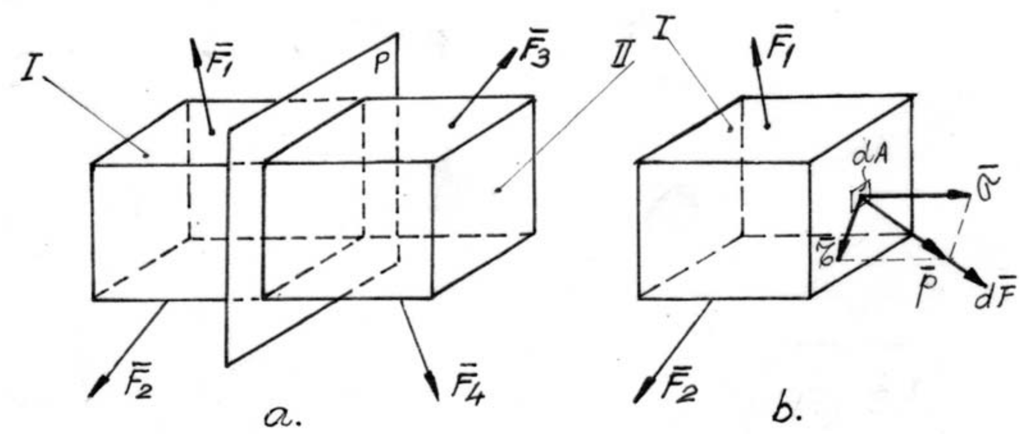

Fig.3.1

În orice secţiune a corpului solicitat apar forţe interioare care sunt distribuite pe toată suprafaţa secţiunii.

Se consideră un element de arie dA de pe suprafaţa secţiunii. Dacă elementul este suficient de mic efortul poate fi considerat uniform distribuit pe suprafaţa acestuia, iar rezultanta $d\bar{F}$ poate fi aplicată în centrul de greutate al elementului. Mărimea efortului distribuit, aplicat pe unitatea de suprafaţă din aria secţiunii se numeşte ***tensiune*** (efort unitar). Expresia tensiunii este dată de relaţia (3.1):

$$\bar{p} = \frac{d\bar{F}}{dA} \tag{3.1}$$

Tensiunea este una dintre mărimile fundamentale ale Rezistenţei Materialelor.

Tensiunea $\bar{p}$ are aceeaşi direcţie cu forţa elementară $d\bar{F}$. Mărimea sa este determinată atât de mărimea forţei elementare $d\bar{F}$, cât şi de orientarea acestei forţe în raport cu suprafaţa dA. În consecinţă, tensiunea este o mărime mai complicată decât forţa, numită mărime tensorială. Având o direcţie oarecare, tensiunea $\bar{p}$ se descompune în două componente:

- o componentă pe direcţia normalei la secţiune, numită ***tensiune normală***, notată σ,

- o componentă conţinută în planul secţiunii, numită ***tensiune tangenţială***, notată τ.

Tensiunea σ, după sensul pe care îl are, va avea un efect de întindere sau de compresiune, exercitat de către partea de corp înlăturată asupra celei rămase. Tensiunea τ are asupra secţiunii un efect de tăiere, forfecare sau alunecare.

În baza Figurii 3.1, între componentele tensiunii se poate scrie relaţia (3.2):

$$\bar{p} = \bar{\sigma} + \bar{\tau} \Rightarrow p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \tag{3.2}$$

Tensiunea se măsoară în N/mm^2, sau MegaPascal (MPa), unitate derivată din Pascal ($1Pa = 1N/m^2$).

3.2.Stări de tensiune

Fie un element de volum paralelipipedic infinit mic din corpul solid solicitat (Fig.3.2.a).

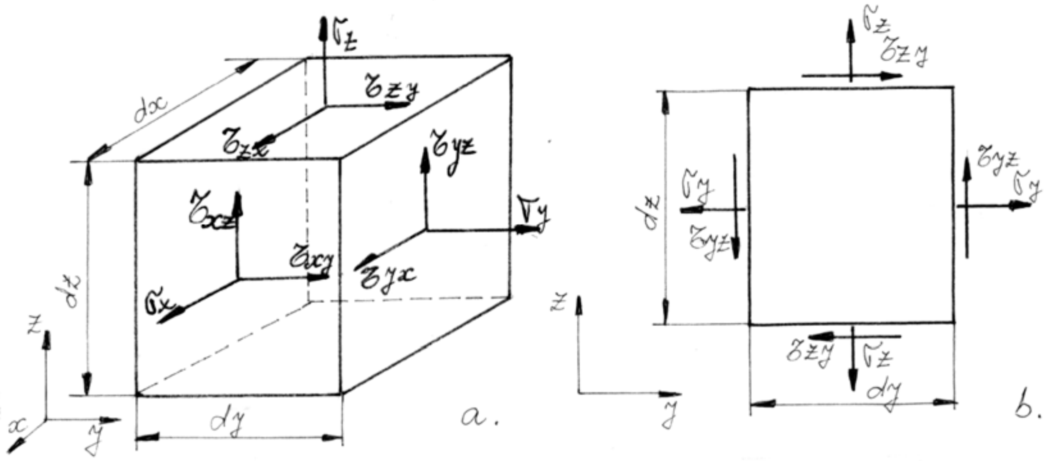

Fig.3.2

Starea de tensiune dintr-un punct al elementului de rezistenţă solicitat se cunoaşte dacă se cunosc tensiunile care apar pe feţele elementului de volum din acel punct, adică:

- tensiunile normale σ_x, σ_y, σ_z, indicele reprezentând axa perpendiculară pe faţa respectivă a elementului de volum;

- tensiunile tangenţiale, care se descompun în două componente după direcţiile axelor paralele cu faţa respectivă. Aceste tensiuni se notează cu doi indici. De exemplu, τ_{xy} reprezintă tensiunea tangenţială de pe faţa elementului de volum perpendiculară pe axa 0x (primul indice), orientată în direcţia axei 0y (al doilea indice).

O faţă a elementului de volum se consideră pozitivă dacă tensiunea normală la faţa respectivă are acelaşi sens cu axa sistemului de coordonate perpendiculară pe acea faţă. In Fig.3.2.a. s-au indicat tensiunile pozitive de pe feţele pozitive ale elementului de volum.

Se poate uşor demonstra, cu ajutorul ecuaţiilor de echilibru pentru elementul de volum că tensiunile tangenţiale verifică următoarele egalităţi:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}\,,\ \tau_{yz} = \tau_{zy}\,,\ \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

Aceste relaţii definesc ***principiul dualităţii tensiunilor tangenţiale***.

Deci, starea de tensiune dintr-un punct al unui corp solid solicitat este caracterizată prin 3 tensiuni normale şi 6 tensiuni tangenţiale, două câte două egale, conform principiului dualităţii tensiunilor tangenţiale. Aceste 9 tensiuni reprezintă componentele tensorului tensiunilor:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

În funcţie de forma tensorului tensiunilor, starea de tensiune poate fi:

a) Stare spaţială (triaxială) de tensiune, având tensorul tensiunilor dat de expresia generală (3.3), reprezentată în Fig.3.2.a.

b) Stare plană (biaxială) de tensiune, reprezentată în Fig.3.2.b, având tensorul tensiunilor:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

De exemplu, o placă plană solicitată de forţe coplanare în planul de simetrie al plăcii se află în stare plană de tensiune.

c) Stare monoaxială de tensiune, cu tensorul tensiunilor:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De exemplu, o bară dreaptă solicitată de forţe coliniare cu axa longitudinală a barei (Gx).

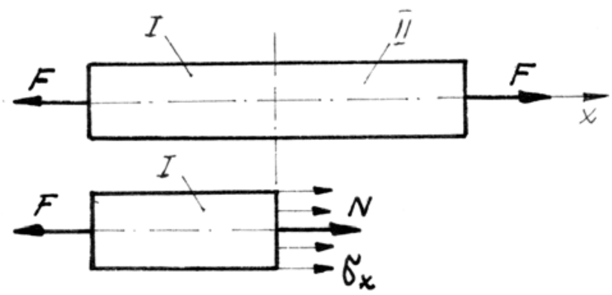

Fig.3.3

Pentru bara dreaptă din Fig.3.3. solicitată la întindere de forţa F, în orice secţiune transversală apare doar efortul axial N = F. Astfel, tensiunea normală pe secţiune va fi dată de relaţia (3.4):

$$\sigma_x = \sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} \tag{3.4}$$

<u>3.3. Deformaţii specifice</u>

Rezistenţa Materialelor studiază corpurile ţinând seama de faptul că acestea se deformează sub acţiunea sarcinilor exterioare sau a unor factori cu efect analog (de exemplu variaţiile de temperatură). Deformaţiile depind de forma şi dimensiunile corpului, de mărimea şi modul de aplicare a sarcinilor, precum şi de anumite caracteristici mecanice ale materialelor corpurilor. Atâta timp cât tensiunile produse în material sunt inferioare unei anumite valori, numită *limită de elasticitate*, deformaţiile sunt mici şi elastice, dispărând o dată cu cauza care le-a produs.

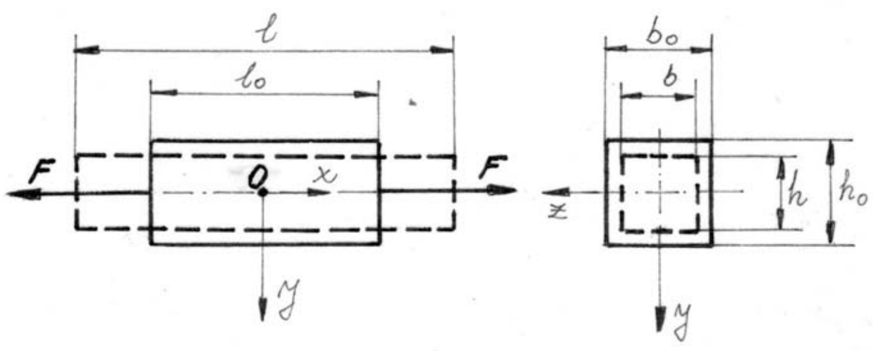

Fig.3.4

a) *<u>Deformaţia specifică liniară</u>*

În Fig.3.4. s-a reprezentat o bară dreaptă, de dimensiuni iniţiale l_0, b_0, h_0, supusă la întindere prin aplicarea forţei F. Bara se lungeşte, ajungând la lungimea l. Raportul dintre deformaţia Δl a barei şi lungimea ei iniţială l_0 se numeşte ***deformaţie*** *(lungire)* ***specifică liniară*** şi se notează cu ε_x. Indicele x reprezintă direcţia după care are loc deformaţia:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \tag{3.5}$$

În cazul solicitării de compresiune, mărimile Δl şi ε_x sunt negative şi se numesc scurtare, respectiv scurtare specifică.

Deformaţiile specifice liniare sunt mărimi adimensionale care uneori se exprimă procentual:

$$\varepsilon_x (\%) = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot 100 = \frac{l - l_0}{l_0} \cdot 100 \tag{3.6}$$

Concomitent cu deformaţia axială a barei (după direcţia longitudinală 0x), apar şi deformaţii în direcţii transversale (0y,0z). Experienţele arată că între deformaţiile specifice transversale ε_y, ε_z şi deformaţia specifică longitudinală ε_x există o relaţie liniară de forma (3.7):

$$\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x, \quad \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x, \text{ unde:}$$

$$\varepsilon_x = \frac{l - l_0}{l_0}, \varepsilon_y = \frac{h - h_0}{h_0}, \varepsilon_z = \frac{b - b_0}{b_0} \tag{3.7}$$

În relaţiile (3.7) ν este o constantă de material pozitivă subunitară, numită coeficient de contracţie transversală, sau coeficientul lui Poisson; pentru materialele metalice se consideră în medie $\nu = 0{,}3$.

b) *Deformaţia specifică unghiulară (lunecarea specifică)*

Se consideră elementul de volum paralelipipedic $ABCDA_1B_1C_1D_1$ din Fig.3.5. Pe cele patru feţe perpendiculare pe planul xA_1y, de lăţime unitară, acţionează tensiunile tangenţiale τ_{xy}, τ_{yx} egale, având sensurile de pe desen. Dacă se consideră imobilă faţa ADA_1D_1, datorită tensiunilor tangenţiale faţa BCB_1C_1 va *luneca*, paralel cu ea însăşi, ajungând în poziţia $B'C'B'_1C'_1$.

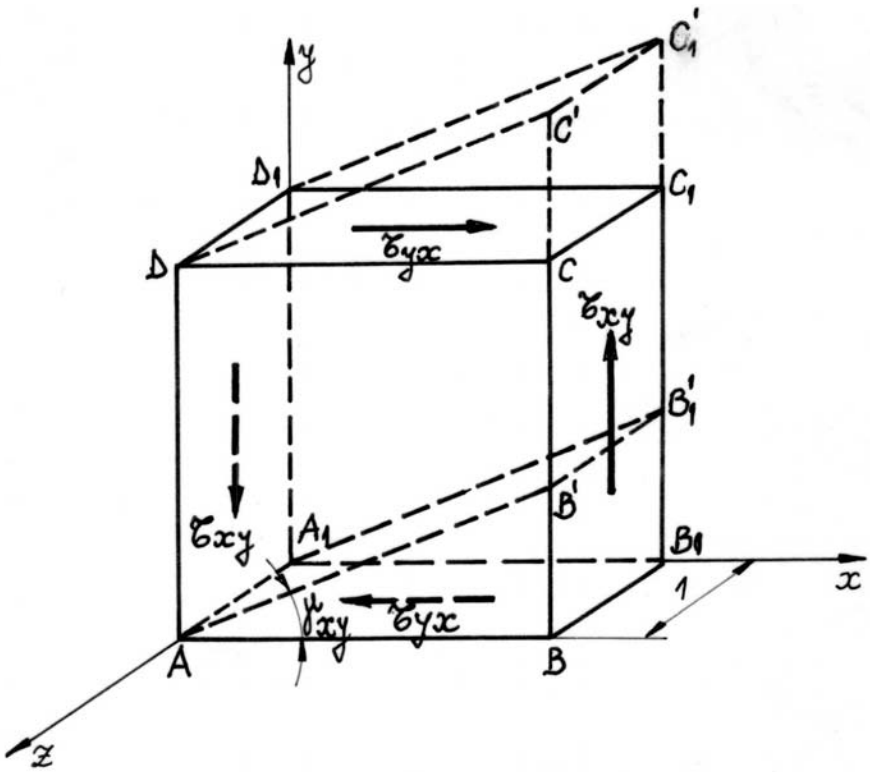

Fig.3.5

Lunecarea poate fi măsurată prin unghiul γ_{xy}, dintre feţele ABA_1B_1 şi $AB'A_1B'_1$. Acest unghi, care măsoară variaţia unghiului drept iniţial, ca în figură, poartă numele de ***lunecare specifică*** sau ***deformaţie specifică unghiulară***. Lunecarea specifică este pozitivă dacă unghiul de 90° se micşorează şi negativă în caz contrar. Lunecarea specifică se măsoară în radiani.

În cazul general, al stării triaxiale de tensiune, starea de deformaţie se caracterizează prin 3 deformaţii specifice liniare: ε_x, ε_y, ε_z şi 6 deformaţii specifice unghiulare, egale două câte două, ca urmare a principiului dualităţii tensiunilor tangenţiale: $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$, $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$. Aceste deformaţii specifice definesc aşanumitul tensor al deformaţiilor:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0{,}5\gamma_{xy} & 0{,}5\gamma_{xz} \\ 0{,}5\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0{,}5\gamma_{yz} \\ 0{,}5\gamma_{zx} & 0{,}5\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

3.4. Legea lui Hooke

Una dintre ipotezele de bază ale Rezistenţei Materialelor este ipoteza proporţionalităţii dintre forţe şi deformaţii, această ipoteză fiind verificată practic în special la metale dacă forţele, respectiv deformaţiile nu depăşesc anumite limite.

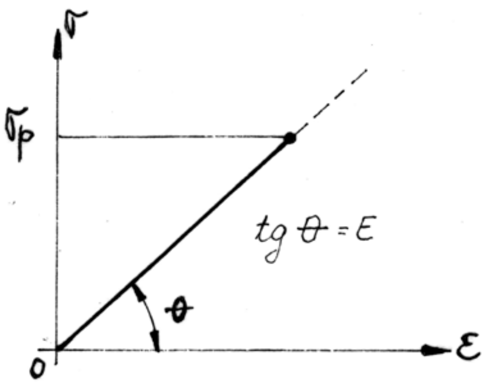

Fig.3.6

Reprezentarea variaţiei tensiunii normale σ în funcţie de deformaţia specifică ε pe parcursul încercării la tracţiune a unui anumit material defineşte curba caracteristică a materialului respectiv.

În cazul tracţiunii unei bare drepte dintr-un anumit material deformaţia specifică creşte liniar cu forţa aplicată, respectiv cu tensiunea normală σ, dacă aceasta nu depăşeşte o anumită valoare critică numită ***limita de proporţionalitate σ_p*** a materialului respectiv. Din Fig.3.6. va rezulta:

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow \sigma = \mathrm{tg}\theta \cdot \varepsilon$$

Se defineşte *modulul de elasticitate longitudinal E (modulul lui Young)* ca fiind coeficientul unghiular al dreptei σ-ε, deci E = tgθ. Astfel, legea lui Hooke va fi exprimată prin relaţia (3.9):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{3.9}$$

Deformaţia specifică ε fiind o mărime adimensională, rezultă că unitatea de măsură a modulului de elasticitate longitudinal este N/mm^2.

În cazul solicitării de forfecare, legea lui Hooke, între tensiunea tangenţială τ şi deformaţia specifică unghiulară γ, are forma:

$$\tau = G \cdot \gamma \tag{3.10}$$

În relaţia (3.10) G se numeşte *modul de elasticitate transversal*.

Între modulul de elasticitate longitudinal E, modulul de elasticitate transversal G şi coeficientul de contracţie transversală ν se poate stabili următoarea relaţie de legătură:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3.11}$$

E, G şi ν sunt constante de material, determinate experimental pentru fiecare material în parte. Pentru oţeluri aceste constante se situează în jurul valorilor: $\nu = 0,3$; $E = 2,1\cdot10^5$ N/mm^2; $G = 8\cdot10^4$ N/mm^2.

3.5. Încercarea la tracţiune a materialelor. Proprietăţile mecanice ale materialelor

Pentru stabilirea relaţiei fizice dintre tensiuni şi deformaţii se recurge la încercări experimentale. Încercarea de bază la materialele metalice este încercarea la tracţiune. Aceasta constă în solicitarea la tracţiune a unei piese cu dimensiuni standard din materialul studiat, numită epruvetă, cu o forţă variabilă lent urmărindu-se deformaţia epruvetei până la ruperea ei completă. Pe baza acestei încercări se poate trasa curba caracteristică a materialului studiat, σ-ε, iar cu ajutorul acesteia se pot trage concluzii în legătură cu comportarea materialului supus încercării şi se pot defini mărimile caracteristice ale materialului studiat.

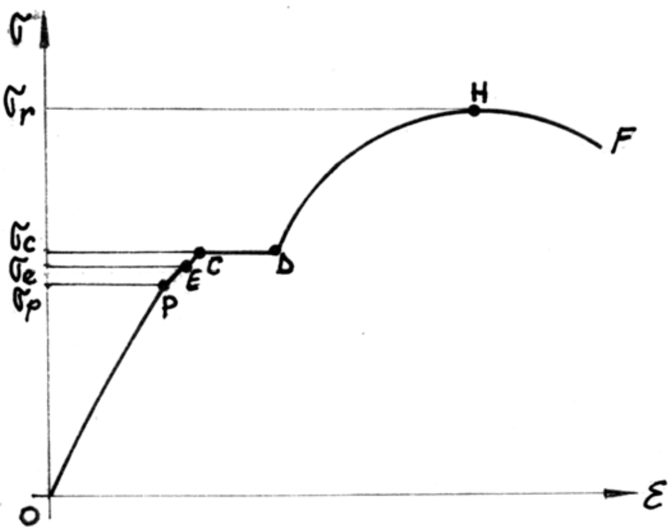

Fig.3.7

În Fig.3.7. s-a reprezentat curba caracteristică pentru un oţel moale, cu ajutorul căreia se pot defini o serie de mărimi caracteristice importante:

1) Ordonata punctului P, până unde curba caracteristică este o dreaptă se numeşte *limita de proporţionalitate* a materialului, σ_p. Porţiunea OP este zona de proporţionalitate a curbei caracteristice, adică zona de valabilitate a legii lui Hooke.

2) Ordonata punctului E, până unde materialul este perfect elastic, adică după descărcare îşi reia forma şi dimensiunile iniţiale, se numeşte *limita de elasticitate* a materialului, σ_e.

3) *Limita de curgere*, σ_c, este valoarea tensiunii la care deformaţia epruvetei creşte pentru prima dată când sarcina se menţine constantă. După atingerea limitei de curgere curba caracteristică are un traseu orizontal, uneori sinuos, CD numindu-se *palier de curgere*. Pe acest palier apar deformaţii permanente, plastice. După descărcare se constată că epruveta nu-şi mai reia forma şi dimensiunile iniţiale, ci rămâne cu aşanumite deformaţii permanente.

4) După depăşirea palierului de curgere curba caracteristică are din nou un traseu ascendent, DH, care defineşte *zona de întărire*. Ordonata punctului H, care defineşte valoarea maximă a tensiunii pe parcursul încercării se numeşte *rezistenţa la rupere* a materialului, σ_r.

5) Când tensiunea se apropie de valoarea maximă, într-un loc al epruvetei apare o gâtuire care se dezvoltă din ce în ce mai mult, până când se produce ruperea completă prin separare a materialului. După apariţia gâtuirii forţa aplicată epruvetei scade, ceea ce duce la traseul descendent HF al curbei din Fig.3.7.

3.6. Proprietăţile mecanice ale materialelor

În Rezistenţa Materialelor sunt deosebit de importante proprietăţile mecanice ale materialelor din care sunt confecţionate elementele de rezistenţă. Aceste proprietăţi mecanice permit o clasificare a materialelor după diferite criterii.

1) După comportarea materialelor în urma îndepărtării sarcinilor, materialele se clasifică în:

Materiale elastice sunt acele materiale la care deformaţiile dispar o dată cu sarcinile care le-au produs. Se defineşte elasticitatea ca proprietatea materialelor de a se deforma sub acţiunea sarcinilor exterioare şi de a-şi relua forma şi dimensiunile iniţiale când sarcinile se anulează.

Materiale plastice sunt acelea care se deformează fără a mai reveni la forma şi dimensiunile iniţiale după îndepărtarea sarcinii.

Materiale elasto-plastice sunt materiale care se deformează parţial elastic, parţial plastic. Pe măsura creşterii tensiunii, deformaţiile plastice cresc în dauna celor elastice. Majoritatea materialelor folosite în aplicaţiile tehnice inginereşti sunt materiale elasto-plastice.

2) După mărimea deformaţiilor produse înainte de rupere materialele pot fi:

Materiale ductile sunt materiale care suferă deformaţii plastice mari înainte de rupere (cuprul, alama, aluminiul, oţelurile de rezistenţă mică, etc.).

Materiale fragile (casante) sunt materialele care se deformează foarte puţin înainte de a se rupe (fonta, sticla, oţelurile de mare rezistenţă, etc.).

3) După valorile constantelor elastice E, G, ν, măsurate pe diferite direcţii materialele pot fi:

Materiale izotrope, care au aceeaşi valoare a constantelor elastice pe toate direcţiile (oţelurile, sticla, cauciucul, etc.).

Materiale anizotrope, care sunt materiale stratificate şi se comportă elastic diferit pe direcţii diferite (lemnul, rocile sedimentare, etc.).

În majoritatea aplicaţiilor din Rezistenţa Materialelor se utilizează materiale izotrope, de care se ocupă teoria clasică a elasticităţii.

3.7. Tensiuni admisibile. Coeficienţi de siguranţă.

Cunoscând curba caracteristică a materialului unui element de rezistenţă se pune întrebarea: până la ce valoare a tensiunii poate fi solicitat elementul de rezistenţă, astfel încât acesta să nu cedeze, deci să fie asigurată condiţia de bună funcţionare?

În baza rezultatelor practice se stabilesc valori maxime admisibile pentru tensiuni, numite ***tensiuni admisibile***. Acestea se notează σ_a , τ_a .

Tensiunea admisibilă a unui material se defineşte în funcţie de una dintre valorile particulare de pe curba caracteristică a materialului respectiv. Astfel, pentru materialele ductile, la care se constată o limită de curgere, tensiunea admisibilă este:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_c}{c_c} \tag{3.12}$$

Pentru materialele fragile, tensiunea admisibilă se ia în funcţie de rezistenţa la rupere:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_r}{c_r} \tag{3.13}$$

Coeficienţii c_c , c_r sunt supraunitari şi se numesc *coeficienţi de siguranţă*. Valorile lor, ca şi ale rezistenţelor admisibile se aleg în funcţie de mai mulţi factori: natura materialului, tratamentele termice aplicate materialului, durata de folosire a piesei, modul de acţionare a sarcinilor în timp, felul solicitării, temperatura de funcţionare, etc.

În calculele de Rezistenţa Materialelor, la dimensionare, proiectantul consideră tensiunea admisibilă a materialului piesei ca o constantă cunoscută, cu ajutorul căreia determină dimensiunile piesei, astfel încât tensiunea efectivă maximă produsă în piesă să fie egală, la limită, cu tensiunea admisibilă a materialului $\sigma_{max} = \sigma_a$
În calculul de verificare, tensiunea efectivă maximă produsă în piesă în timpul funcţionării trebuie să fie inferioară sau cel mult egală cu tensiunea admisibilă a materialului piesei: $\sigma_{max} \le \sigma_a$.