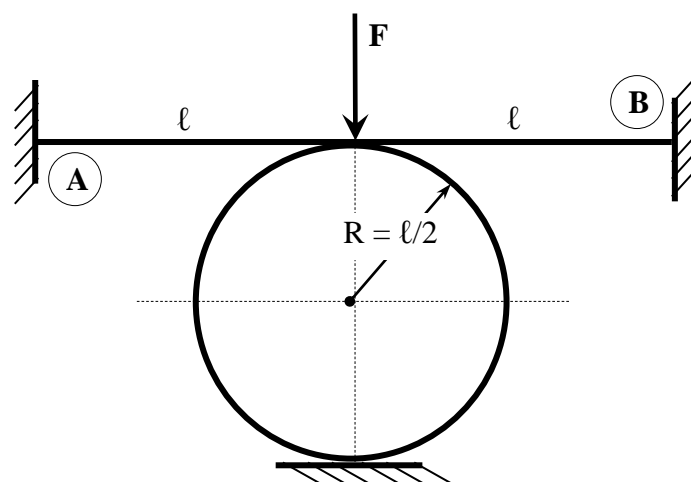


**CULEGERE DE PROBLEME
PENTRU CONCURSUL NAȚIONAL
C.C. TEODORESCU**

Faza Locală



Cuvânt înainte

Lucrarea de față a fost redactată cu scopul de a ajuta studenții care vor să participe la Concursul Profesional Studențesc de Rezistența Materialelor "C.C. Teodorescu". Eveniment de tradiție îndelungată, această competiție a rămas printre puținele concursuri studențești ce se desfășoară anual încă din 1972.

Pe parcursul lucrării sunt prezentate problemele date la faza locală a concursului între anii 1988 – 2016, precum și rezolvarea acestora. Cele mai multe dintre problemele redactate în această carte au un grad de dificultate mediu spre ridicat, în comparație cu cele întâlnite în mod uzual în culegeri sau la examenele de Rezistența Materialelor.

Culegerea vine în sprijinul studenților în vederea înțelegerii și dezvoltării lor în ceea ce privește dobândirea de cunoștințe la această disciplină de cultură tehnică generală atât de importantă.

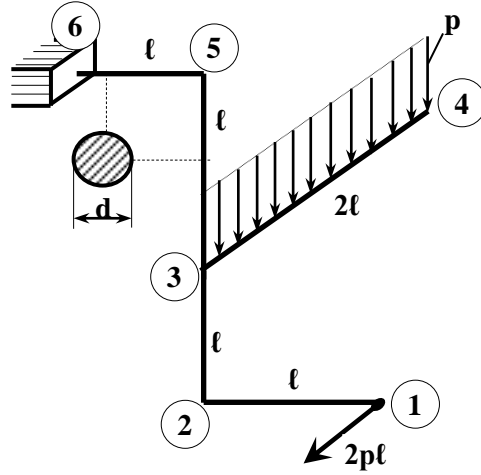
Ne exprimăm convingerea că lucrarea de față, prin aplicațiile sale și prin soluțiile propuse, va stimula interesul și preocuparea studenților pentru găsirea unor rezolvări ingenioase ale problemelor mai dificile din Rezistența Materialelor.

Autorii

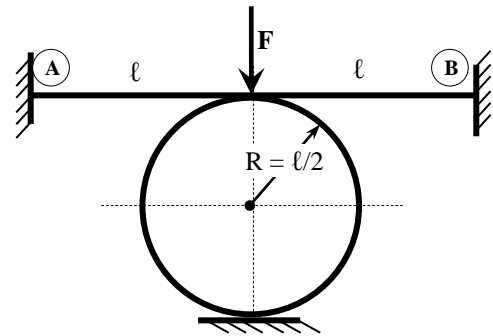
1988 – BARAJ

I) Bara de secțiune circulară constantă, cu diametrul $d = 60$ mm, este sollicitată ca în figură. Se cunosc: $l = 0,5$ m și $\sigma_a = 100$ MPa. Se cer:

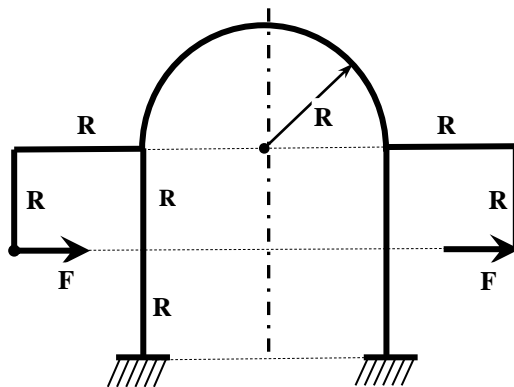
- a) Diagramele de eforturi: (N), (M_i) și (M_t)
- b) Sarcina capabilă: $p_{cap} = ?$



II) Pentru sistemul compus din elemente cu rigiditate constantă, ($EI = ct$), se cere să se calculeze deplasarea pe verticală a punctului de aplicație al forței F.

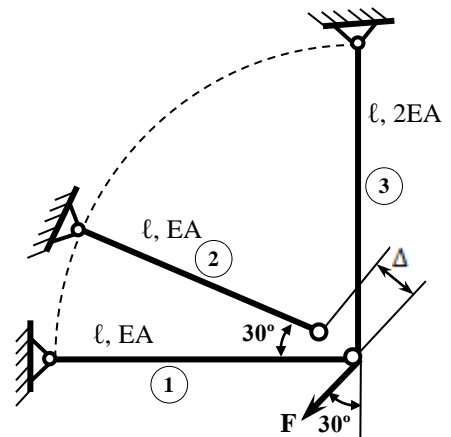


III) Pentru sistemul de rigiditate constantă ($EI = ct$), din figură se cere să se traseze diagramele de eforturi (N) și (M_i).



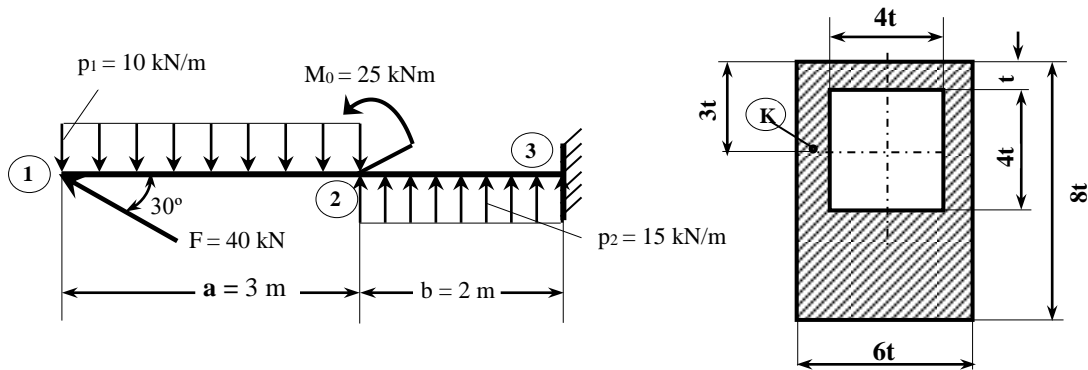
IV) Pentru sistemul compus din trei bare articulate, de aceeași lungime: $l = 1,2$ m, se cunosc: $A = 80$ mm²; $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa și $\sigma_a = 150$ MPa. Bara (2) este mai scurtă cu $\Delta = 0,4$ mm.

Să se determine forța maximă admisă după montarea forțată: $F_{cap} = ?$



1989

- I) Pentru grinda din oțel cu $\sigma_a = 150$ MPa, se cer:
- Diagramele de eforturi;
 - Dimensionarea secțiunii: $t_{nec} = ?$
 - Calculul tensiunilor normale și tangențiale, din punctul (K) al secțiunii (2) stânga.

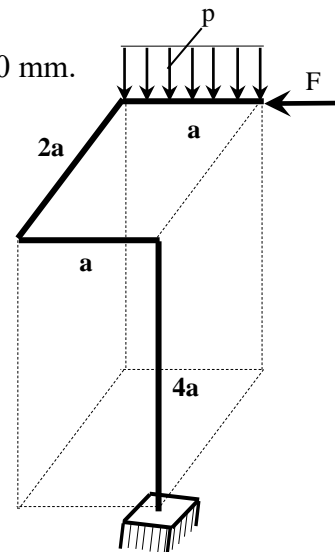


- II) Bara cotită spațială are secțiune circulară constantă.

Se cunosc: $\sigma_{a-III} = 100$ MPa; $p = 20$ kN/m; $F = 12$ kN și $a = 200$ mm.

Se cer:

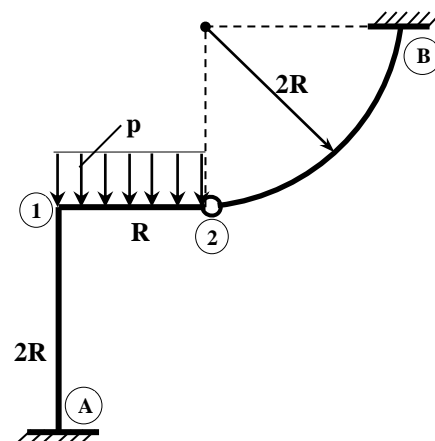
- Diagramele de eforturi: (N), (M_i) și (M_t);
- Să se dimensioneze secțiunea barei: $d_{nec} = ?$



- III) Sistemul articulată are rigiditate constantă, ($EI = \text{const.}$).

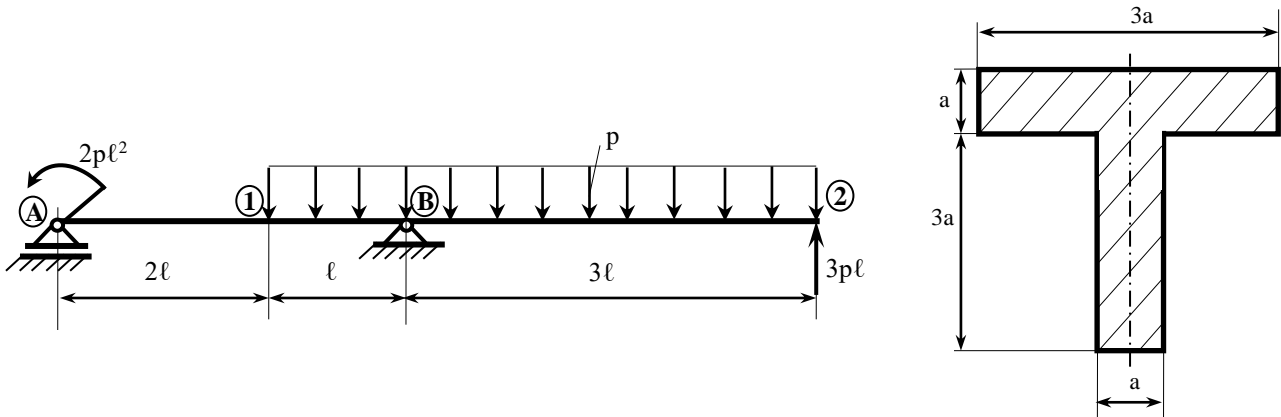
Se cer:

- Ridicarea nedeterminării;
- Diagramele (N), (M_i);
- Deplasarea articulației (2) pe verticală.

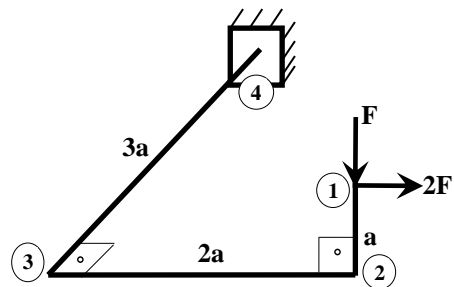


1990

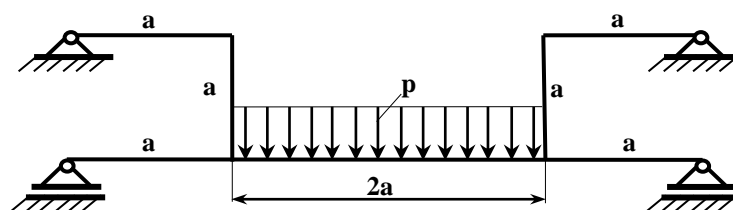
- I) Fie grinda de fontă din figură. Se cer:
- Diagramele de eforturi;
 - Sarcina capabilă $p = ?$; pentru $\sigma_{at} = 40 \text{ MPa}$ și $|\sigma_{ac}| = 120 \text{ MPa}$.
Se dau: $\ell = 1 \text{ m}$; $a = 50 \text{ mm}$.



- II) Pentru bara cotică din oțel, din figură, se cer:
- Diagramele (M_i) , (M_t) ;
 - Diametrul secțiunii barei pentru $\sigma_a = 150 \text{ MPa}$.
Se va utiliza teoria a III-a de rezistență.
Se dă: $F = 25 \text{ kN}$; $a = 200 \text{ mm}$.

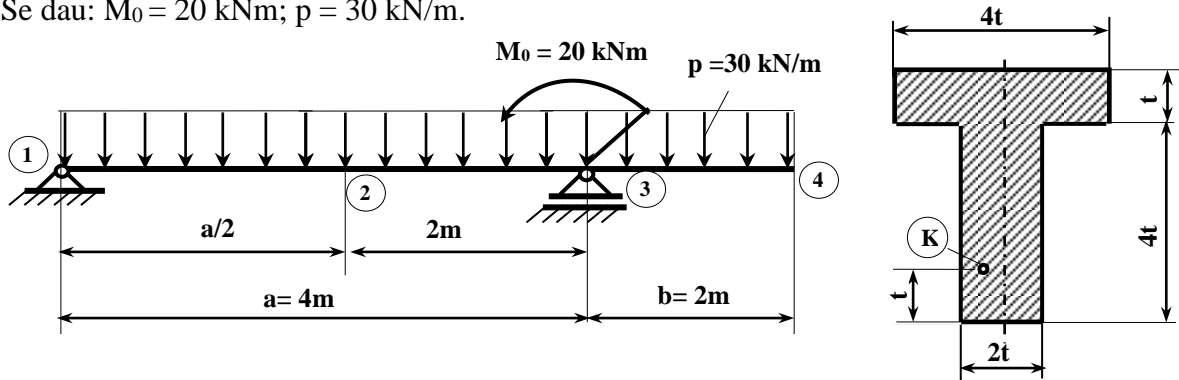


- III) Pentru cadrul din figură se cer:
- Ridicarea nedeterminării statice;
 - Diagrama momentului încovoietor.



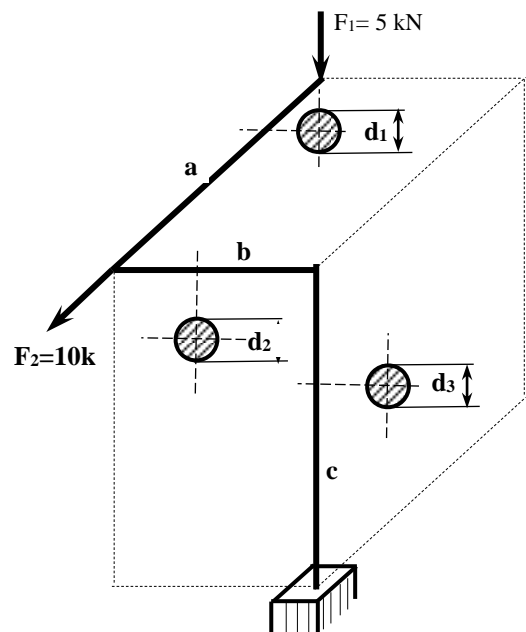
1992

- I) Pentru grinda din figură, se cer:
- Diagramele de eforturi;
 - $t_{nec} = ?$, pentru $\sigma_{at} = 30 \text{ MPa}$ și $\sigma_{ac} = 90 \text{ MPa}$;
 - Așezarea economică a profilului;
 - Valorile tensiunilor principale și ale direcțiilor principale din punctul K al secțiunii (2).
- Se dau: $M_0 = 20 \text{ kNm}$; $p = 30 \text{ kN/m}$.

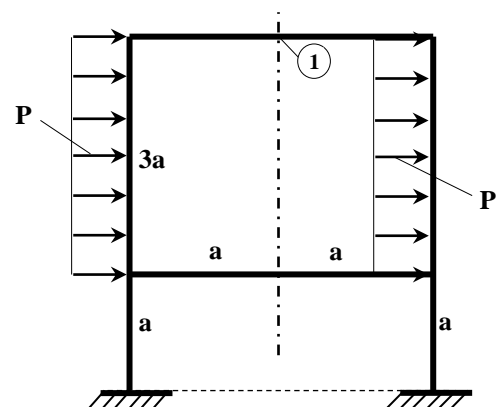


- II) Pentru bara spațială din figură se cer:
- Diagramele de eforturi: (N), (T), (M_i) și (M_i);
 - Să se dimensioneze bara, (d_{1nec} , d_{2nec} , d_{3nec}),
- dacă $\sigma_a = 100 \text{ MPa}$.

Se va folosi teoria a III-a de rezistență.
Se dau: $a = 1 \text{ m}$; $b = 0,5 \text{ m}$ și $c = 1,5 \text{ m}$.

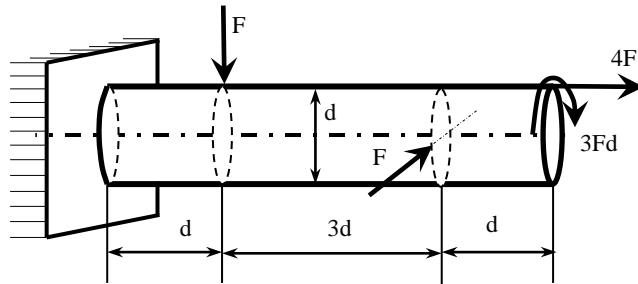


- III) Pentru sistemul cu rigiditatea constantă și încărcarea din figură se cer:
- Diagramele de eforturi;
 - Deplasarea pe verticală a secțiunii (1).



1993

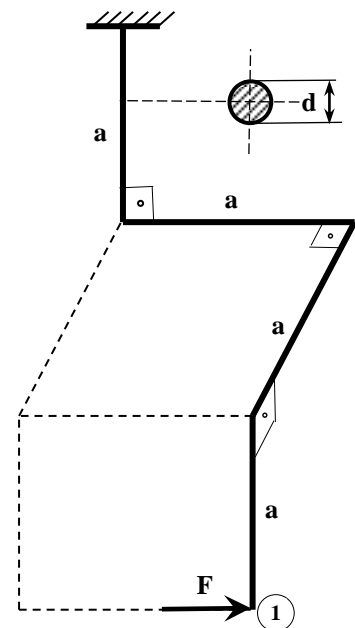
- I) Bara de secțiune circular cu $d = 40$ mm este realizată din oțel cu $\sigma_a = 100$ MPa.
Se cer:
- Să se traseze diagramele de eforturi;
 - Să se calculeze forța maxim admisă, ($F_{cap} = ?$), (teoria a V-a).



- II) Pentru bara spațială din figură se cunosc: $F = 1000$ N; $d = 40$ mm;
 $a = 0,5$ m; $G = 0,4 \cdot E$; $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa.

Se cer:

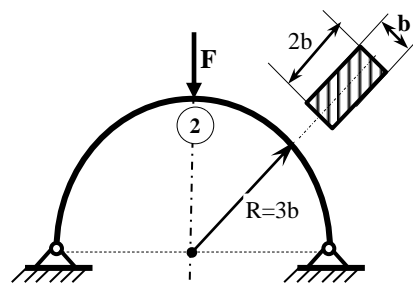
- Deplasarea secțiunii (1) pe direcția forței F ; $\delta_{(1),H} = ?$
 - Deplasarea pe vertical a secțiunii (1): $\delta_{(1),V} = ?$
- Obs.: Se neglijează efectul forțelor N și T .



- III) Pentru bara din figură se cunosc: $F = 500$ N și $b = 20$ mm.

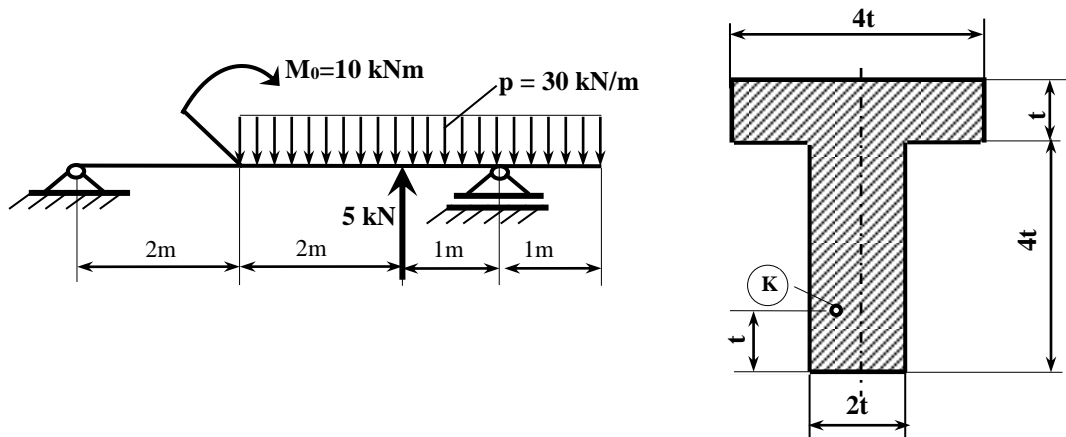
Se cer:

- Ridicarea nedeterminării;
- Diagramele de eforturi: (N), (T) și (M_i);
- Tensiunea normal maximă: $\sigma_{max} = ?$
- Deplasarea secțiunii (2): $\delta_2 = ?$, ($EI = ct.$).

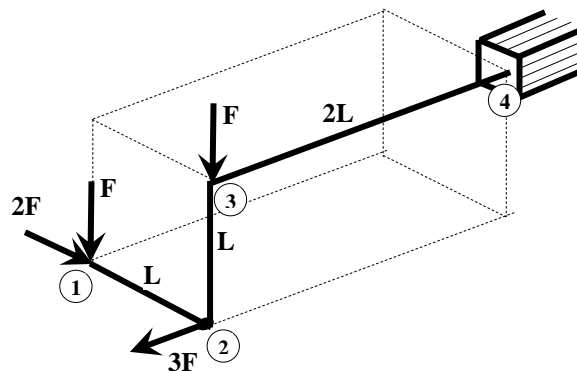


1994

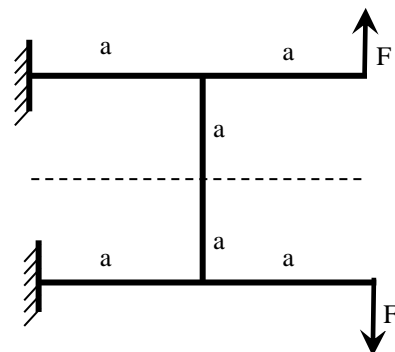
- I) Pentru grinda din figură se cer:
- Diagramele de eforturi: (T), (M_i);
 - Așezarea optimă pentru $\sigma_{at} < \sigma_{ac}$;
 - Pentru poziția secțiunii indicate, să se dimensioneze grinda, ($t_{nec} = ?$), cunoscând $\sigma_{at} = 30 \text{ MPa}$ și $\sigma_{ac} = 90 \text{ MPa}$;
 - Să se calculeze tensiunea τ_k în secțiunea în care se obține σ_{max} .



- II) Cadrul spațial are secțiune circulară constantă. Se cunosc: $F = 10 \text{ kN}$; $L = 0,5 \text{ m}$.
Se cer:
- Diagramele de eforturi: (N), (M_i), (M_t), (literal);
 - Să se dimensioneze secțiunea barei, $d_{nec} = ?$, neglijând influența forțelor axiale, ($N=0$), dacă $\sigma_a = 120 \text{ MPa}$;
 - Să se calculeze deplasarea secțiunii (2) pe direcția forței $3F$.



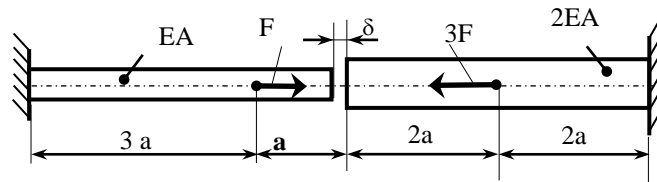
- III) Pentru cadrul de rigiditate constantă, $EI = \text{constant}$, se cere trasarea diagramei momentului încovoietor: (M_i).



Locala 1995

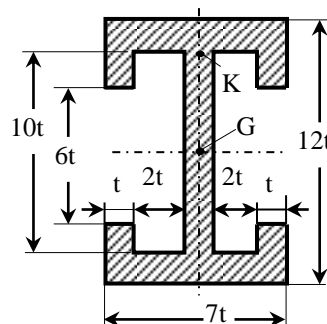
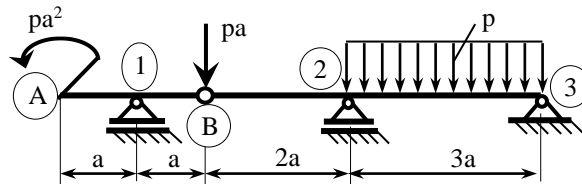
I) Pentru sistemul de bare din figură, solicitat axial de forțele $3F$ și F , având jocul de montaj $\delta = 0,4$ mm, se cer:

- Valoarea forței F pentru anularea jocului δ sub acțiunea celor două forțe;
 - Diagrama forțelor axiale N dacă valoarea forței F , calculată la punctul 1, se dublează;
 - Tensiunea maximă din sistemul corespunzător cazului 2 de încărcare.
- Se cunosc: $A = 300$ mm²; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa(N/mm²); $a = 0,4$ m.



II) Pentru grinda dreaptă din figură, având o articulație interioară în punctul (B) și secțiunea dată, se cer:

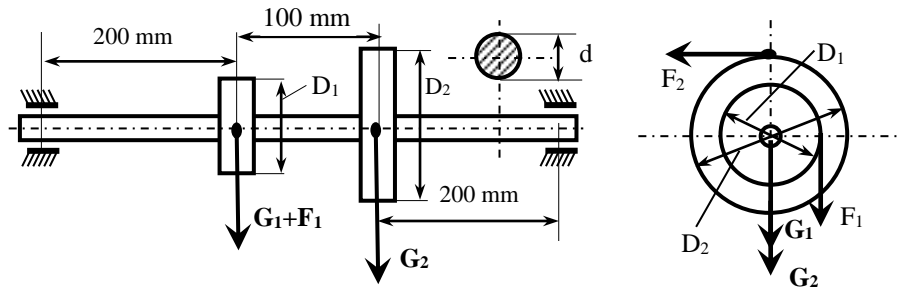
- diagramele de eforturi (T) și (M_i)
- momentul de inerție față de axa centrală orizontală
- să se dimensioneze cota t dacă se cunosc: $p = 12$ kN/m, $\sigma_a = 150$ MPa, $a = 0,8$ m
- tensiunile $\sigma_{K,max}$, $\tau_{G,max}$ și $\tau_{K,max}$



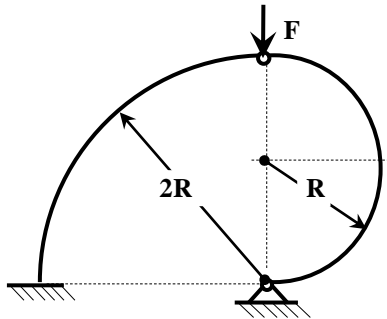
III) Arborele de secțiune circulară constantă transmite puterea $P = 80$ kW la turația $n = 400$ rot/min. Pe circumferințele roților (1) și (2), de diametre $D_1 = 280$ mm și $D_2 = 400$ mm, acționează forțele F_1 și respectiv F_2 . Dacă: greutatea roților sunt $G_1 = 1$ kN și $G_2 = 2$ kN, $\sigma_a = 160$ MPa, atunci:

- Să se determine valorile forțelor F_1 și F_2 ;
- Să se traseze diagramele momentelor de torsiune, (M_t), și de încovoiere, (M_i);
- Să se determine diametrul necesar, d_{nec} , pentru arbore.

Obs. Intre putere, turație și moment de torsiune există relația: $M_t = 9,55 \cdot 10^6 \cdot \frac{P}{n}$.

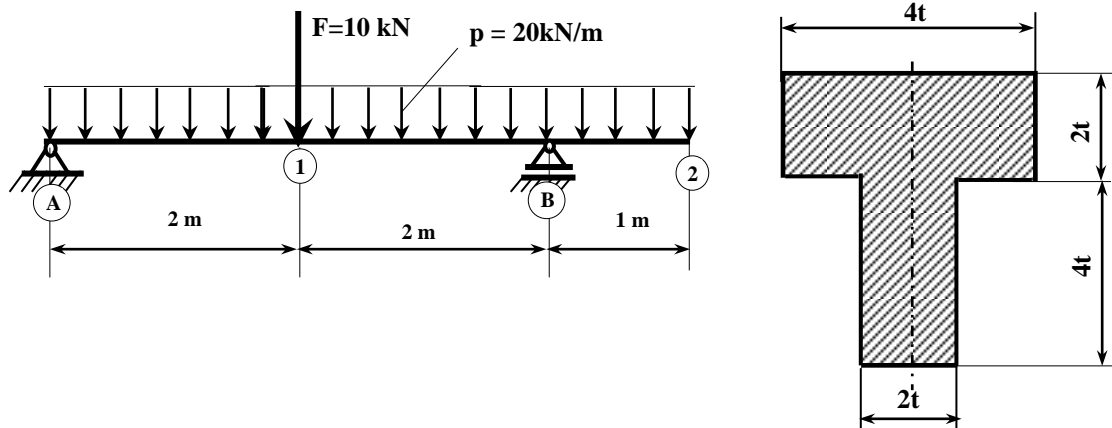


IV) Pentru sistemul din figură, de rigiditate EI constantă, se cer diagramele de eforturi și calculul deplasării articulației intermediare pe direcția forței F .

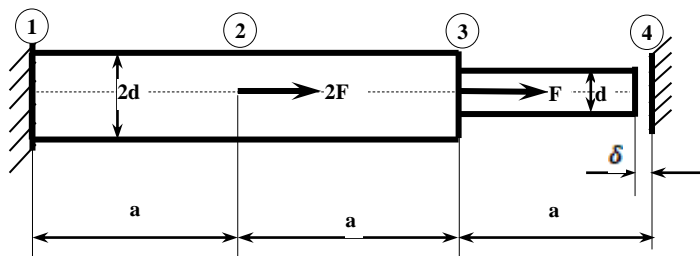


1996

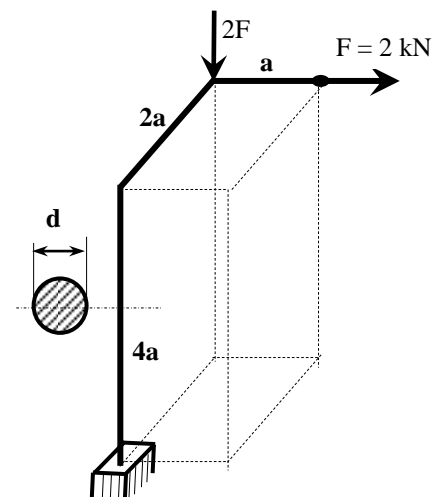
- I) Grinda din figură are încărcările și dimensiunile indicate. Se cer:
- Diagramele (T) și (M_i);
 - Dimensionarea secțiunii: $t_{nec} = ?$, pentru $\sigma_a = 150$ MPa;
 - Diagramele tensiunilor: normale, σ , și tangențiale, τ , pentru secțiunea (B) dreapta.



- II) Pentru bara cu forma și dimensiunile din figură se dau: $\delta = 0,05$ mm, $a = 0,4$ m, $\sigma_a = 150$ MPa, $d = 50$ mm, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. Se cer:
- Să se determine forța maxim admisă: $F_{cap} = ?$
 - Să se traseze diagrama forțelor axiale (N).



- III) Bara spațială cu secțiune circulară constantă, cu $d = 180$ mm, este solicitată ca în figură. Se cer:
- Să se traseze diagramele de eforturi: (N), (M_i) și (M_t);
 - Să se calculeze tensiunea maximă (cu teoria a III-a de rezistență).
 - Se cunosc: $F = 2$ kN și $a = 0,3$ m.

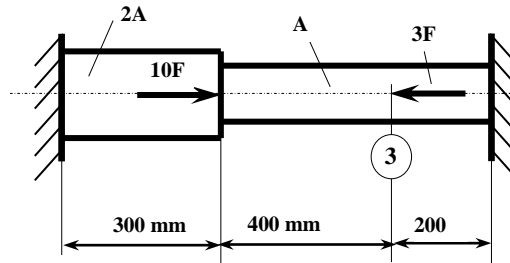


1997

I) Pentru bara din figură, se dau: $\sigma_a = 150 \text{ MPa}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

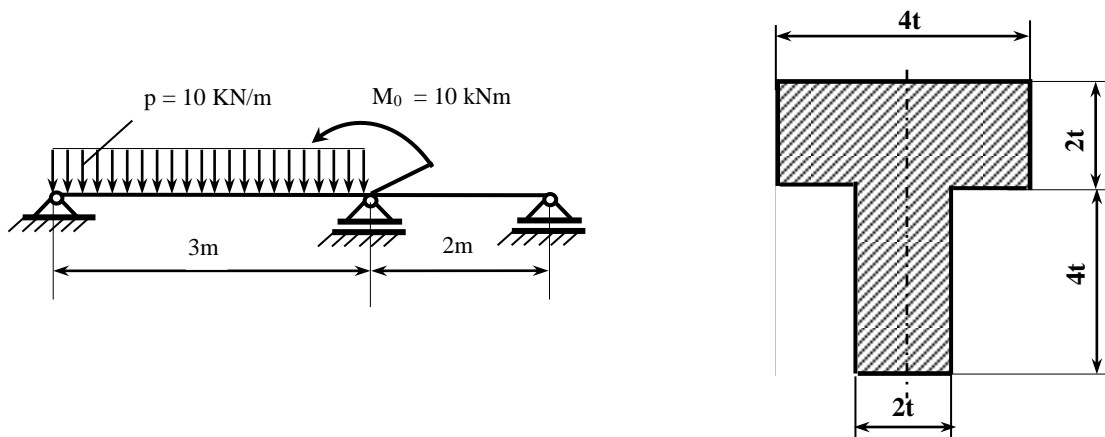
Se cer:

- Forța capabilă;
- Deplasarea secțiunii (3), $\delta_3 = ?$



II) Pentru grinda din figură se cer:

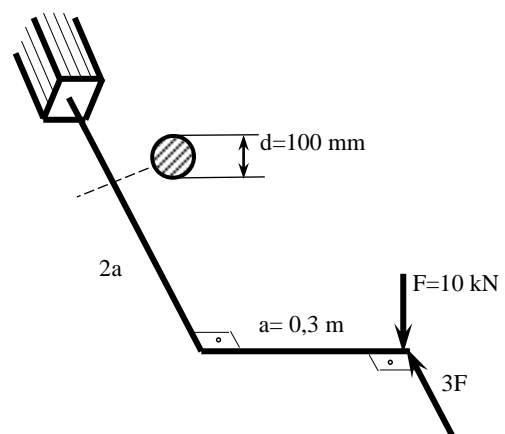
- Diagramele (T) și (M_i);
- Dimensionarea secțiunii: $t_{nec} = ?$, pentru $\sigma_a = 150 \text{ MPa}$;
- Tensiunea tangențială maximă: $\tau_{max} = ?$



III) Bara plană, cu secțiune circulară constantă, ($d = 100 \text{ mm}$), este solicitată de forțele: $F = 10 \text{ kN}$ și $3F$.

Se cer:

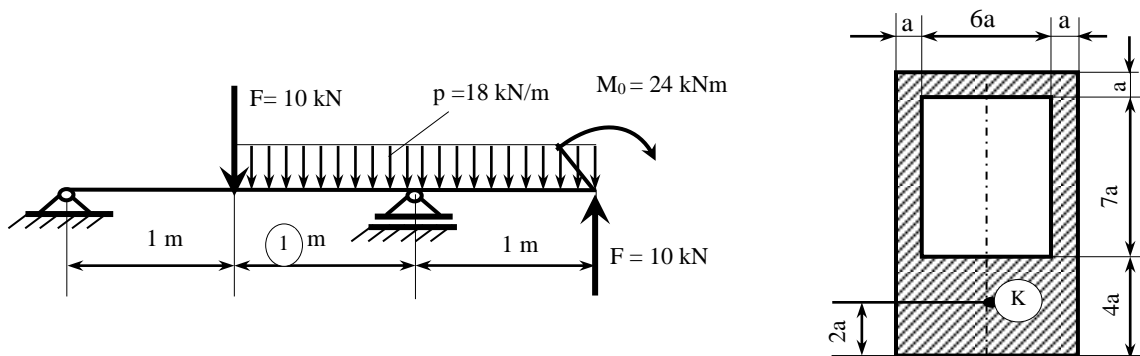
- diagramele de eforturi: (N), (M_i) și (M_t);
- tensiunea echivalentă maximă după teoria a III-a de rezistență: $\sigma_{ech(3),max} = ?$



1998

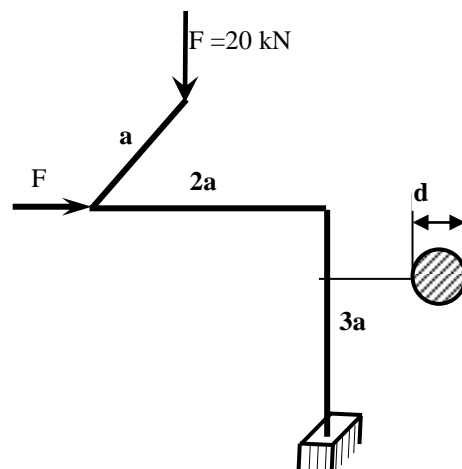
I) Pentru grinda simplu rezemată, cu secțiunea constantă realizată din oțel cu $\sigma_a = 150$ MPa, se cer:

- Diagramele de eforturi;
- Dimensionarea secțiunii: $a_{nec} = ?$;
- Tensiunile principale σ_1 și σ_2 din punctul (K) situat în secțiunea (1).



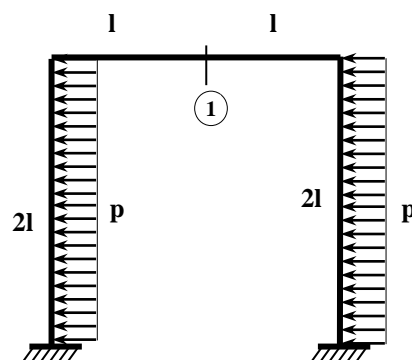
II) Bara spațială cu secțiune circulară constantă este sollicitată ca în figură. Se cer:

- Să se traseze diagramele de eforturi;
- Să se dimensioneze secțiunea barei, ($d_{nec} = ?$), utilizând teoria a III-a de rezistență, pentru $\sigma_a = 100$ MPa și $a = 0,2$ m.



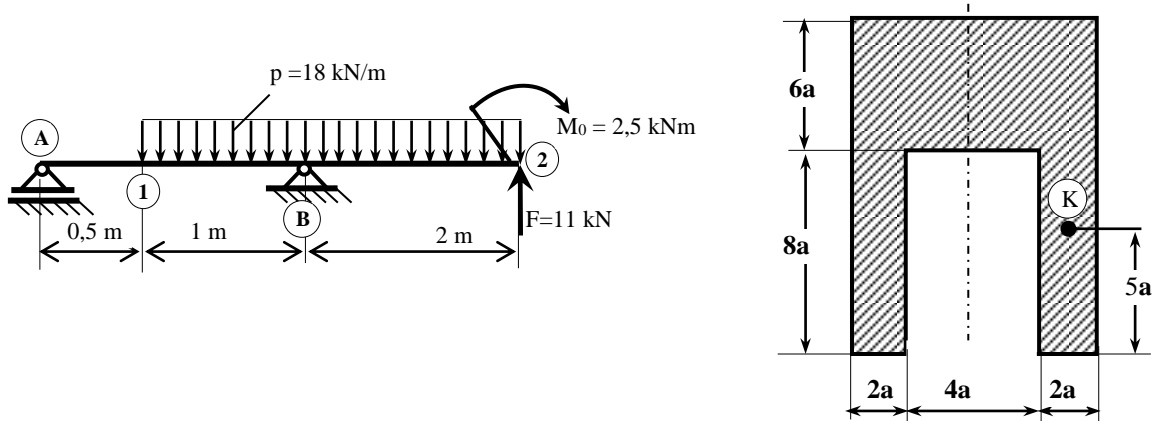
III) Pentru sistemul cu rigiditate constantă, ($EI = ct$), se cer:

- Ridicarea nedeterminării;
- Diagramele de eforturi: (N), (T) și (M_i);
- Deplasarea secțiunii (1) pe verticală.

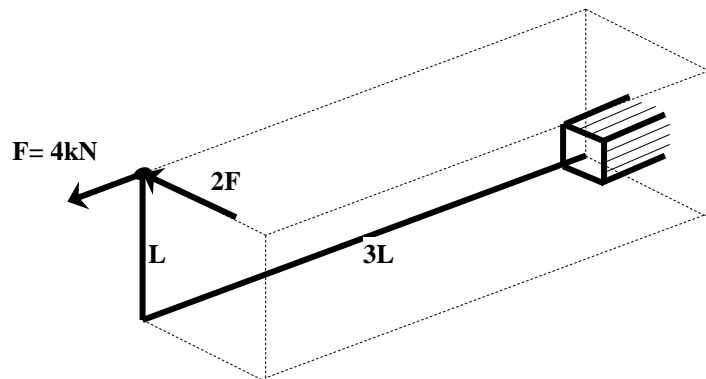


1999

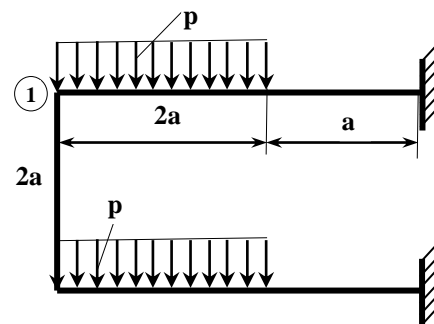
- I) Pentru grinda cu încărcarea și forma secțiunii prezentate în figură, se cer:
- Diagramele de eforturi: (N), (T) și (M_i);
 - Dimensionarea secțiunii pentru $\sigma_a = 150$ MPa;
 - Tensiunile normală și tangențială în punctul K situat în secțiunea (1);
 - Diagramele tensiunilor (σ) și (τ), (fără valori) în lungul secțiunii.



- II) Pentru bara cotită de secțiune circulară cu diametrul d , din figura de mai jos, se cer:
- Diagramele de eforturi: (N), (M_i), (M_t), (literal);
 - Diametrul barei: $d_{nec} = ?$, pentru $\sigma_{a,v} = 90$ MPa.
- Se cunosc: $F = 4$ kN, $L = 200$ mm.

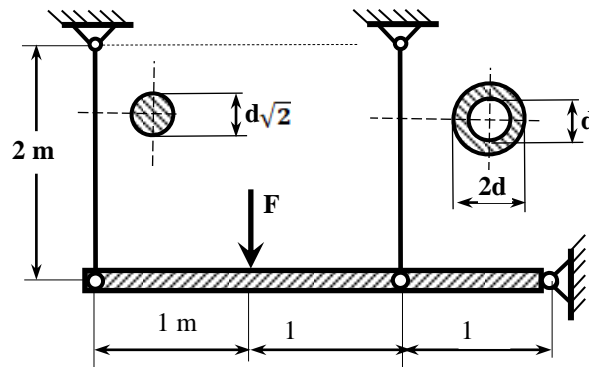


- III) Pentru cadrul de rigiditate constantă din figură, se cer:
- Rotirea secțiunii (1);
 - Diagramele de eforturi (N) și (M_i).

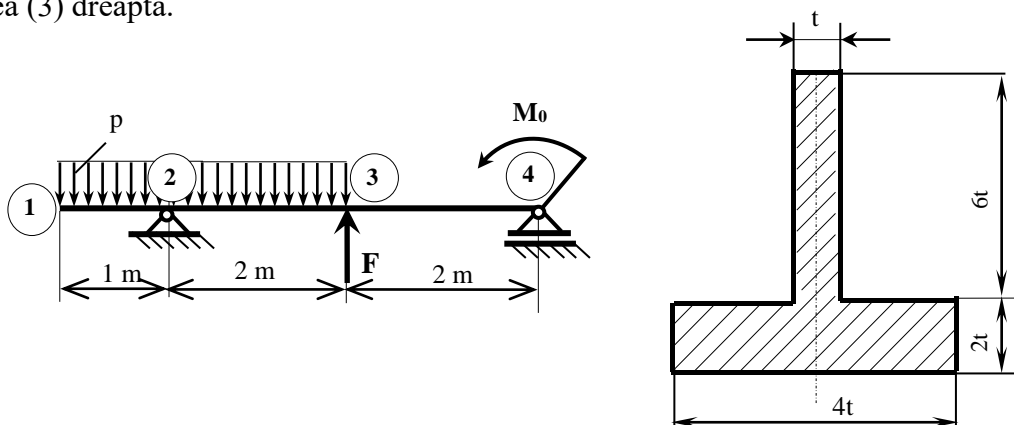


2001

- I) Bara rigidă orizontală din figură este susținută de două fire de oțel.
 Se cunosc: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa; $d = 20$ mm; $\sigma_a = 150$ MPa.
 Se cer:
 a) Forța maxim admisă: $F_{cap}=?$;
 b) Să se calculeze deplasarea punctului de aplicație a forței, $\delta=?$, (în mm).

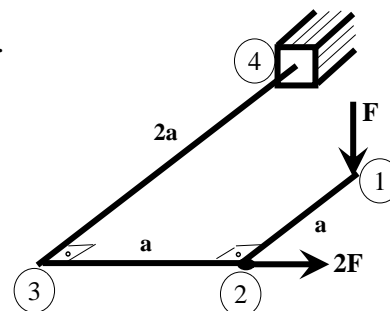


- II) Grinda simplu rezemată este realizată din fontă, cu $\sigma_{at} = 30$ MPa și $\sigma_{ac} = 90$ MPa.
 Se cunosc: $p = 20$ kN/m; $F = 60$ kN și $M_0 = 20$ kNm.
 Se cer:
 a) Dimensionarea secțiunii grinzii: $t_{nec} = ?$
 b) Să se traseze diagramele tensiunilor: normale (σ) și tangențiale (τ), cu valori numerice, pentru secțiunea (3) dreapta.



- III) Cadrul plan din figură, este de secțiune circulară constantă, cu diametrul d .
 Cunoscând: $G = 0,4 E = 2/5 E$, se cer:

- a) Deplasarea pe verticală a secțiunii (1): $\delta_{(1),V}$;
 b) Deplasarea secțiunii (2) pe direcția forței $2F$: $\delta_{(2),H}$.



2002

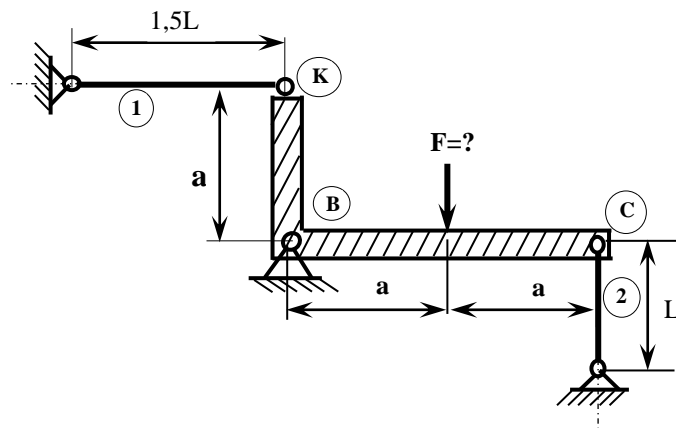
I) Pentru sistemul de bare articulate din figură, (KBC – rigidă) se cere:

a) Forța capabilă: $F=?$, pentru $\sigma_a = 150$ MPa;

b) Deplasarea pe orizontală a punctului K.

Se cunosc: Tirații (1) și (2) sunt de secțiune circulară, cu: $d_1 = d_2 = 20$ mm;

$L=1$ m; $a = 0,5$ m; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.

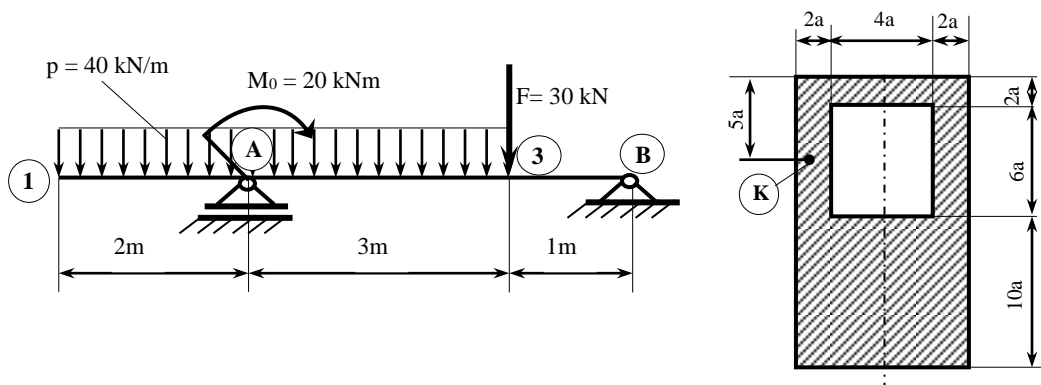


II) Pentru grinda cu încărcarea și forma secțiunii din figură, se cer :

a) Dimensiunea “a” pentru $\sigma_a = 150$ MPa;

b) Diagrama (σ) și (τ), (fără valori) pentru secțiunea “(3)”

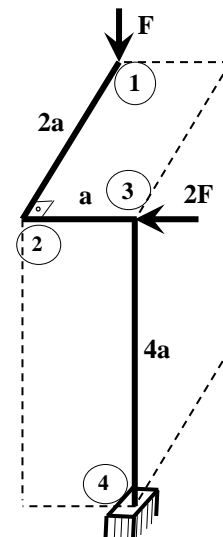
c) Tensiunea maximă din punctul K situat în secțiunea (3): $\tau_{\max,K,(3)} = ?$



III) Pentru bara cotită de secțiune circulară din figură, se cere să se calculeze deplasarea pe verticală a secțiunii (1).

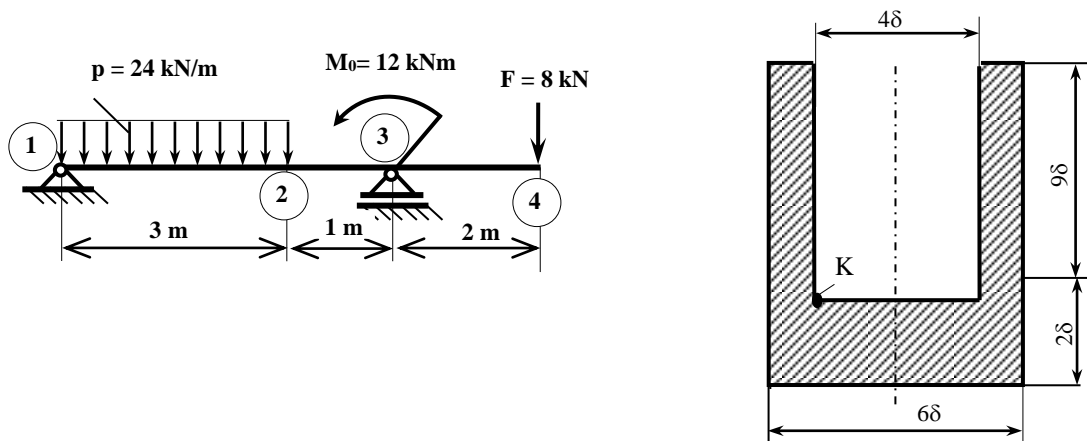
În calcule se va ține seama numai de momentele M_i și M_t .

Se consideră: $G = 0,4 E$.

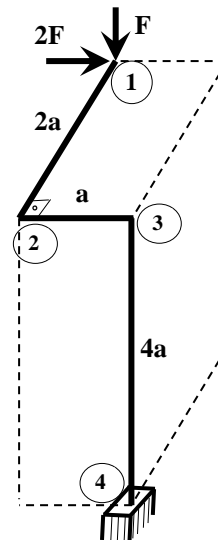


2003

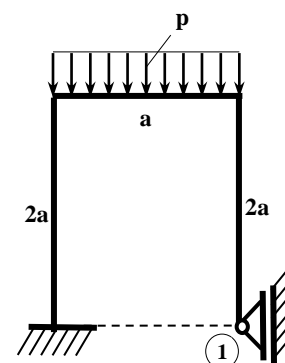
- I) Pentru grinda cu forma secțiunii și încărcarea din figură se cer:
- Să se traseze diagramele de eforturi: (T) și (M_i);
 - Să se dimensioneze grinda, ($\delta_{nec} = ?$), dacă $\sigma_{at} = 30 \text{ MPa}$ și $\sigma_{ac} = 90 \text{ MPa}$;
 - Tensiunea normală și cea tangențială în punctul (K) situat în secțiunea (2).



- II) Pentru cadrul din figură, alcătuit din bare circulare cu diametrul $d = 60 \text{ mm}$, se cer:
- Diagramele de eforturi: (N), (M_i) (M_t), (literal);
 - Forța capabilă: $F_{cap} = ?$, dacă $\sigma_a = 100 \text{ MPa}$
- și se utilizează teoria a III-a de rezistență.
Se dă: $a = 200 \text{ mm}$.

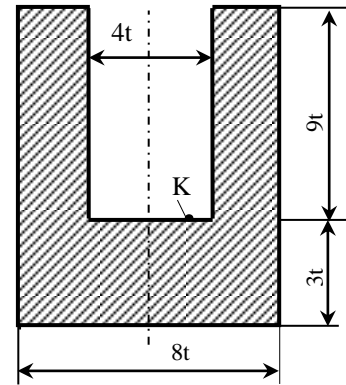
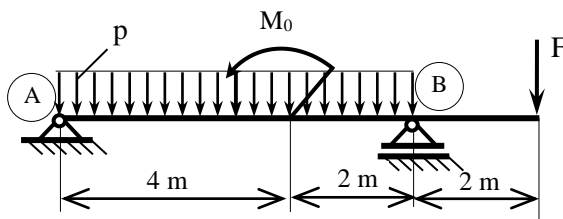


- III) Pentru cadrul de rigiditate constantă ($EI = \text{ct.}$) din figură se cer:
- Rotirea secțiunii (1), $\varphi_1 = ?$
 - Deplasarea pe verticală a secțiunii (1), $\delta_1 = ?$
 - Diagrama momentului încovoiator (M_i).
- Obs. Calculul se face literal.

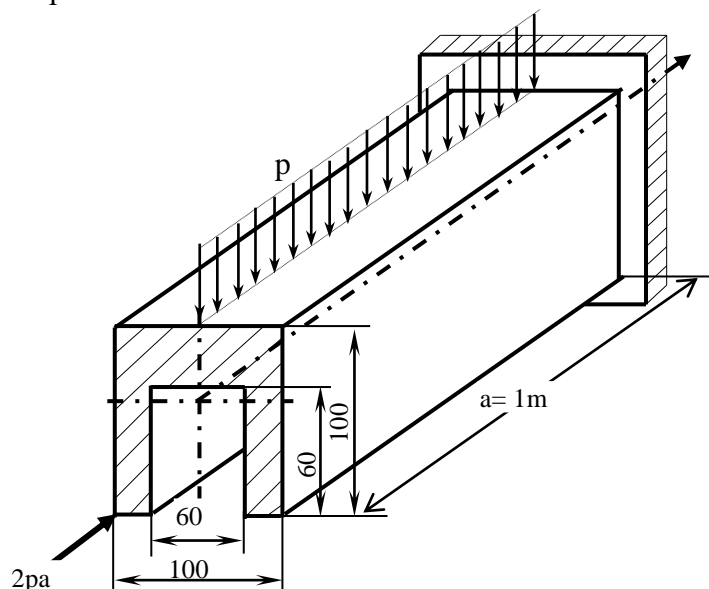


2004

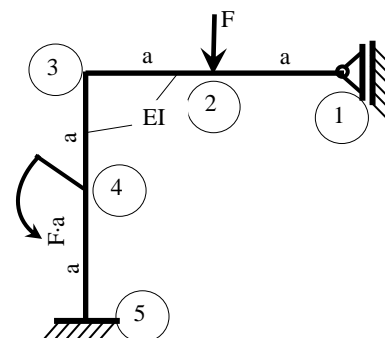
- I) Pentru grinda cu forma secțiunii și încărcarea din figură se cer:
- Să se traseze diagramele de eforturi: (T) și (M_i);
 - Să se dimensioneze grinda, ($t_{nec} = ?$), dacă $\sigma_a = 150 \text{ MPa}$, $p = 10 \text{ kN/m}$, $M_0 = 40 \text{ kNm}$ și $F = 20 \text{ kN}$;
 - Să se traseze diagramele (σ) în secțiunea în care M_i are valoare maximă;
 - Să se calculeze tensiunea $\tau_{K,max}$.



- II) Bara de secțiune constantă din figură este solicitată de sarcinile “p” și $F = 2pa$. Se cer:
- Diagramele de eforturi: (N) și (M_i), (literal);
 - Sarcina capabilă ($p_{cap} = ?$) pentru $\sigma_{at} = 30 \text{ MPa}$ și $\sigma_{ac} = 90 \text{ MPa}$;
 - Diagrama tensiunilor normale (σ) în secțiunea cea mai solicitată, pentru valoarea sarcinii p calculate la punctul b).
- Dimensiunile indicate pe desen sunt în mm.



- III) Pentru sistemul static nedeterminat, de rigiditate constantă, ($EI = ct.$), din figură, se cer:
- Să se ridice nedeterminarea;
 - Să se calculeze deplasarea în reazemul (1).

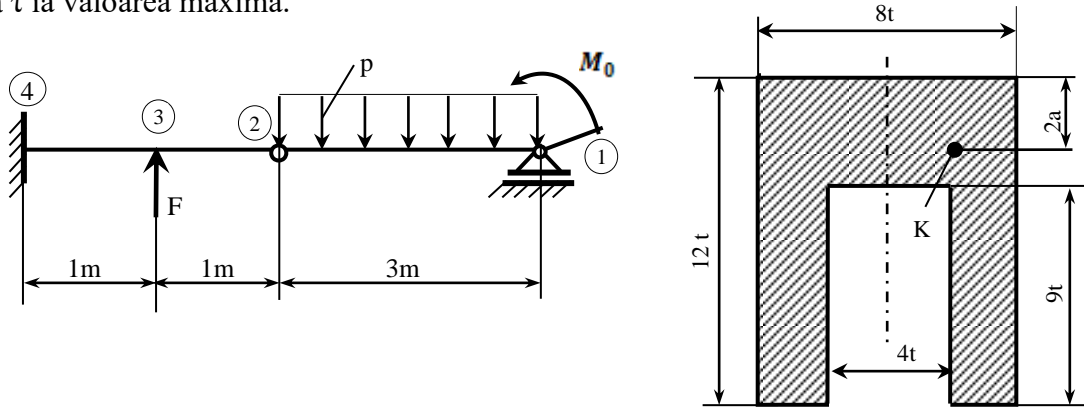


2005

I) Pentru grinda articulată din figură, se cunosc: $\sigma_a = 150 \text{ MPa}$, $p = 20 \text{ kN/m}$, $F = 12 \text{ kN}$, $M_0 = 12 \text{ kNm}$.

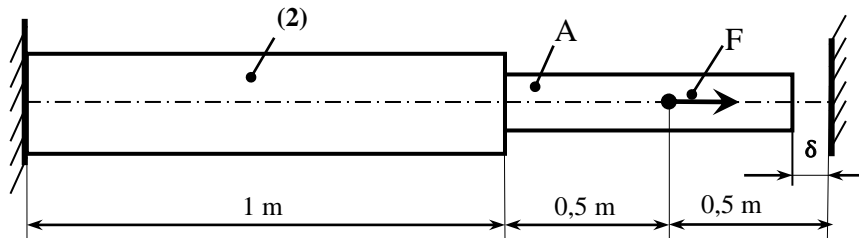
Se cer:

- Diagrame de eforturi;
- Dimensionarea secțiunii; ($t=?$)
- σ_k în secțiunea (3); Diagrama (τ), (cu valori), pentru secțiunea unde tensiunea τ ia valoarea maximă.



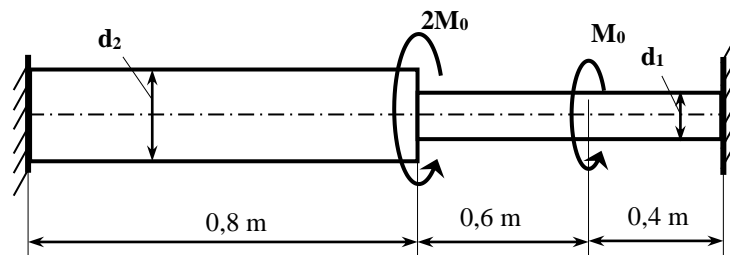
II) Bara din figură, cu rigiditate constantă pe două tronsoane este realizată mai scurtă cu: $\delta = 0,2 \text{ mm}$. Dacă se cunosc: $A = 2000 \text{ mm}^2$ și $E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ (MPa), se cer:

- Valoarea forței F pentru care capătul barei atinge peretele rigid;
- Tensiunea maximă la încărcarea barei cu o forță de două ori mai mare față de cea calculată la punctul anterior ($2F$).



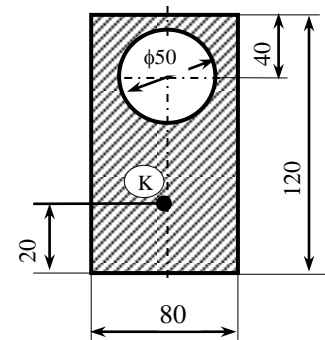
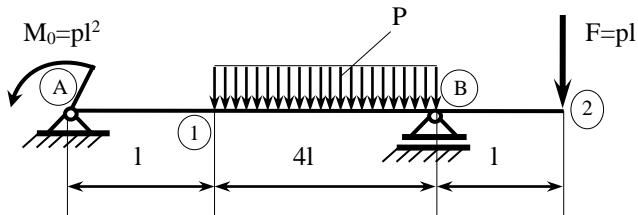
III) Se dau: $d_1 = 60 \text{ mm}$, $d_2 = 80 \text{ mm}$ și $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$. Se cer:

- Să se determine momentul capabil ($M_0 = ?$) dacă $\tau_a = 80 \text{ MPa}$;
- Să se determine rotirea secțiunii 2 ($\varphi_2 = ?$).

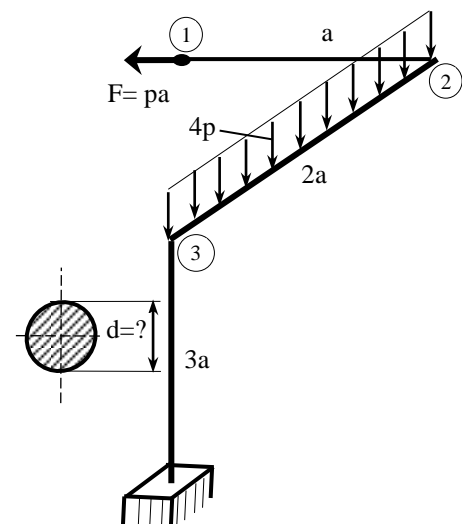


2006

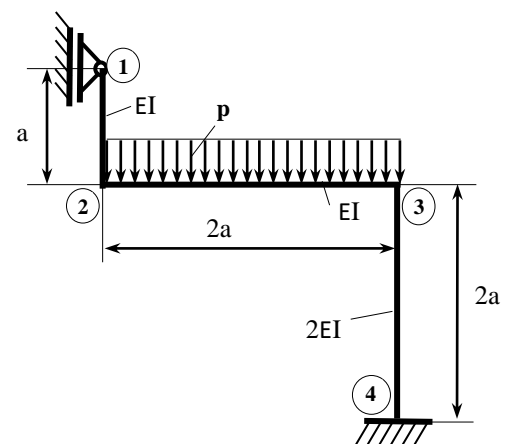
- I) Pentru grinda simplu rezemată din figură se cer:
- Diagramele de eforturi: (T) și (M_i);
 - Să se determine sarcina capabilă: $p_{cap} = ?$
 - Să se calculeze tensiunile σ_k și τ_k , în secțiunea (1).
Se dau: $l = 1\text{m}$, $\sigma_a = 150\text{MPa}$.



- II) Pentru bara spațială, de rigiditate constantă, se cer:
- Diagramele de eforturi: (N), (T), (M_i) și (M_i), (literal);
 - Diametrul secțiunii d , pentru $\sigma_{a,III} = 160\text{MPa}$.
Forța F este aplicată în secțiunea (1) și este orientată pe direcția axei tronsonului (1 – 2).

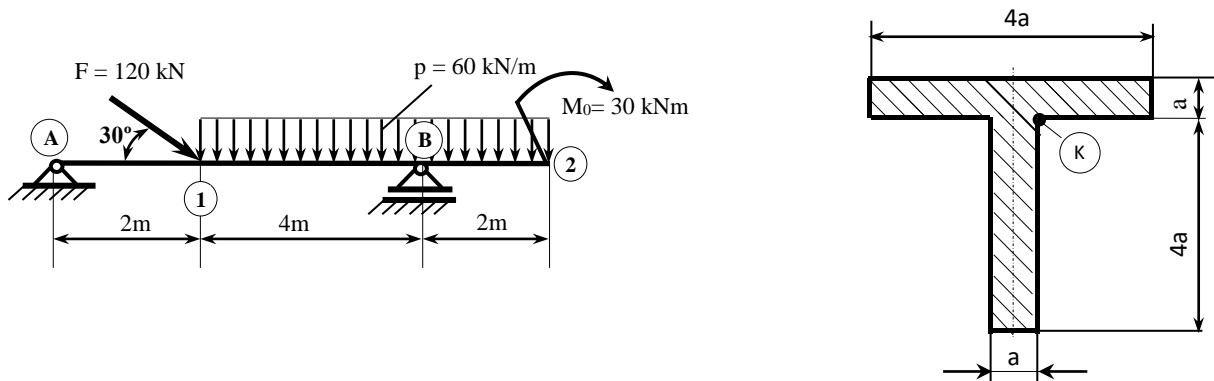


- III) Pentru sistemul static nedeterminat din figură se cer:
- Ridicarea nedeterminării;
 - Diagramele de eforturi: (N), (T) și (M_i);
 - Deplasarea secțiunii (1): $\delta_1 = ?$

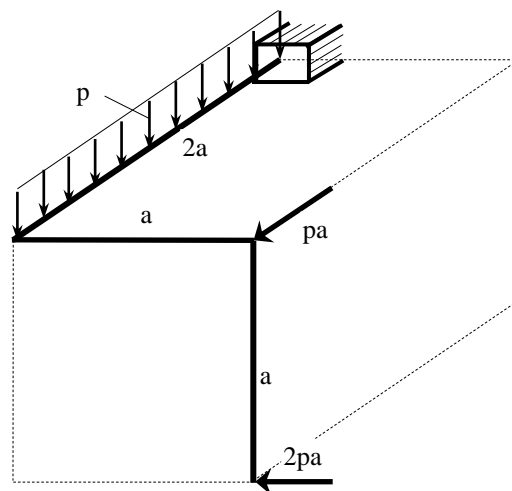


2007

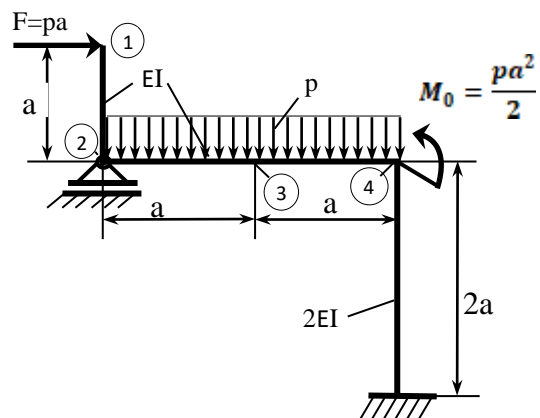
- I) Pentru grinda din figură, realizată din fontă, se cer:
- Diagramele cotate ale eforturilor : (N), (T) și (M_i);
 - Dimensionarea secțiunii ($a_{nec} = ?$) dacă $\sigma_{at} = 60 \text{ MPa}$ și $|\sigma_{ac}| = 120 \text{ MPa}$;
 - Tensiunea normal σ în punctul K din secțiunea (B);
 - Diagrama tensiunii tangențiale, cu valori în secțiunea unde aceasta are valoare maximă.



- II) Pentru bara cotită de secțiune circulară, cu diametrul $d = 40 \text{ mm}$, din figură, se cer:
- Diagramele de eforturi: (N), (M_i), (M_i), (literal);
 - Sarcina capabilă ($p_{cap} = ?$) pentru $\sigma_a = 100 \text{ MPa}$;
- Se cunoaște $a = 200 \text{ mm}$. La nevoie se va utiliza teoria a III-a de rezistență.

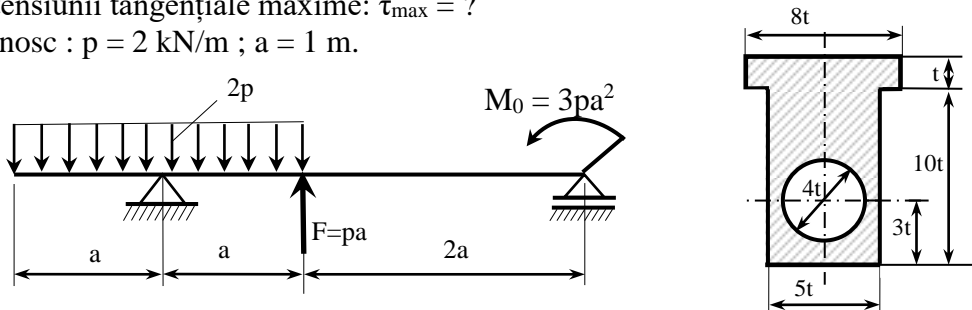


- III) Pentru sistemul static nedeterminat, se cer:
- Ridicarea nedeterminării;
 - Diagramele de eforturi;
 - Deplasarea pe verticală a secțiunii (3): $\delta_{v,(3)} = ?$

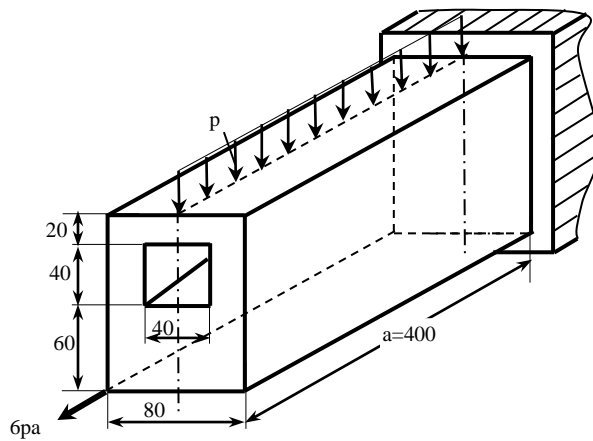


2008

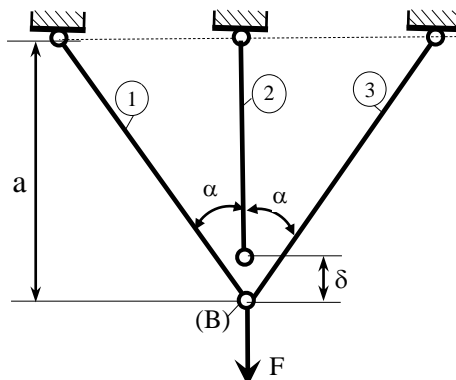
- I) Pentru grinda simplu rezemată, cu secțiunea constantă din figură, se cer:
- Diagramele de eforturi;
 - Dimensionarea secțiunii, ($t_{nec} = ?$), pentru $\sigma_{at} = 60 \text{ MPa}$ și $\sigma_{ac} = 90 \text{ MPa}$;
 - Diagrama de variație a tensiunilor: normale (σ) în secțiunea periculoasă, și calculul tensiunii tangențiale maxime: $\tau_{max} = ?$
- Se cunosc : $p = 2 \text{ kN/m}$; $a = 1 \text{ m}$.



- II) Pentru bara confecționată din oțel, din figură, se cer:
- Diagramele de eforturi (N) și (M_i);
 - Sarcina capabilă ($p=?$) pentru $\sigma_a = 150 \text{ MPa}$;
 - Diagrama de variație a tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă (cu valori numerice).

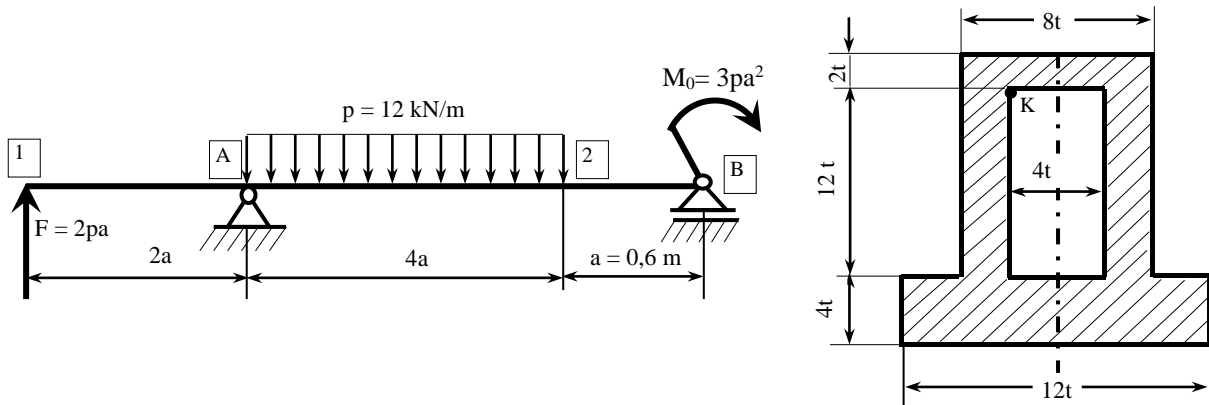


- III) Se consideră sistemul de bare de rigiditate constantă EA, articulare. Bara din mijloc este mai scurtă cu $\delta = 5 \cdot 10^{-4} \cdot a$. Se dă: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\alpha = 30^\circ$. Se cer:
- Să se calculeze tensiunile din bare la montarea forțată a sistemului ($\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$);
 - După montarea forțată sistemul se încarcă cu o forță $F = 50 \text{ kN}$ în articulația comună, forță orientată vertical. Diametrul barelor în acest caz este $d = 20 \text{ mm}$. Să se calculeze tensiunile datorate doar acțiunii forței F ($\sigma_1'', \sigma_2'', \sigma_3''$);
 - Să se calculeze tensiunile totale $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ luând în considerare atât defectul de montaj, cât și încărcarea cu forța F .



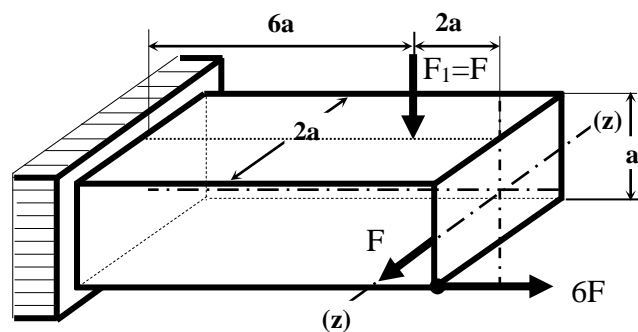
2009 – MECANIC

- I) Pentru grinda de secțiune constantă din figură se cer:
- Să se traseze diagramele de eforturi;
 - Să se dimensioneze secțiunea, $t_{nec} = ?$, dacă $\sigma_{at} = 60 \text{ MPa}$ și $\sigma_{ac} = 90 \text{ MPa}$;
 - Să se determine tensiunea normală maximă, ($\sigma_{k,max}$), și tensiunea tangențială maximă ($\tau_{k,max}$), din punctul K precizat pe secțiune.



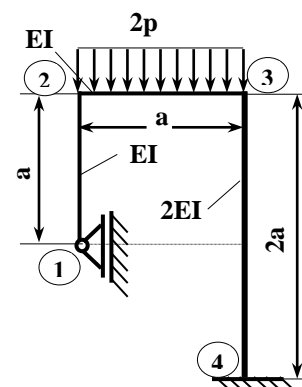
- II) Bara de secțiune dreptunghiulară constantă din figură este din oțel cu rezistența admisibilă $\sigma_a = 120 \text{ MPa}$. Se cer:

- Să se traseze diagramele de eforturi: (N), (M_i);
- Să se determine valoarea forței F, ($F_{cap} = ?$), dacă $a = 160 \text{ mm}$;
- Să se traseze diagrama de variație a tensiunilor normale din secțiunea periculoasă.



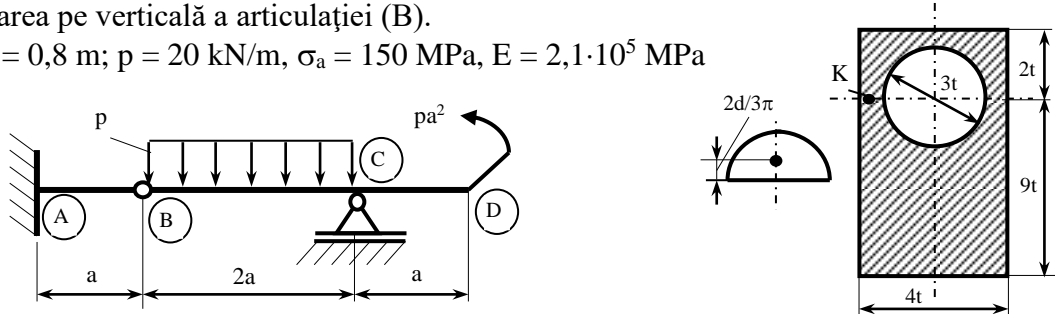
- III) Pentru cadrul de rigiditate constantă pe tronsoane, se cer:

- să se traseze diagramele de eforturi: (N), (T) și (M_i);
- să se calculeze rotirea secțiunii (2).

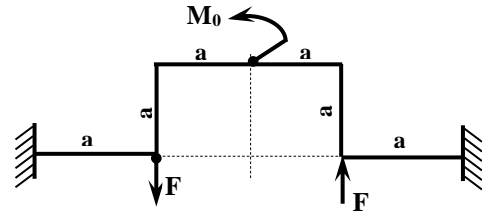


2010 – BARAJ

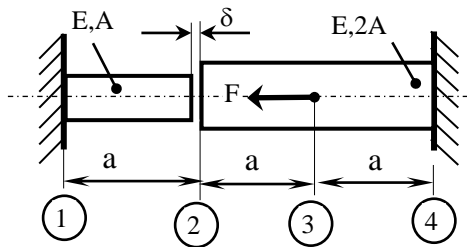
- I) Pentru grinda din oțel cu secțiunea și dimensiunile indicate în figura de mai jos se cer:
- a) diagramele de eforturi;
 - b) dimensionarea secțiunii grinzii ($t = ?$);
 - c) tensiunile principale și direcțiile lor în punctul (K) din secțiunea (C)_{dreapta}
 - d) deplasarea pe verticală a articulației (B).
- Se dau: $a = 0,8 \text{ m}$; $p = 20 \text{ kN/m}$; $\sigma_a = 150 \text{ MPa}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$



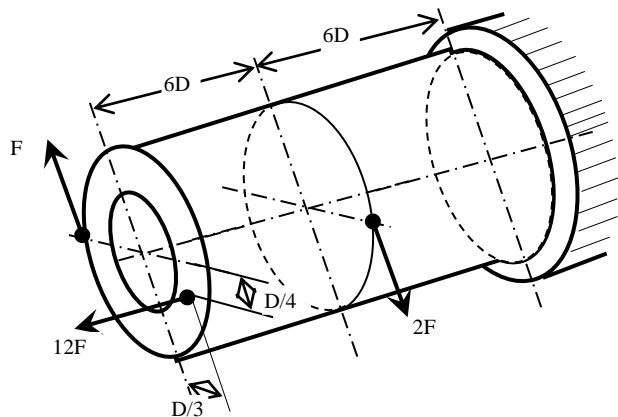
- II) Pentru sistemul static din figură, la care $M_0 = F \cdot a$, se cere trasarea diagramelor de eforturi și calculul deplasării punctului de aplicație al forței F din partea stângă.



- III) Se dă sistemul de bare din figură și se cer:
- a) Să se determine valoarea forței F care anulează jocul $\delta = 0,1 \text{ mm}$;
 - b) Să se calculeze tensiunile din secțiunile barelor pentru o forță de două ori mai mare decât cea care anulează jocul;
 - c) Să se determine variația de temperatură la care trebuie supus sistemul, încărcat doar cu forța F, astfel ca tensiunea maximă de tracțiune să fie egală cu modulul celei de compresiune.
- Se dau: $A = 300 \text{ mm}^2$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$; $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } 1^\circ\text{C}$; $a = 0,4 \text{ m}$.

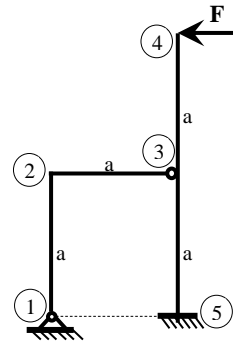


- IV) Se dă bara dreaptă de secțiune inelară din figură, cu $D=2d$. Cunoscând $F = 4 \text{ kN}$ și $\sigma_a = 100 \text{ MPa}$ se cere:
- a) să se traseze diagramele de eforturi, (literal);
 - b) să se dimensioneze bara utilizând teoria tensiunilor tangențiale maxime.



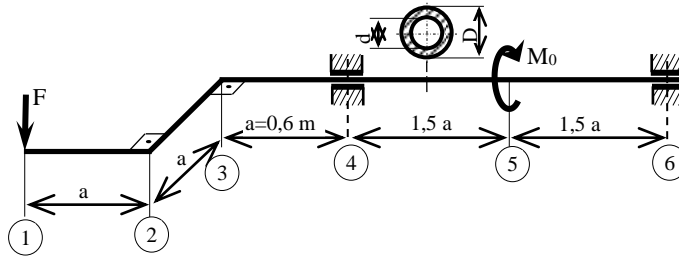
2010

I) Pentru sistemul de bare din figură, de rigiditate $EI = \text{constantă}$, se cere ridicarea nedeterminării și trasarea diagramelor de eforturi.



II) Bara cotită plană, din oțel, de secțiune inelară cu $d = 0,8D$, este solicitată de sarcinile $F = 8 \text{ kN}$ și M_0 . Cunoscând rezistența admisibilă a materialului, $\sigma_a = 160 \text{ MPa}$, se cer:

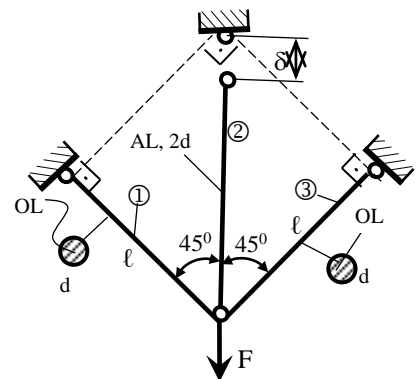
- a) Trasarea diagramelor de eforturi;
- b) Dimensionarea barei, $d_{\text{nec}} = ?$, utilizând teoria tensiunilor tangențiale maxime, (teoria a-3-a);
- c) Să se calculeze săgeata secțiunii, (5), în care este aplicat M_0 , ($G = 0,4E = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$).



III) Sistemul de bare articulate din figura de mai jos are o inexactitate de execuție $\delta = 0,2 \text{ mm}$, (bara (2) este mai scurtă).

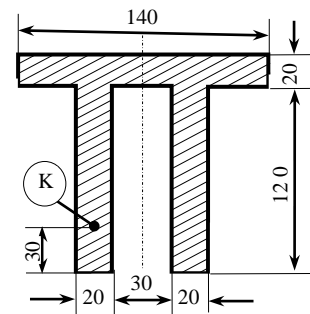
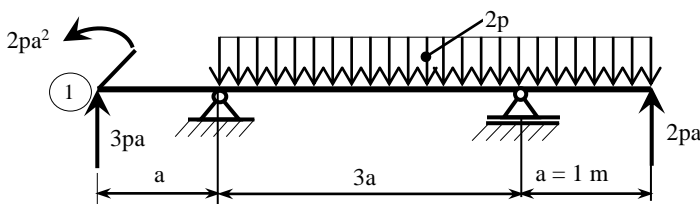
Cunoscând: $d = 40 \text{ mm}$, $I = 600 \text{ mm}^2$, $E_{Ol} = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $E_{Al} = 1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\alpha_{Al} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/^\circ\text{C}$, se cer:

- a) Eforturile din tiranți după montarea forțată, (fără F);
- b) Tensiunile din tiranți după aplicarea (în articulația comună) unei forțe $F = 20 \text{ kN}$;
- c) Tensiunea din bara de Al după încălzirea acesteia cu $\Delta\theta = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, (se ține cont atât de montarea forțată cât și de forța F).



IV) Pentru grinda de secțiune constantă din figură se cer:

- a) Diagramele de eforturi cotate;
- b) Să se determine sarcina capabilă, ($p = ?$), dacă $\sigma_{at} = 50 \text{ MPa}$ și $\sigma_{ac} = 80 \text{ MPa}$;
- c) Să se traseze diagramele tensiunilor normale și tangențiale pentru secțiunea din capătul din stânga al grinzii, (1);
- d) Pentru punctul (K) al aceleiași secțiuni să se determine tensiunile principale și direcțiile principale.



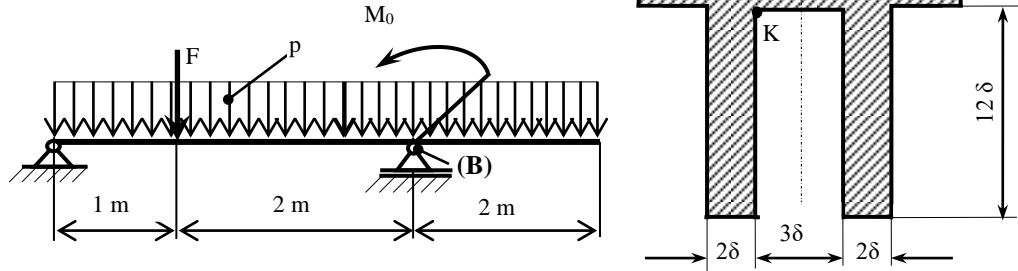
2011

I) Pentru grinda de secțiune constantă confecționată din fontă, cu rezistențele admisibile: $\sigma_{at} = 50 \text{ MPa}$ și $\sigma_{ac} = 90 \text{ MPa}$, reprezentată în figură se cer:

- a) Trasarea diagramei de eforturi: (T) și (M_i);
- b) Dimensionarea secțiunii grinzii, ($t_{nec} = ?$);
- c) Diagramele tensiunilor normale și tangențiale în secțiunea (B) dreapta;
- d) Tensiunile principale și direcțiile principale ale acestora,

din punctul K al secțiunii (B) dreapta.

Se dau : $F = 30 \text{ kN}$, $p = 30 \text{ kN/m}$ și $M_0 = 30 \text{ kNm}$.



II) O bară cu secțiunea variabilă este încastrată în peretele (4).

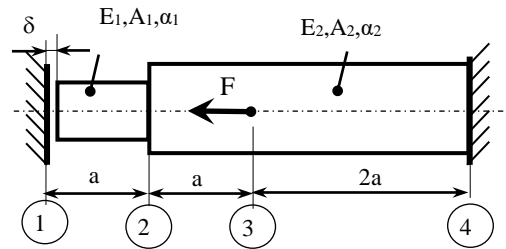
Între peretele (1) și bară există un spațiu $\delta = 0,2 \text{ mm}$. Bara este construită din două materiale.

Se cer:

- a) Să se traseze diagrama forțelor axiale și să se calculeze tensiunile din fiecare tron;
- b) Să se determine tensiunile finale din bară dacă temperatura scade cu $\Delta\theta = 10^\circ\text{C}$.

Se dau : $F = 80 \text{ kN}$; $a = 0,4 \text{ m}$; $A_2 = 2A_1 = 2A = 800 \text{ mm}^2$;

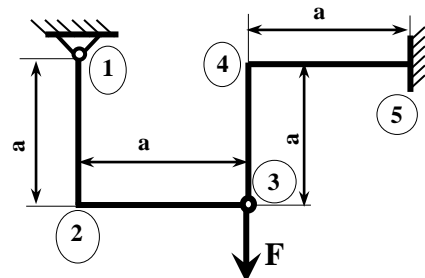
$E_1 = 2E_2 = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$; $\alpha_2 = 2 \alpha_1 = 2,4 \times 10^{-5} \text{ } 1^\circ\text{C}$.



III) Pentru cadrul din figură, confecționat din bare de rigiditate constantă, (EI), se cere:

- a) Ridicarea nedeterminării,
- b) Trasarea diagramei de eforturi
- c) Calculul deplasării pe verticală în secțiunea articulației

(3), δ_3 .

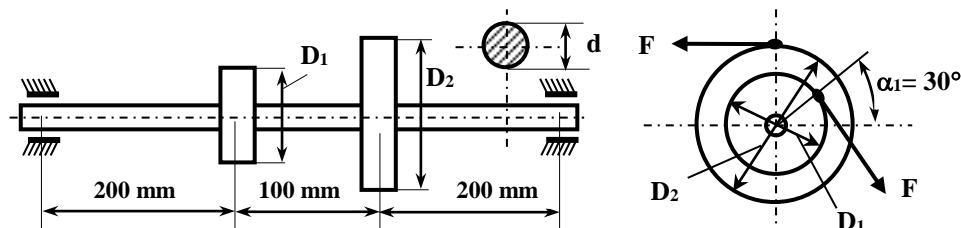


IV) Arborele de secțiune circulară constantă transmite puterea $P = 80 \text{ kW}$ la turația $n = 800 \text{ rot/min}$. Pe circumferințele roților (1) și (2), de diametre $D_1 = 240 \text{ mm}$ și $D_2 = 400 \text{ mm}$, acționează forțele F_1 și respectiv F_2 .

Dacă: greutatea roților sunt $G_1 = 1 \text{ kN}$ și $G_2 = 2 \text{ kN}$, $\sigma_a = 160 \text{ MPa}$, atunci:

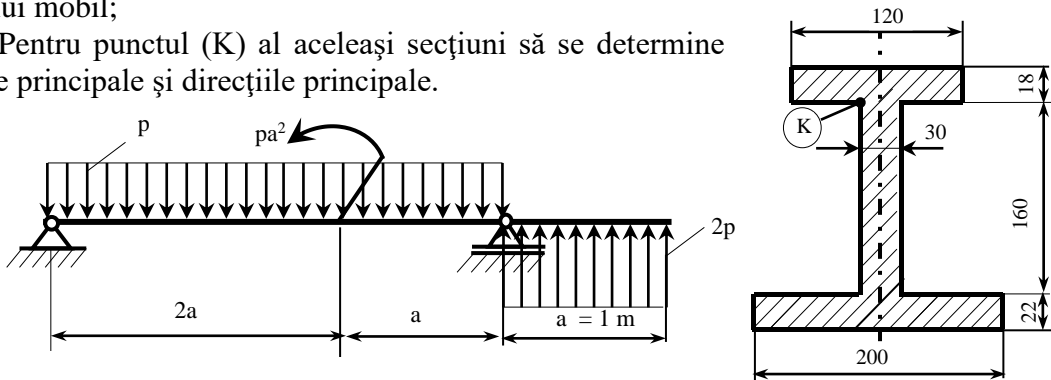
- a) Să se determine valorile forțelor F_1 și F_2 ;
- b) Să se traseze diagramele momentelor de torsiune, (M_t), și de încovoiere, (M_i);
- c) Să se determine diametrul necesar, d_{nec} , pentru arbore.

Obs. Între putere, turație și momentul de torsiune există relația: $M_t = 9,55 \cdot 10^6 \cdot P/n$.



2012

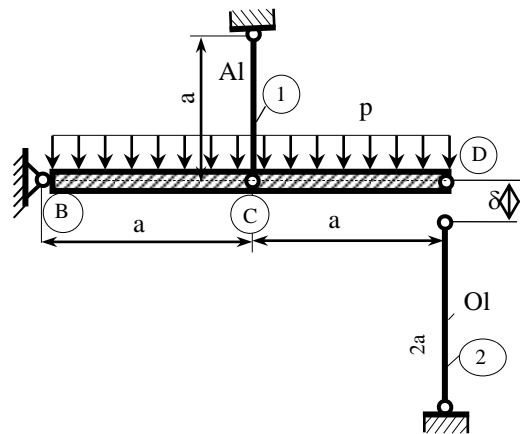
- I) Pentru grinda de secțiune constantă din figură se cer:
- a) Diagramele de eforturi cotate;
 - b) Să se determine sarcina capabilă, ($p = ?$), dacă $\sigma_a = 160 \text{ MPa}$;
 - c) Să se calculeze tensiunile normale și tangențiale din punctual (K) al secțiunii din dreptul reazemului mobil;
 - d) Pentru punctul (K) al aceleași secțiuni să se determine tensiunile principale și direcțiile principale.



- II) Bara de mare rigiditate BCD trebuie susținută în poziție orizontală de tiranții (1), din aluminiu, și (2), din oțel, ambii cu secțiune circulară cu diametrul $d = 20 \text{ mm}$. Tirantul (2) are o inexactitate de execuție $\delta = 0,2 \text{ mm}$, (bara (2) este mai scurtă).

Cunoscând: $E_{OI} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $E_{Al} = 0,7 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\alpha_{Al} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$, se cer:

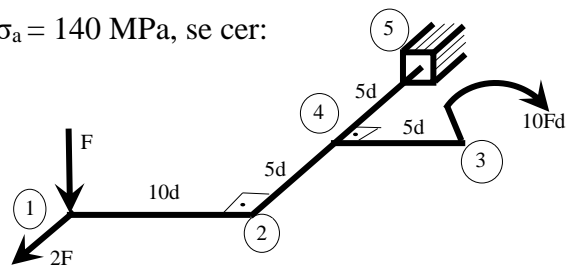
- a) Eforturile din tiranți după montarea forțată, (fără sarcina p);
- b) Tensiunile din tiranți după aplicarea, sarcinii $p = 20 \text{ kN/m}$;
- c) Tensiunea din bara de Al după încălzirea acesteia cu $\Delta\theta = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, (se ține cont atât de montarea forțată cât și de sarcina p).



- III) Bara cotită plană, din oțel, de secțiune circulară cu diametrul d , este sollicitată de sarcinile $F = 2 \text{ kN}$, $2F$ și momentul $10Fd$.

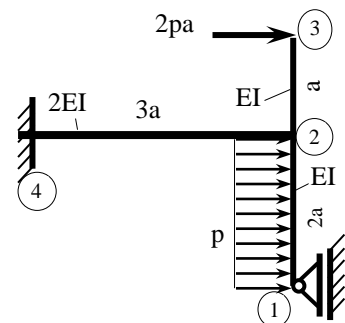
Cunoscând rezistența admisibilă a materialului, $\sigma_a = 140 \text{ MPa}$, se cer:

- a) Trasarea diagramele de eforturi;
- b) Dimensionarea barei, $d_{nec} = ?$ utilizând teoria tensiunilor tangențiale maxime, (teoria a-3-a);
- c) Să se calculeze săgeata secțiunii, (3), în care este aplicat momentul, ($G = 0,4E = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$).



- IV) Pentru sistemul de bare din figură, se cere să se calculeze:

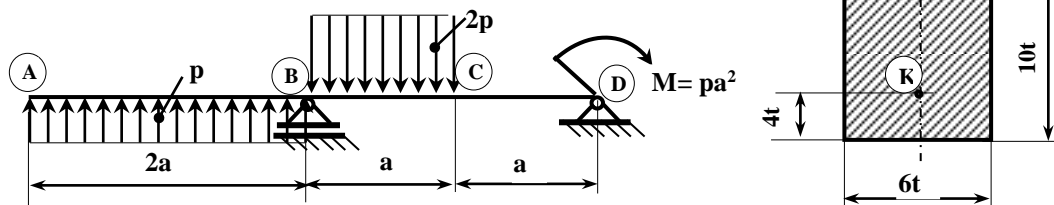
- a) deplasarea totală a secțiunii secțiunii (1), δ_1 ,
 - b) rotirea secțiunii (3), φ_3 , în planul barei.
- Obs.** Rigiditatea barei este constantă pe intervale.



2013

I) Pentru grinda cu încărcarea și forma secțiunii transversale din figură, se cer:

- Diagramele de eforturi;
 - Dimensiunea t a secțiunii transversale pentru $\sigma_a = 150$ MPa;
 - Tensiunile σ și τ în punctul (K) situate în secțiunea (C).
- Se cunosc: $p = 20$ kN/m; $a = 1$ m.



II) Bara cotită de secțiune inelară constantă, din figură, este încastrată în (1) și încărcată cu sarcinile indicate.

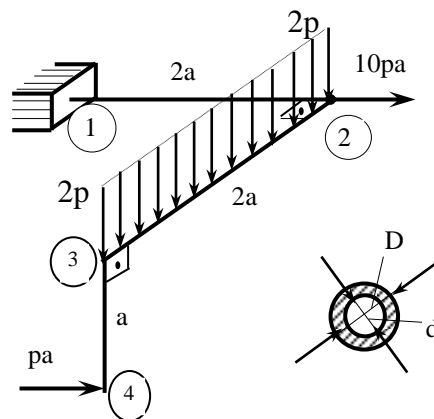
Se cunosc: raportul între diametre: $d/D = 0,8$;

$D = 120$ mm; $a = 0,6$ m; $\sigma_a = 150$ MPa.

Se cer:

- Diagramele de eforturi: (N), (T) și (M_i);
 - Să se determine sarcina capabilă: $p_{cap} = ?$,
- (nu se ține seama de T);
- Să se calculeze deplasarea pe verticală a secțiunii (3), $\delta_3 = ?$.

Se dă: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa; $G = 0,8 \cdot 10^5$ MPa.



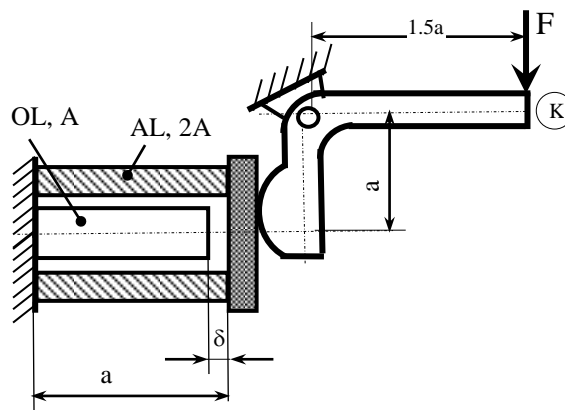
III) Pentru sistemul din figură se cer:

a) forța necesară pentru consumarea jocului de montaj, $\delta = 0,1$ mm;

b) după anularea jocului se aplică în (K) sarcina $2F$. Să se calculeze tensiunile din cei doi cilindri, (unul din oțel și cel exterior din aluminiu);

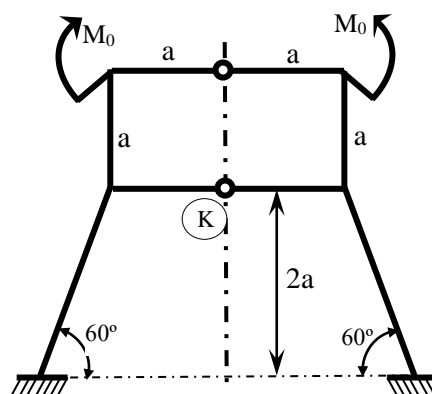
c) În condițiile punctului b) să se determine deplasarea secțiunii (K).

Se dau: $E_{OL} = 3E_{AL} = 21 \cdot 10^4$ MPa; $A = 400$ mm²; $a = 200$ mm.



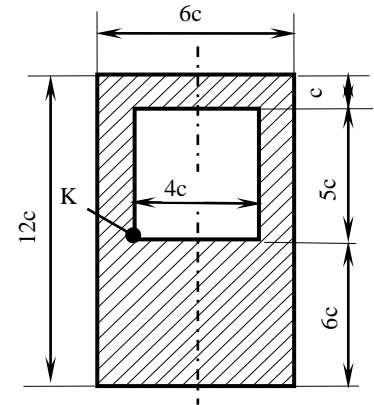
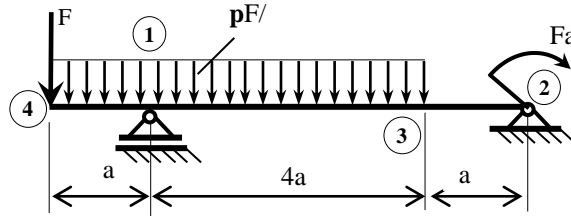
IV) Pentru sistemul din figură, cu rigiditatea $EI = \text{constantă}$, se cer:

- Să se ridice nedeterminarea;
- Diagramele de eforturi: (N) și (M_i);
- Deplasarea pe verticală a secțiunii (K).

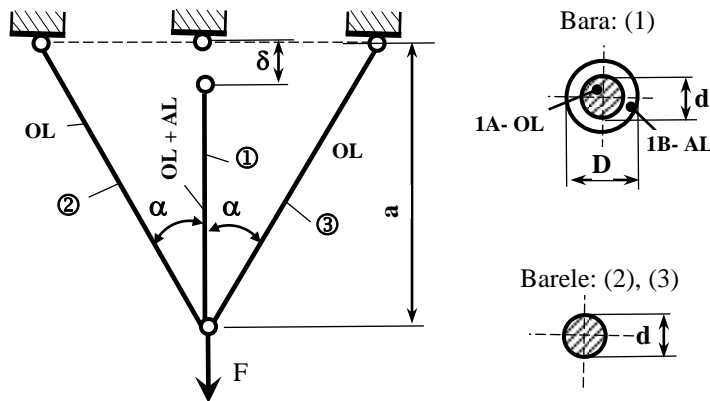


2014

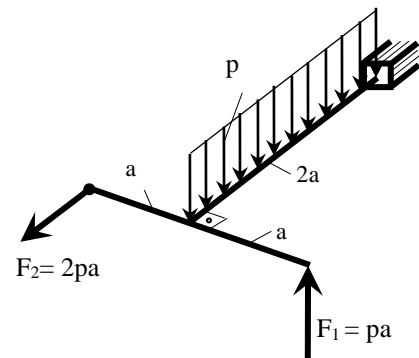
- I) Se dă grinda metalică rezemată și încărcată ca în figură. Se cer:
 a) Trasarea diagramelor de eforturi, (T) și (M_i);
 b) Dimensionarea secțiunii transversale, ($c_{nec} = ?$);
 c) Valoarea tensiunii tangențiale τ în punctul K al secțiunii (A);
 Se cunosc: $\sigma_a = 150$ MPa; $a = 1$ m; $F = 8$ kN.



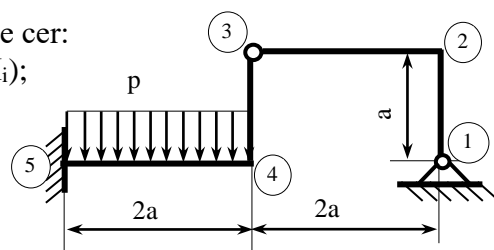
- II) Se dă sistemul de bare articulate din figură pentru care se cer:
 a) Eforturile din bare după montajul forțat, (în lipsa forței F);
 b) După montajul forțat se aplică forța F ca în figură. Să se calculeze tensiunile maxime din oțel și aluminiu.
 Se dau: $\delta = 0,2$ mm; $a = 2$ m; $\alpha = 30^\circ$; $E_{Ol} = 2,1 \cdot 10^5$ MPa; $E_{Al} = 0,7 \cdot 10^5$ MPa; $d = 50$ mm; $D = 100$ mm; $F = 120$ kN.



- III) Pentru bara de oțel din figură, cu secțiune circulară constantă cu diametru d, se cere:
 a) Să se traseze diagramele de eforturi;
 b) Să se calculeze sarcina capabilă "p", după teoria tensiunii tangențiale maxime, (teoria a-III-a);
 Se neglijează efectul forței tăietoare.
 Se dă: $d = 60$ mm; $a = 1$ m; $\sigma_a = 120$ MPa.



- IV) Pentru sistemul din figură, având $EI = \text{constant}$, se cer:
 a) Trasarea diagramelor de eforturi: (N), (T) și (M_i);
 b) Rotirea secțiunii (4);
 c) Depasarea pe verticală a punctului (3), δ_3 .
Obs. $EI = \text{modulul de rigiditate la încovoiere}$.



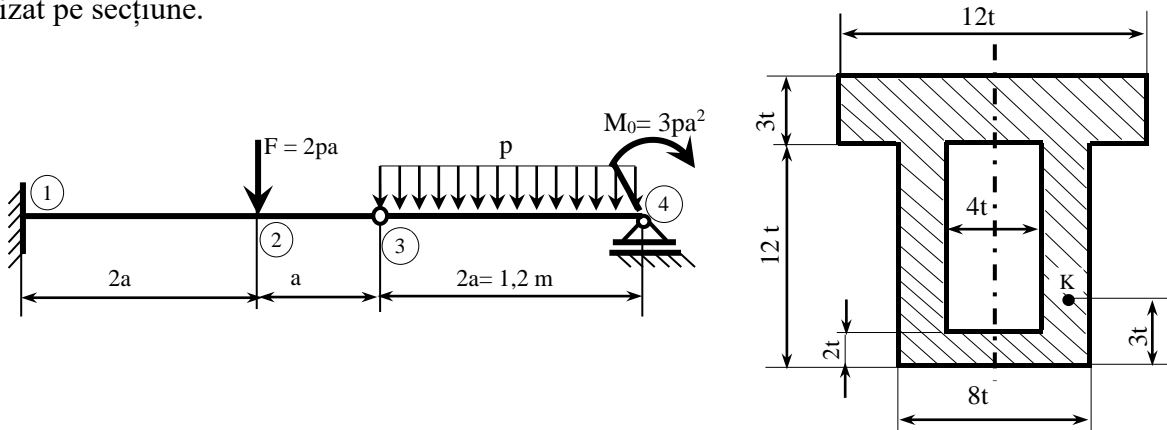
2015

I) Pentru grinda de secțiune constantă din figură se cer:

a) Să se traseze diagramele de eforturi;

b) Să se dimensioneze secțiunea, $t_{nec}=?$, dacă $\sigma_a= 150$ MPa;

c) Să se traseze diagramele de variație ale tensiunilor (σ) și (τ) pentru secțiunea (4), (ca formă și cu precizarea semnelor), și să se calculeze doar valorile maxime ale tensiunilor din punctul K precizat pe secțiune.



II) Bara rigidă orizontală din figură este susținută de doi tiranți: (1) din oțel și (2) având secțiune compusă din cupru și oțel, cu dimensiunile din figură. Bara (1) este realizată mai scurtă cu $\delta = 0,4$ mm.

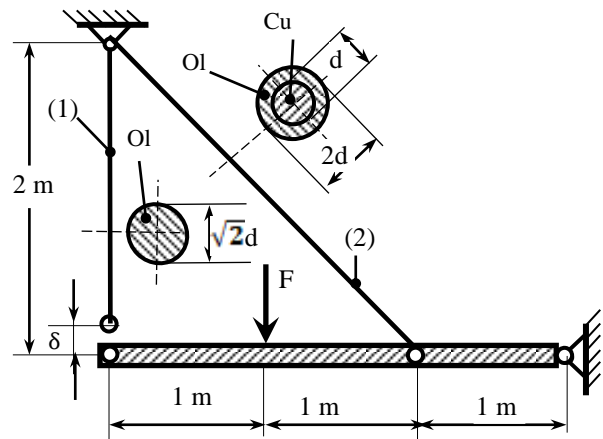
Se cer:

a) Tensiunile din materialele barelor datorate doar asamblării forțate;

b) Tensiunile din bare după aplicarea forței $F = 40$ kN, în secțiunea indicată în figură, (se ia în calcul și efectul asamblării forțate);

c) Să se determine eforturile care apar în materialele care compun bara (2) după încălzirea barei (1) cu $\Delta\theta = 30$ °C.

Se cunosc: $d = 20$ mm; $E_{Ol} = 2 \cdot 10^5$ MPa; $E_{Cu} = 10^5$ MPa; $\alpha_{Ol} = 12 \cdot 10^{-6}$ grad⁻¹.



III) Cadrul plan din figură, are secțiune circulară constantă, cu diametrul $d = 80$ mm, și este sollicitat de o forță F perpendiculară pe planul cadrului.

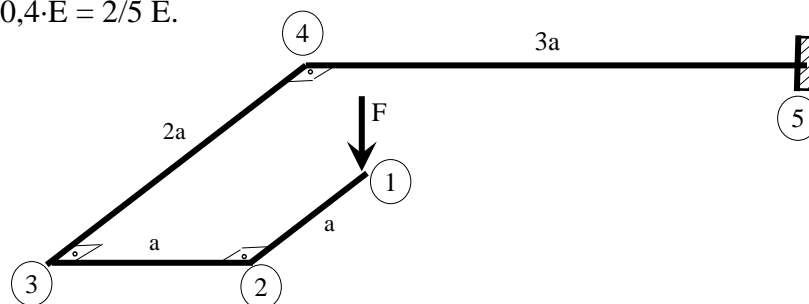
Se cer:

a) Diagramele de eforturi cotate;

b) Să se determine forța capabilă: $F_{cap} = ?$, dacă $\sigma_a= 150$ MPa, (cu teoria a-3-a de rezistență);

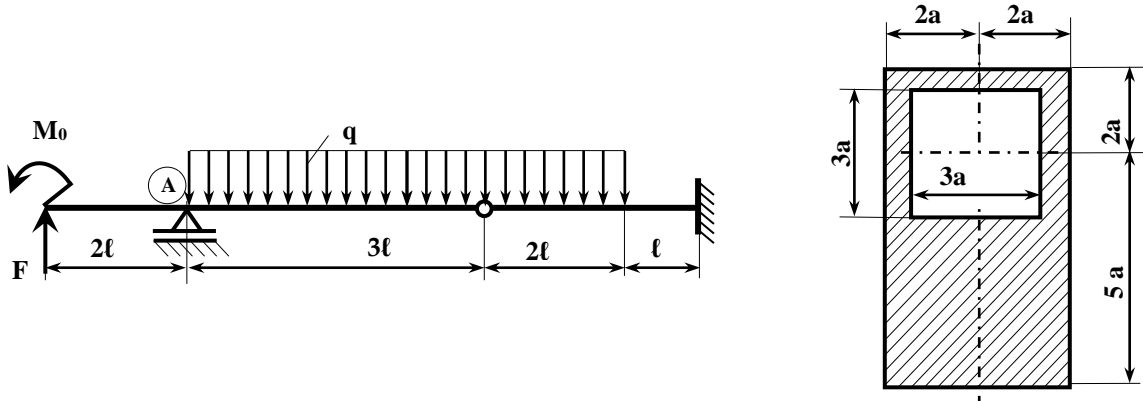
c) Să se calculeze deplasarea pe verticală a secțiunii (2): $\delta_{2V} = ?$ și rotirea secțiunii (3) în jurul axei tronsonului (3) - (4): $\varphi_3 = ?$. Deplasările se vor calcula literal.

Se cunosc: $G = 0,4 \cdot E = 2/5 E$.

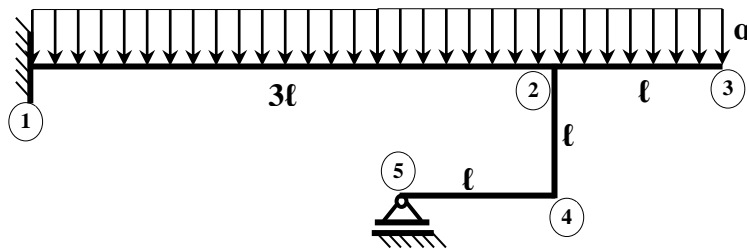


2016

- I) Pentru grinda din figură se dau: $\ell = 0,2 \text{ m}$, $q = 4 \text{ kN/m}$, $F = 2q\ell$, $M_0 = 6q\ell^2$. Se cer:
- Diagrame de eforturi cotate, (T) și (M_i);
 - Dimensionarea secțiunii transversale, pentru $\sigma_a = 150 \text{ MPa}$;
 - Să se calculeze tensiunea τ_{\max} pentru secțiunea (A) dreapta.



- II) Pentru cadrul din figură, cu $EI = \text{ct.}$, se cer:
- Să se determine reacțiunile;
 - Să se traseze diagramele de eforturi;
 - Să se calculeze deplasarea pe verticală a secțiunii (3);
 - Să se calculeze deplasarea reazemului (5).

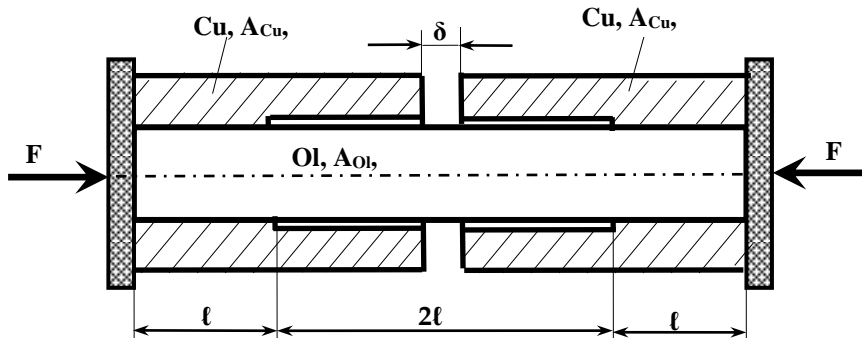


- III) Se dau: $\ell = 0,5 \text{ m}$; $\delta = 0,5 \text{ mm}$; $A_{Cu} = 3 \cdot A_{Ol}$; $E_{Ol} = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$; $\alpha_{Ol} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$; $A_{Ol} = 600 \text{ mm}^2$; $E_{Cu} = 2/3 E_{Ol}$; $\alpha_{Cu} = 3/2 \alpha_{Ol}$.

Se cer:

- Forța necesară anulării jocului δ ;
- Tensiunile din bară pentru o forță dublă față de cea determinată anterior;
- Să se determine variația de temperatură pentru care în zona mediană, în condițiile punctului b), tensiunea în bara de oțel devine nulă.

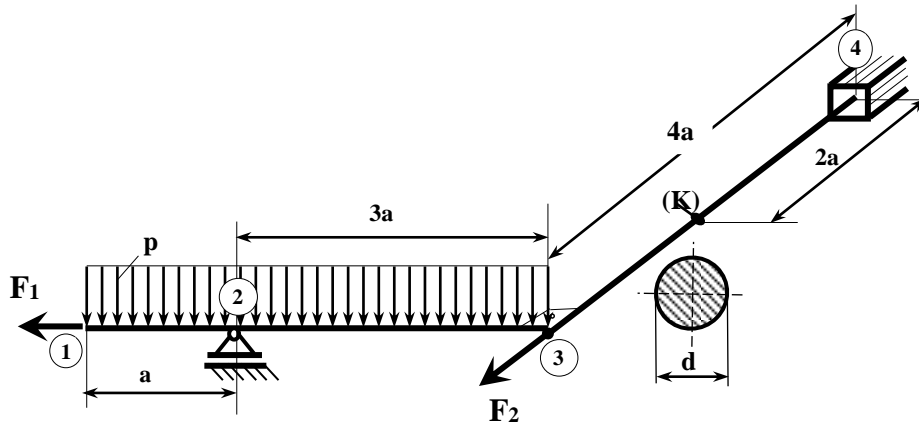
Obs. Pe porțiunile din cele două capete ale barei, cele două materiale sunt solidare.



IV) Pentru structura din figură, (barele 1-2 și 2-3 sunt în plan orizontal), se dau: $F_1 = p \cdot a$; $F_2 = 30 p \cdot a$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$; $a = 0,25 \text{ m}$; $d = 80 \text{ mm}$; $\sigma_a = 160 \text{ MPa}$.

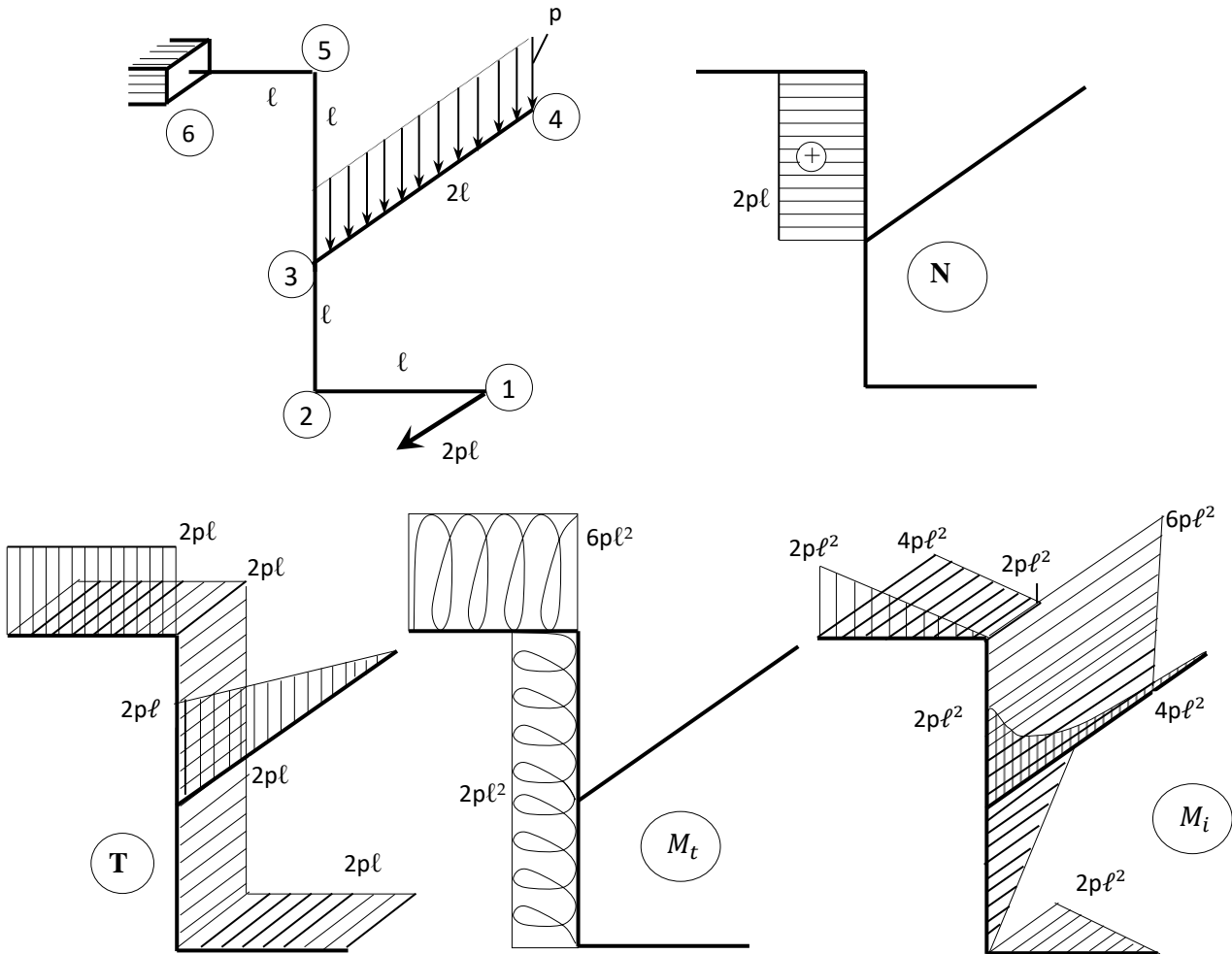
Se cer:

- Diagrame de eforturi secționale;
- Să se determine sarcina capabila, utilizând teoria a-III-a de rezistență;
- Să se calculeze rotirea secțiunii (K) în jurul axei tronsonului (3)-(4).



Locală 1988 BARAJ

I)



Secțiunea cea mai solicitată este încastrarea. În aceea secțiune se iau în calcul eforturile:

$$N = 0; M_i = 2\sqrt{5}pa^2; M_t = 6pa^2; \Rightarrow M_{i,ech(III)} = pa^2\sqrt{20 + 30} = 7,4833 pa^2 = 1,870829 p$$

$$\Rightarrow \sigma_{ech(III)} = \frac{1,870829 p \cdot 32}{\pi \cdot 60^3} = 100 \Rightarrow$$

$$p_{cap} = \frac{\pi \cdot 6^3 \cdot 10^5}{32 \cdot 1,870829} = 1,1335 \frac{N}{mm}$$

II) Deplasările secțiunilor (C) și (C') trebuie să fie identice:

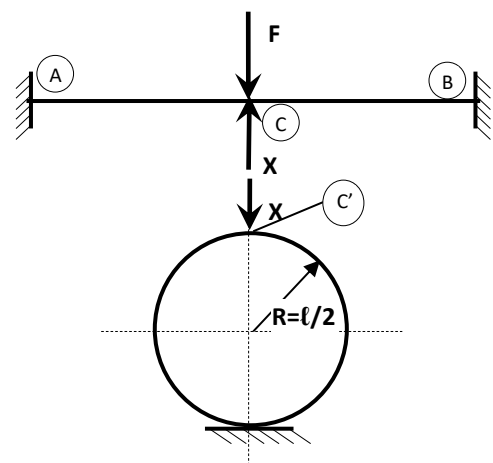
$$\delta_{v,(C)} \equiv \delta_{v,(C')}$$

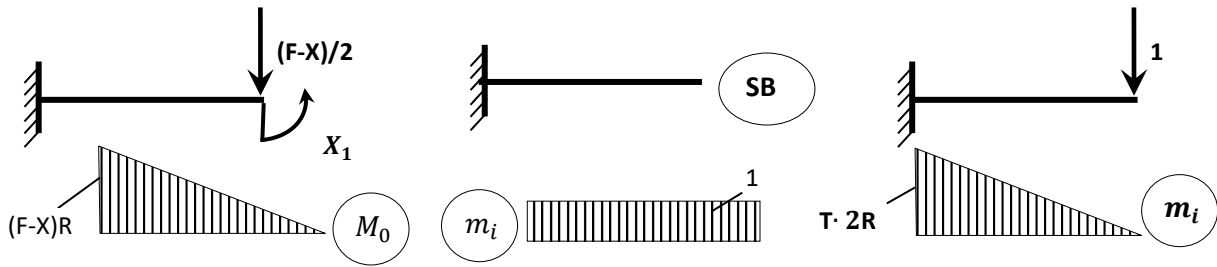
Cele două deplasări se vor exprima în funcție de X și va rezulta valoarea lui X.

Se notează $l=2R$.

Grinda (A-B) este static nedeterminată.

Sistemul echivalent pentru încărcarea simetrică este:





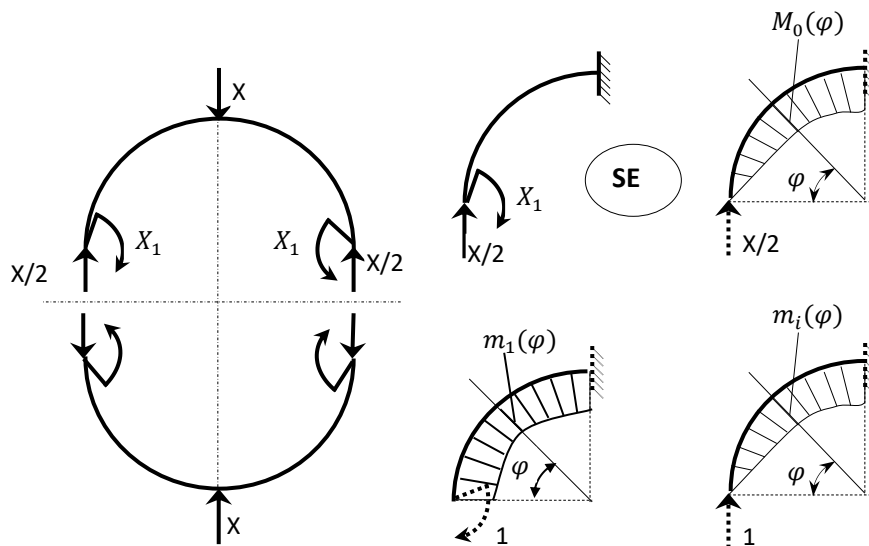
$$\Delta_{10} = \delta_{11} X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}};$$

$$EI \cdot \Delta_{10} = (F - x) \cdot R^2;$$

$$EI \cdot \delta_{11} = 2R; \Rightarrow X_1 = \frac{(F - X)R}{2}$$

$$\delta_{v,(c)} = \frac{EI}{2} \left[(F - X)R^2 \cdot \frac{4}{3}R - (F - X)R^2 \cdot R \right] = \frac{(F - X)R^3}{3EI}$$

Inelul cu raza R este un sistem static nederminat interior (contur închis) care prezintă dublă simetrie.



$$M_0(\varphi) = \frac{X}{2} \cdot R(1 - \cos\varphi); \quad m_1(\varphi) = 1$$

$$EI\Delta_{10} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{X \cdot R}{2} (1 - \cos\varphi) \cdot 1 \cdot R d\varphi = \frac{X R^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 0,2854 R^2 \cdot X$$

$$EI\varphi_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1^2 \cdot R d\varphi = \frac{\pi}{2} R = 1,5708 R; \Rightarrow X_1 = -0,1817 R \cdot X$$

$$\delta_{v,(c')} = \frac{2}{EI} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{X}{2} R^3 [1 - \cos\varphi]^2 d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0,1817 R^3 \cdot X \cdot (1 - \cos\varphi) d\varphi \right] = 0,22316 \frac{X R^3}{EI}$$

$$\delta_{v(c)} = \frac{2xR^3}{EI} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right) - 0,1817 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right] = 0,22316 \frac{XR^3}{EI}$$

Egalând cele două deplasări =>

$$\frac{(F - X)R^3}{3EI} = 0,22316 \frac{XR^3}{EI} \Rightarrow F - X = 0,6695 X \Rightarrow F = 1,6695 X \Rightarrow X = 0,59898F \cong 0,6F$$

Deplasarea pe verticală a secțiunii (C) se obține prin introducerea valorii lui X (= 0,6 F) în una din cele două deplasări calculate anterior:

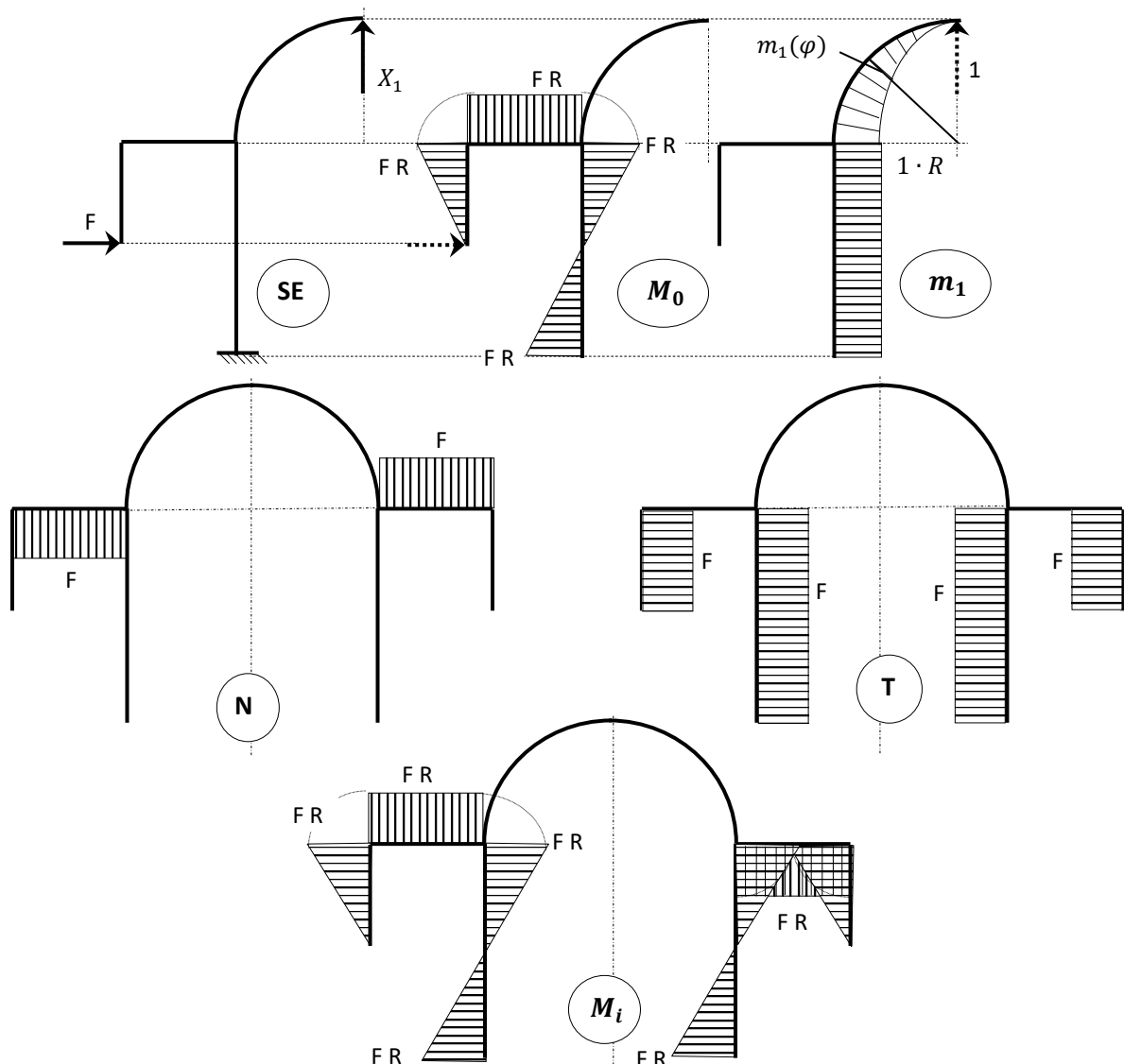
$$\delta_{v(c)} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{R^3}{3} (F - 0,6F) = \frac{0,4FR^3}{3EI} = 0,1(3) \frac{FR^3}{EI}$$

III)

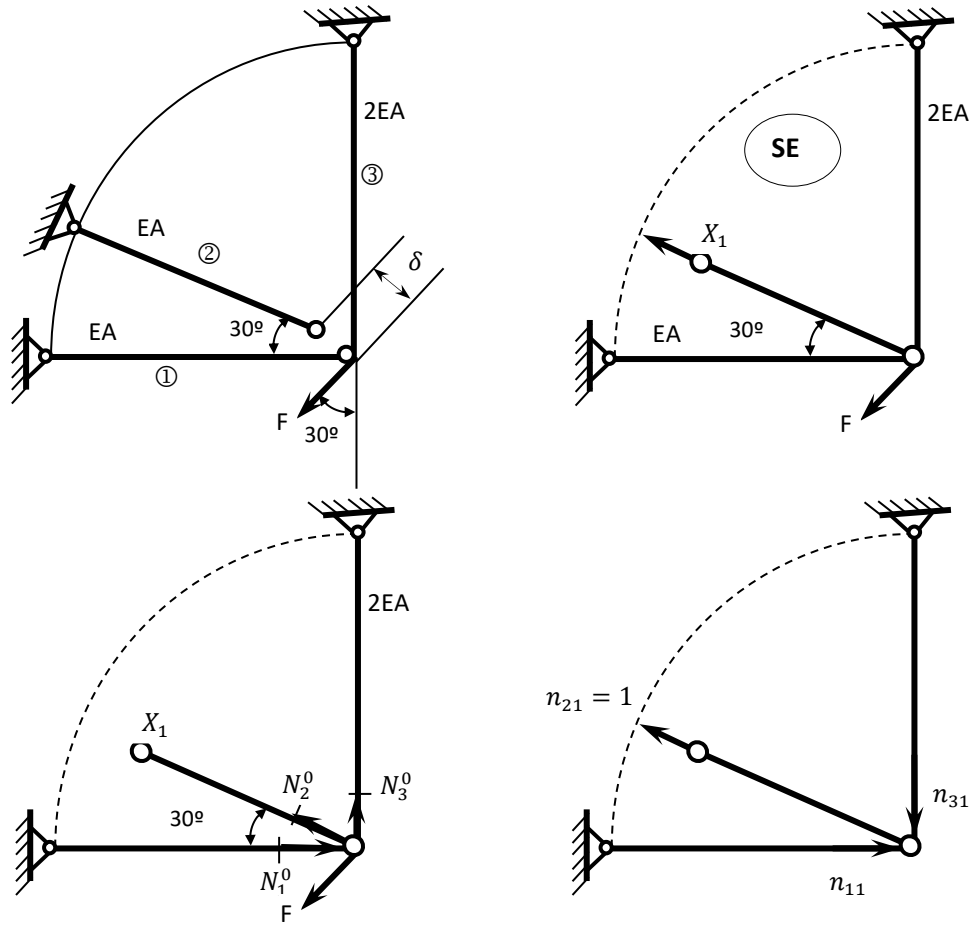
Sistemul real este simetric cu încărcare antisimetrică și ca urmare (SE) se poate alege ca fiind cel de mai jos, (gradul de nedeterminare fiind "1")

$$\Delta_{10} + \delta_{11}X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}}; \Delta_{10} = 0; \Rightarrow X_1 \equiv 0$$

Se vede că diagramele N și M_i sunt antisimetrice iar diagrama T este simetrică.



IV)



$$\Delta_{10} + \delta_{11}X_1 = \delta = 0,4 \text{ mm}$$

$$N_2^0 = 0; N_1^0 = F \cdot \sin 30^\circ = \frac{F}{2}; n_{21} = 1; N_3^0 = F \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}F; n_{31} = \frac{1}{2};$$

$$n_{11} = \frac{\sqrt{3}}{2}; n_{21} = 1; n_{31} = \frac{1}{2};$$

$$\Delta_{10} = \frac{\ell}{EA} \left[\frac{F}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}F \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{\sqrt{3}F\ell}{8EA}$$

$$\delta_{11} = \frac{\ell}{EA} \left[1^2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right] = \frac{15\ell}{8EA}$$

$$X_1 = \frac{\delta}{\delta_{11}} - \frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{0,4 \cdot EA \cdot 8}{\ell \cdot 15} - \frac{\sqrt{3}F}{15}$$

$$X_1 = 2986,6(6) - \frac{\sqrt{3}}{15}F \Leftrightarrow N_2 = 2986,6(6) - \frac{\sqrt{3}}{15}F; N_1 = N_1^0 + n_{11} \cdot [2986,6(6) - \frac{\sqrt{3}}{15}F]$$

$$N_3 = N_3^0 - \frac{1}{2} \left(2986,6(6) - \frac{\sqrt{3}}{15}F \right); N_1 = 0,4F + 2586,53; N_3 = 0,92376F - 1493,3(3)$$

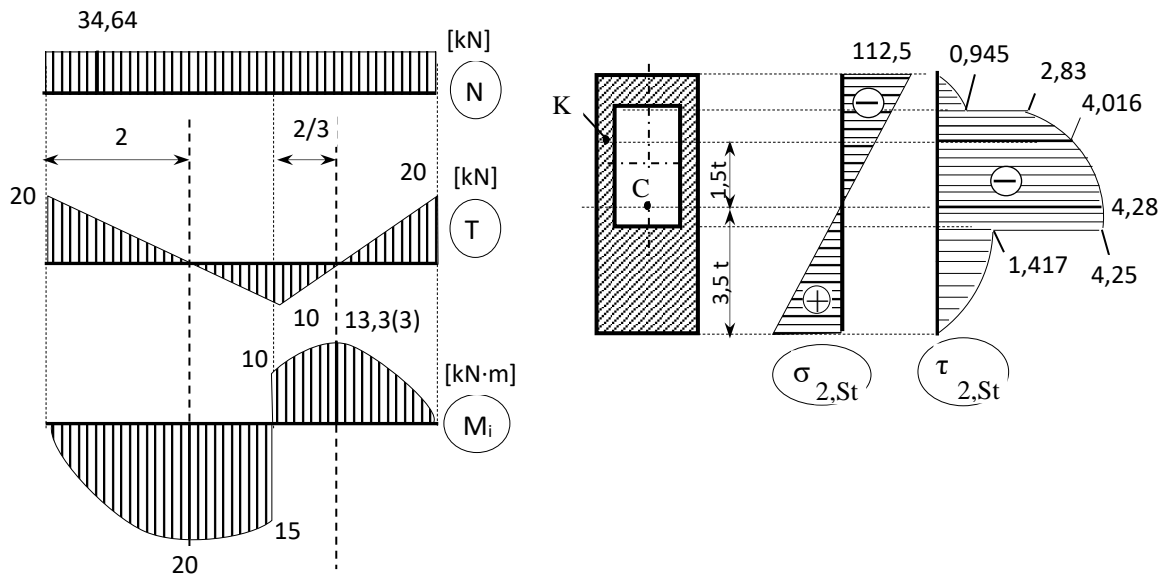
$$F_{1cap} = 23534 [N]; F_{2cap} \Rightarrow \text{din: } \frac{2986,6(6)}{80} + \frac{\sqrt{3}}{15} \cdot \frac{F}{80} = 150 \Rightarrow F_{2cap} = 78,058[N];$$

$$F_{3cap} = 27597[N]$$

$$F_{cap} = \min(23534; 78058; 27597) = 23534 \text{ N}$$

Locală 1989

I)

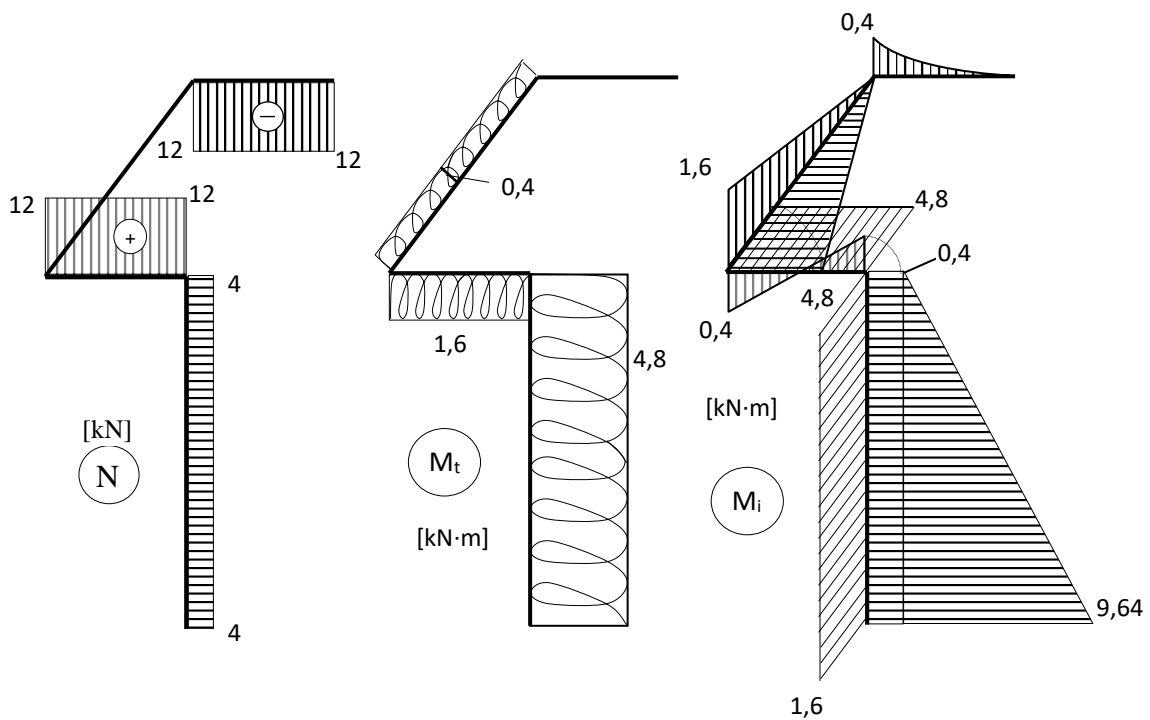


$$y_C = 3,5 t; I_z = 210,67 t^4; W_{z,min} = \frac{I_z}{4,5 t} = 46,815 t^3; W_{z,max} = \frac{I_z}{3,5 t} = 60,191 t^3$$

$$\text{Din } (M_i) \Rightarrow M_{i,max} = 20 \text{ kNm} \Rightarrow 46,815 t^3 = \frac{20 \cdot 10^6}{150} \Rightarrow t_{nec} = 14,175 \text{ mm} \Rightarrow t_{ef} = 14,2$$

$$y_K = 1,5 t \Rightarrow \sigma_{K(2)}^{st} = -37,5 \text{ MPa}; b_K = 2 t; S_{z,K} = 34 t^3 \Rightarrow \tau_{K(2)}^{st} = -4,016 \text{ MPa};$$

II)



Dimensionarea se face impunându-se condiția de rezistență în secțiunea cea mai solicitată: (5).

Se obține:

$$M_{i,(5)} = \sqrt{10^2 + 1,6^2} = 10,127;$$

$$M_{i,ech,(5)} = \sqrt{M_{1,(5)}^2 + M_t^2} = 11,207 \text{ kNm} \Rightarrow$$

$$d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 11,207 \cdot 10^6}{\pi \cdot 100}} = 104,5 \text{ mm} \Rightarrow d_{ef} = 105 \text{ mm}$$

Se verifică apoi ținând cont și de $N = -4 \text{ kN}$:

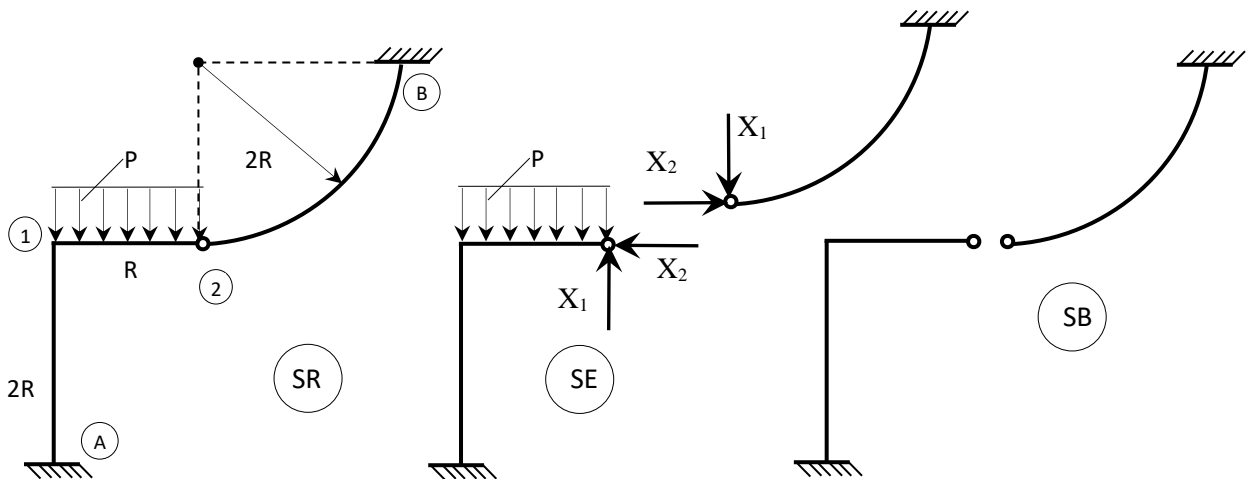
$$\sigma_N = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 4}{\pi \cdot 105^2} = 0,462 \text{ MPa};$$

$$\sigma_{M_i} = \frac{10,1272 \cdot 10^6 \cdot 32}{\pi \cdot 105^3} = 89,11 \text{ MPa}; \Rightarrow \sigma_t = 89,571 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = \frac{4,8 \cdot 10^6 \cdot 16}{\pi \cdot 105^3} = 21,12 \text{ MPa}$$

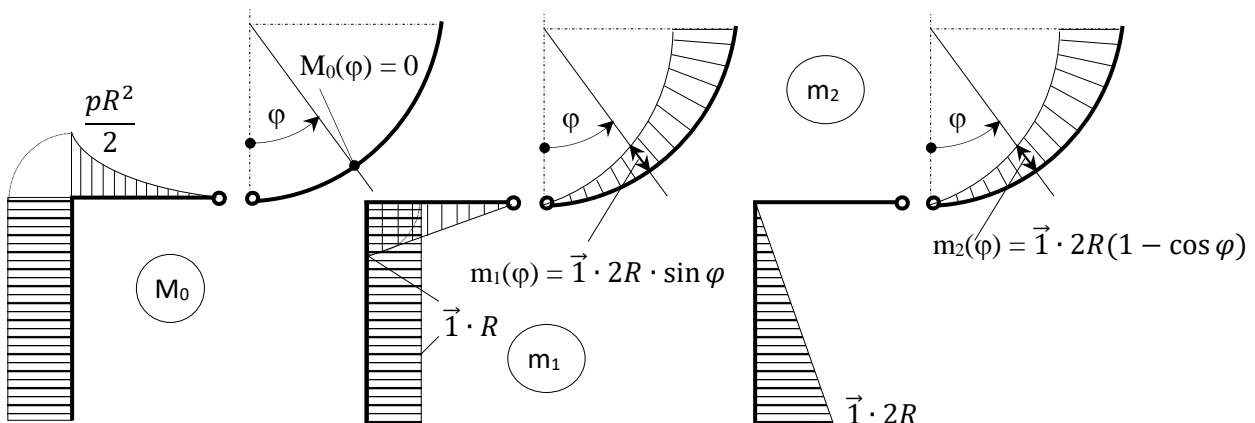
$$\Rightarrow \sigma_{ech(3)} = \sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau^2} = 99,03 \text{ MPa} < \sigma_a = 100 \text{ MPa}$$

III)



Condiția ca sistemul real (SR), dublu static nedeterminat, să fie echivalent cu cel static determinat (SE), este:

$$\Delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \quad \text{și} \quad \Delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0$$



$$EI\Delta_{10} = -\frac{pR^3}{6} \cdot \frac{3R}{4} - pR^3 \cdot R = -\frac{9}{8}pR^4; \quad EI\Delta_{20} = -pR^3 \cdot R = -pR^4$$

$$EI\delta_{11} = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{2R}{3} + 2R^2 \cdot R + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8R^3 \sin^2 \varphi d\varphi = \left(\frac{7}{3} + 2\pi\right) R^3 = 8,6165 R^3$$

$$EI\delta_{22} = 2R^2 \cdot \frac{4R}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8R^3 (1 - \cos\varphi)^2 = \left[\frac{8}{3} + 8\left(\frac{3\pi}{4} - 2\right)\right] R^3 = 5,516 R^3$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = 2R^2 \cdot R + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2R \sin\varphi \cdot 2R(1 - \cos\varphi) \cdot 2R d\varphi = 6 R^3$$

$$\Rightarrow 8,6165X_1 + 6X_2 = 1,125pR \qquad \Rightarrow X_1 = 0,018 pR$$

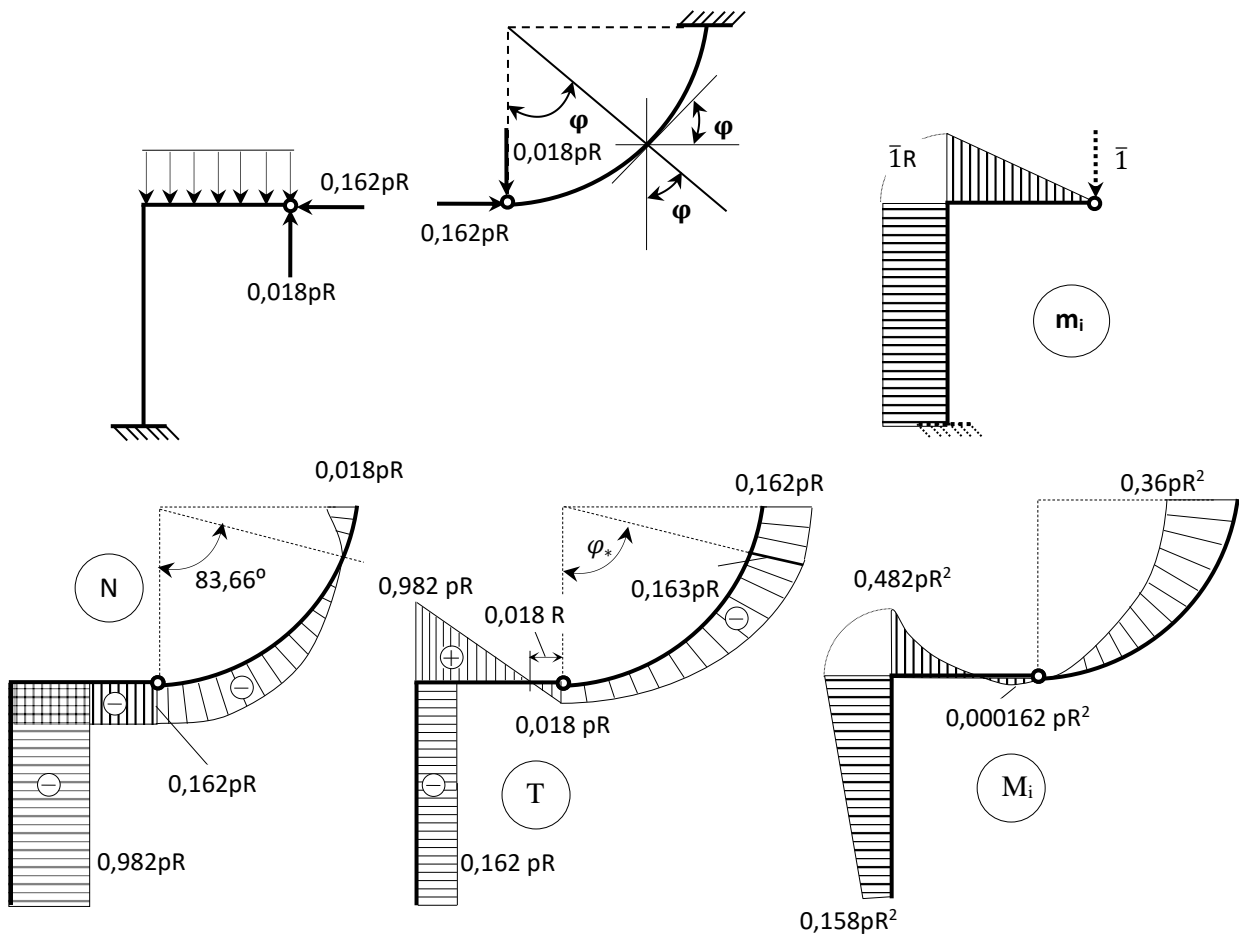
$$6X_1 + 5,676X_2 = pR \qquad X_2 = 0,162 pR$$

$$T(\varphi) = -0,018pR \cos\varphi - 0,162pR \sin\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi_* = -\frac{0,018}{0,162} = -0,11(1) \Rightarrow \varphi_* = -6,34[^\circ]$$

$$M_i(\varphi) = 0,018pR \cdot 2R \sin\varphi + 0,162pR \cdot 2R(1 - \cos\varphi); \quad \text{Dacă } \varphi = 0 \Rightarrow 0; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

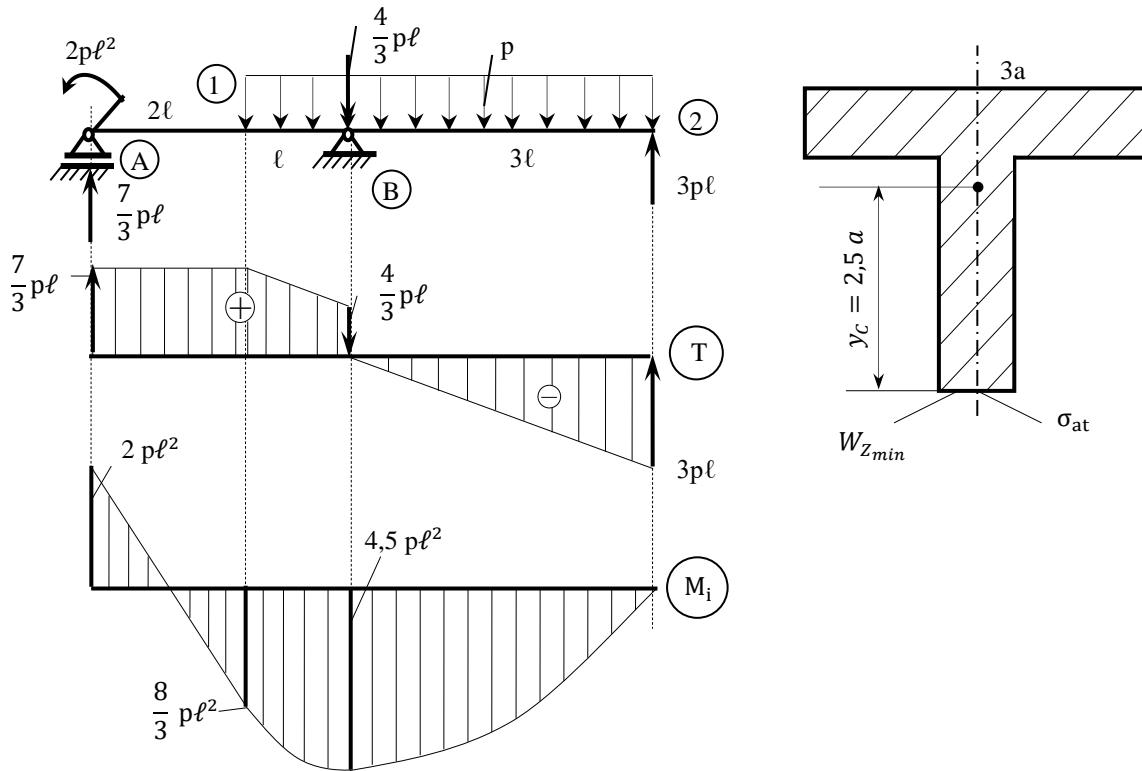
$$\delta_{v,2} = \frac{1}{EI} \left(\frac{pR^3}{6} \frac{3}{4} R + pR^3 R - \frac{R^2}{2} 0,018pR \frac{2}{3} R - 2R^2 0,018pR R - 2R^2 0,162pR R \right)$$

$$\delta_{v,2} = 0,759 \frac{pR^4}{EI}$$



Locală 1990

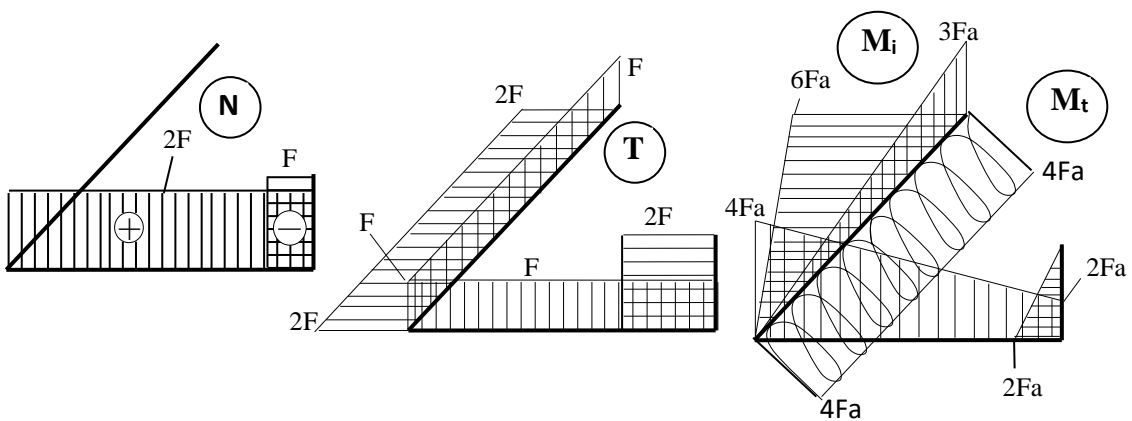
I)



$$V_A = \frac{7}{3} p\ell; \quad V_B = \frac{4}{3} p\ell; \quad y_C = 2,5a; \quad I_z = 8,5a^4; \quad W_{z_{min}} = 3,4a^3; \quad W_{z_{max}} = 5,6(6)a^3;$$

$$M_{i_{max}} = 4,5 \cdot p \cdot 10^6 = W_{z_{min,ef}} \cdot \sigma_{at}; \Rightarrow p_{cap} = \left(\frac{4,5 \cdot 10^3}{40 \cdot 3,4} \right) = 0,03 \frac{N}{mm}$$

II)



Secțiunea periculoasă este: (4):

$$M_i = Fa\sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} Fa;$$

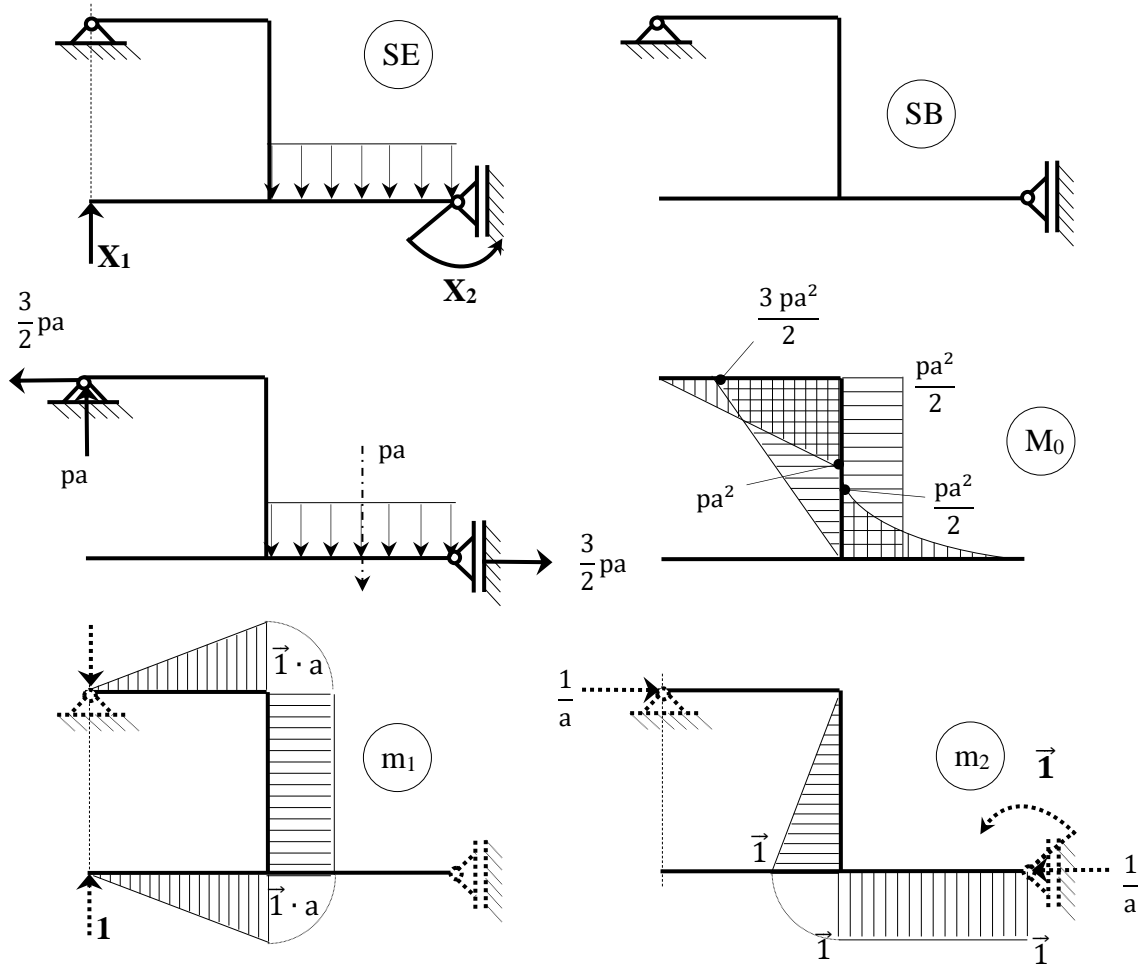
$$M_{i,ech(3)} = Fa\sqrt{45 + 16} = \sqrt{61} Fa;$$

$$W_{z,nec} = \frac{\pi \cdot d_{nec}^3}{32} = \frac{\sqrt{61} \cdot Fa}{150}$$

$$\Rightarrow d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot \sqrt{61} \cdot 25 \cdot 10^3 \cdot 200}{150\pi}} = 138,41 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow d_{ef} = 139 \text{ mm}$$

III)



$$EI \delta_{11} = 2 \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2}{3} a + a^2 \cdot a = \frac{5}{3} a^3;$$

$$EI \delta_{22} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} + a \cdot 1 = \frac{4}{3} a;$$

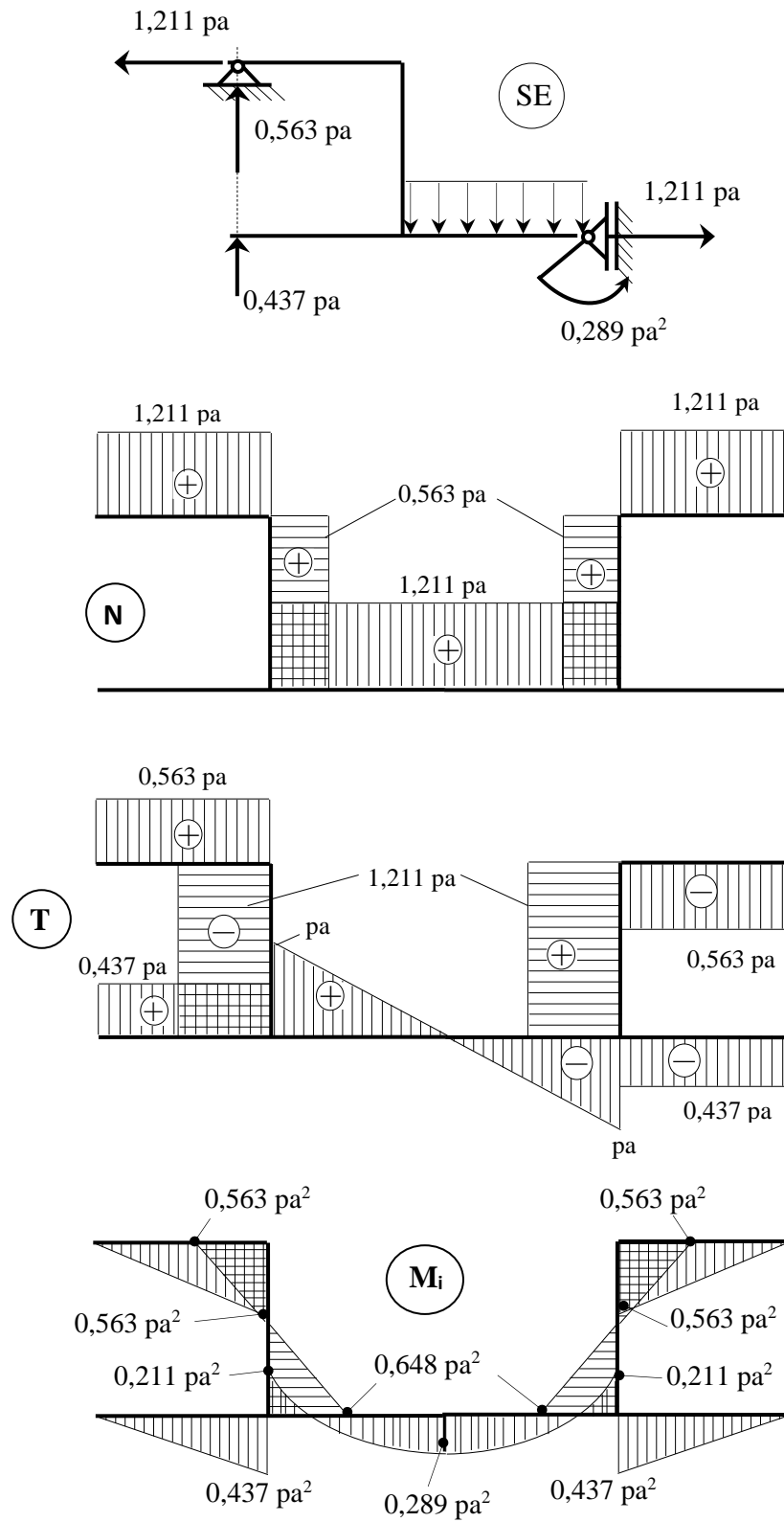
$$EI \delta_{12} = EI \delta_{21} = \frac{-a^2}{2}$$

$$\frac{5}{3} a^3 X_1 - \frac{a^2}{2} X_2 = \frac{7}{12} p a^4;$$

$$-\frac{a^2}{2} X_1 + \frac{4}{3} a X_2 = \frac{p a^3}{6} \Leftrightarrow 20 a X_1 - 6 X_2 = 7 p a^2; \text{ și } -3 a X_1 + 8 X_2 = p a^2$$

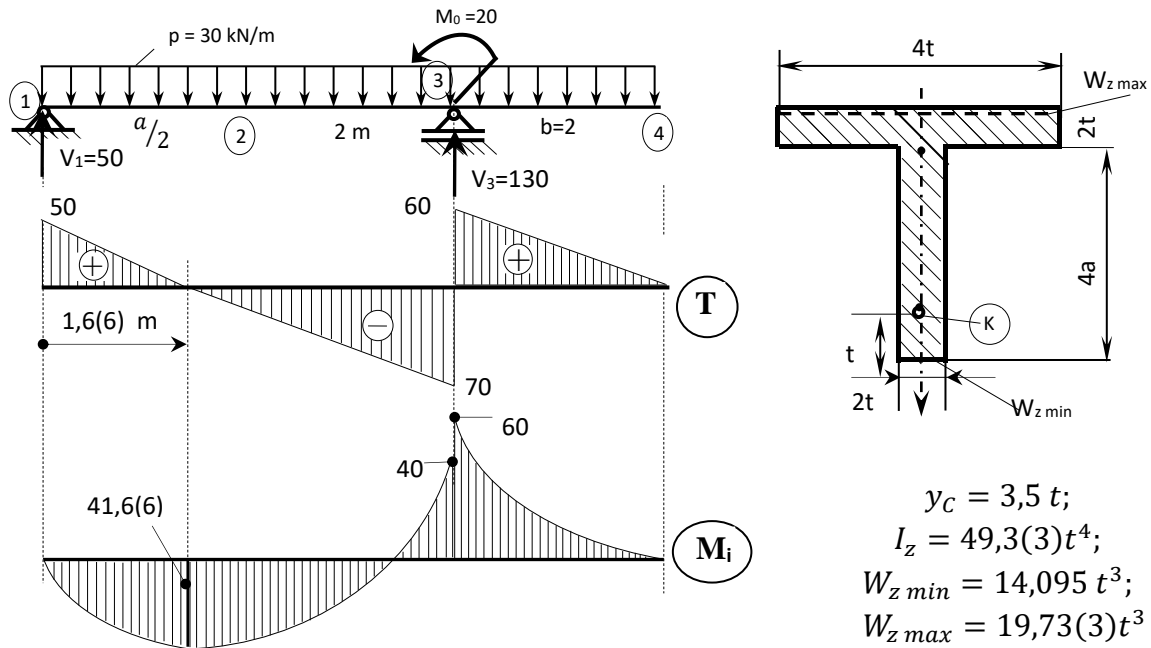
$$\Rightarrow X_1 = \frac{31}{71} p a = 0,437 p a;$$

$$X_2 = \frac{164}{8 \cdot 71} p a^2 = 0,289 p a^2$$



Locală 1992

I)



Așezarea economică este aceea pentru care în secțiunea cu $M_{i,max} = 60$ kNm, adică (3), fibrele întinse ale profilului au modul de rezistență maxim $W_{z,max}$.

$$\sigma_{max,t} = \max\left(\frac{60 \cdot 10^6}{W_{z\ max}}; \frac{41,6(6) \cdot 10^6}{W_{z\ min}}\right) = \max\left(\frac{3 \cdot 10^6}{t^3}; \frac{2,96 \cdot 10^6}{t^3}\right)$$

$$\sigma_{max,t} = \frac{3 \cdot 10^6}{t^3} = 30 \Rightarrow t_{nec,t} = 46,62 \text{ mm}; \quad \sigma_{max,c} = \frac{60 \cdot 10^6}{14,095 t^3} = 90 \Rightarrow t_{nec,c} = 36,16 \text{ mm}$$

$$t_{nec} = \max(46,62; 36,16) = 46,62 \Rightarrow t_{ef} = 47 \text{ mm}$$

$$M_{i,2} = 50 \cdot 2 - 30 \cdot 2 = 40 \text{ kNm}; \quad y_K = 2,5 t; \quad T_2 = -10 \text{ kN}; \quad S_{z,K} = 6 t^3; \quad b_K = 2t \Rightarrow$$

$$\sigma_K = \frac{40 \cdot 10^6}{49,3(3) \cdot 47^4} \cdot 2,5 \cdot 47 = 19,52 \text{ MPa}; \quad \tau_K = \frac{-10 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 47^3}{2 \cdot 47 \cdot 49,3(3) \cdot 47^4} = -0,27 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{19,52}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{19,52^2 + 4 \cdot 0,27^2} \Rightarrow \sigma_1 = 19,524; \quad \sigma_2 = -0,004 \text{ MPa}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \arctg\left(-\frac{2 \cdot (-0,27)}{19,52}\right) \Rightarrow \alpha_1 = 0,79^\circ; \quad \alpha_2 = 90,79^\circ$$

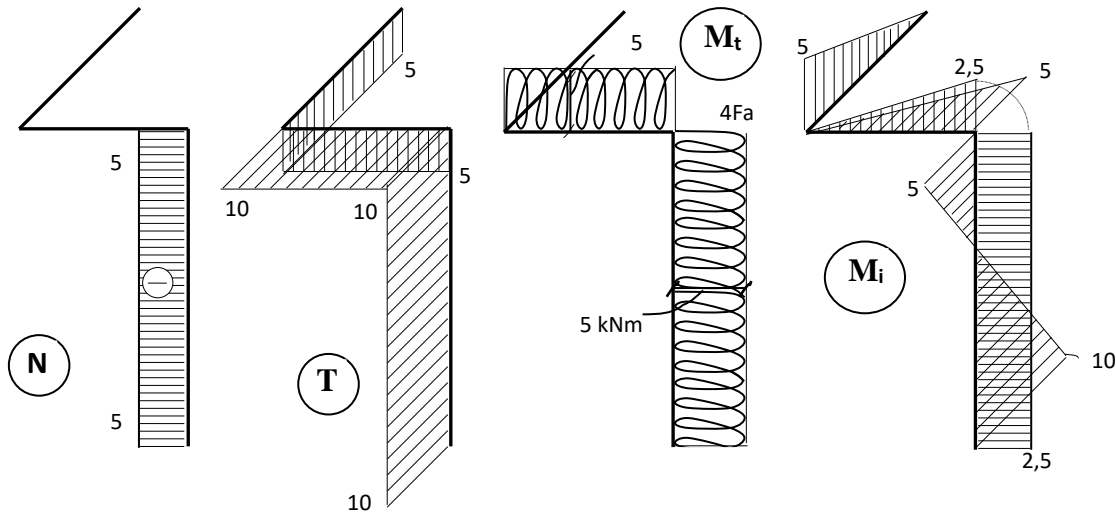
II)

$$d_{1\ nec} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 10^6 \cdot 32}{\pi \cdot 100}} = 79,86 \text{ mm}$$

$$\exists M_i = 5,59 \text{ si } M_t = 5 \Rightarrow M_{i,ech(3)} = 7,5 \text{ kNm} \Rightarrow d_{2\ nec} = 91,41 \text{ mm}$$

$$\exists M_{i,max} = 10,31 \text{ kNm}; \quad M_t = 5; \quad N = 5 \text{ kN} \Rightarrow M_{i,ech} = 11,456 \cdot 10^6 \Rightarrow d_{3,nec} = 105,28 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow d_{3ef} = 106 \text{ mm}$$

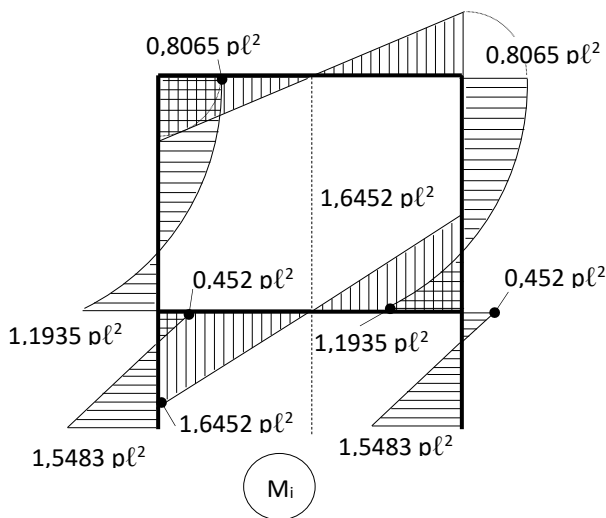
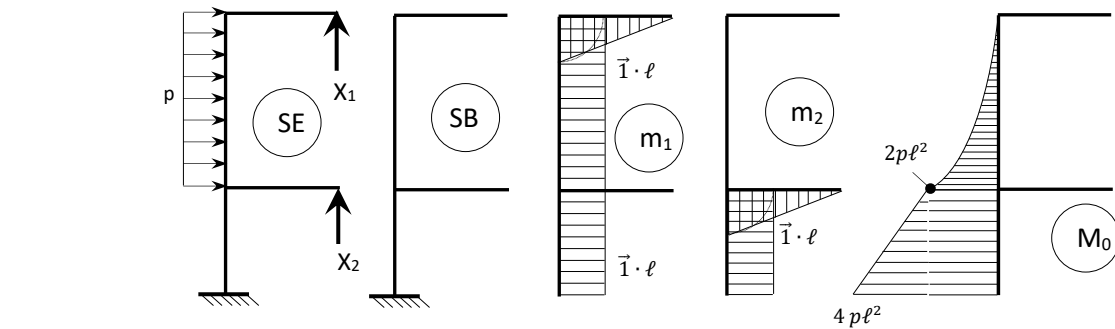


Verificare:

$$\sigma_N = \frac{5000 \cdot 4}{\pi \cdot 106^2} = 0,566; \sigma_{M_i} = 88,17 \Rightarrow \sigma_t = 88,74; \tau_{max} = \frac{5 \cdot 10^6 \cdot 16}{\pi \cdot 106^3} = 21,38 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow \sigma_{ech(3)} = 98,50 \text{ MPa} < 100 = \sigma_a$$

III)



$$\Delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 = 0;$$

$$\Delta_{20} + \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 = 0;$$

$$EI \Delta_{10} = -\frac{13}{3} p \ell^4;$$

$$EI \Delta_{20} = -3 p \ell^4;$$

$$EI \delta_{11} = \frac{\ell^2}{2} \cdot \frac{2\ell}{3} + 3\ell^2 \cdot \ell = \frac{10}{3} \ell^3;$$

$$EI \delta_{22} = \frac{\ell^2}{3} \cdot \ell + \ell^2 \cdot \ell = \frac{4}{3} \ell^3;$$

$$EI \delta_{12} = EI \delta_{21} = \ell^2 \cdot \ell = \ell^3$$

$$\frac{10}{3} \ell^3 \cdot X_1 + \ell^3 \cdot X_2 = \frac{13}{3} p \ell^4;$$

$$\text{și } \ell^3 \cdot X_1 + \frac{4}{3} \ell^3 \cdot X_2 = 3 p \ell^4$$

$$\Rightarrow X_1 = 0,8065 p \ell;$$

$$X_2 = 1,6452 p \ell$$

Locală 1993

I) Secțiunea periculoasă: ÎNCASTRAREA

$$N_4 = 4F \Rightarrow \sigma_N = \frac{16F}{\pi d^2};$$

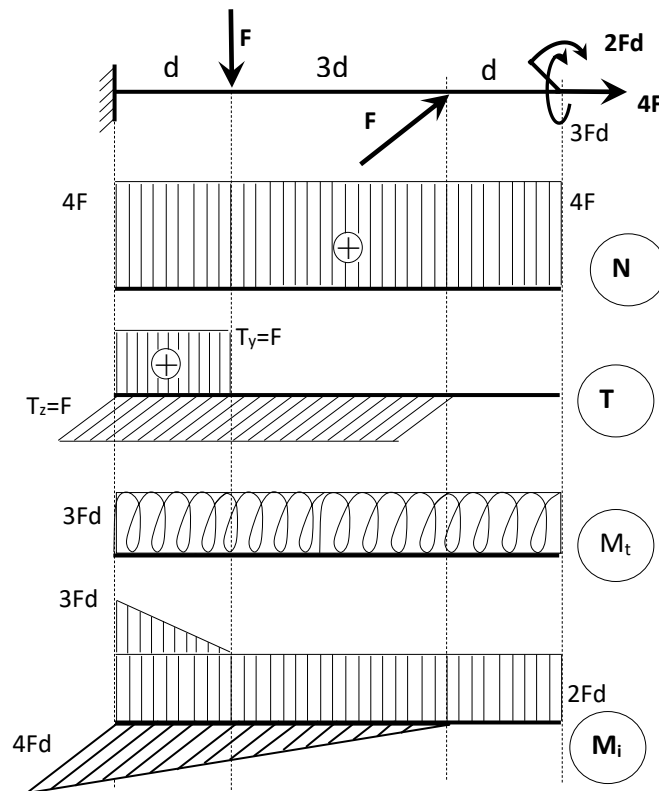
$$M_{i(4)} = 5Fd \Rightarrow \sigma_{M_{i,max}} = \frac{16F}{\pi d^2} \cdot 10;$$

$$M_t = 3Fd \Rightarrow \tau_{max} = \frac{16F}{\pi d^3} \cdot 3$$

$$\sigma_{ech(5)} = \frac{16F}{\pi d^2} \sqrt{(1+10)^2 + 3 \cdot 3^2} = \frac{12,1655 \cdot 16 \cdot F}{\pi d^2} = 0,0387F$$

$$\Rightarrow F_{cap} = 2507,26 N$$

$$\Rightarrow F_{ef} = 2507 N$$



II)

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_6 = \frac{F\ell^2}{2};$$

$$\Omega_3 = \Omega_4 = \Omega_5 = F\ell^2;$$

$$\Omega_7 = \Omega_8 = F\ell^2$$

$$m_{C1} = m_{C2} = \frac{2}{3}\ell;$$

$$m_{C3} = m_{C4} = \bar{1} \cdot \ell;$$

$$m_{C7} = m_{C8} = \bar{1} \cdot \ell;$$

$$m_{C6} = \frac{5}{3}\ell; m_{C5} = \frac{3}{2}\ell$$

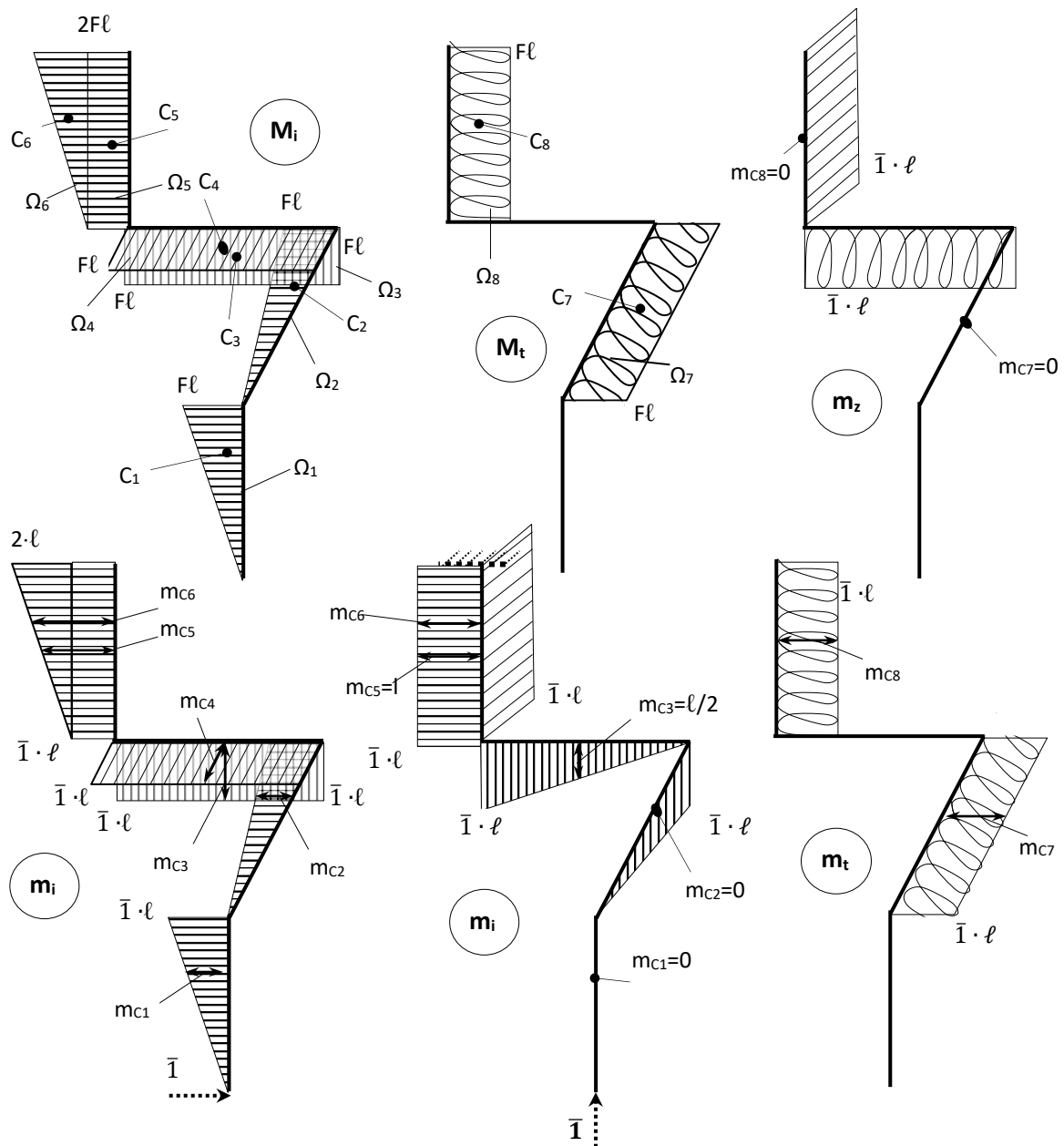
$$\delta_{h(1)} = \frac{1}{EI} \left[\frac{F\ell^2}{2} \left(2 \cdot \frac{2}{3}\ell + \frac{5}{3}\ell \right) + F\ell^2 \left(2 \cdot \ell + \frac{3}{2}\ell \right) \right] + \frac{1}{GI_p} (2F\ell^2 \cdot \ell)$$

$$\delta_{h(1)} = \frac{F\ell^3}{EI} \left[\frac{2}{3} + \frac{5}{12} + 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{0,8} \cdot 2 \right]$$

$$\delta_{h(1)} = \frac{7,5F\ell^3}{EI}$$

$$\delta_{v(1)} = \frac{1}{EI} \left(F\ell^2 \cdot \frac{\ell}{2} + F\ell^2 \cdot \ell + \frac{F\ell^2}{2} \cdot \ell \right)$$

$$\delta_{v(1)} = \frac{2F\ell^3}{EI}$$



III)

$$M_0(\varphi_1) = \frac{F}{2}R[1 - \cos \varphi_1]; m_1(\varphi_1) = -\bar{1} R \cdot \sin \varphi_1;$$

$$EI\Delta_{10} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{FR}{2} [1 - \cos \varphi] \cdot (-R \sin \varphi) \cdot R d\varphi = -FR^3 \left[-\cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] = -\frac{FR^3}{2}$$

$$EI\delta_{11} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin^2 \varphi R d\varphi = 2R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = 2R^3 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi R^3}{2}$$

$$X_1 = \frac{FR^3}{2} \cdot \frac{2}{\pi R^3} = \frac{F}{\pi}$$

$$\delta_{v(2)} = \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{FR}{2} (1 - \cos \varphi) - \frac{F}{\pi} R \sin \varphi \right] \frac{R}{2} (1 - \cos \varphi) R d\varphi$$

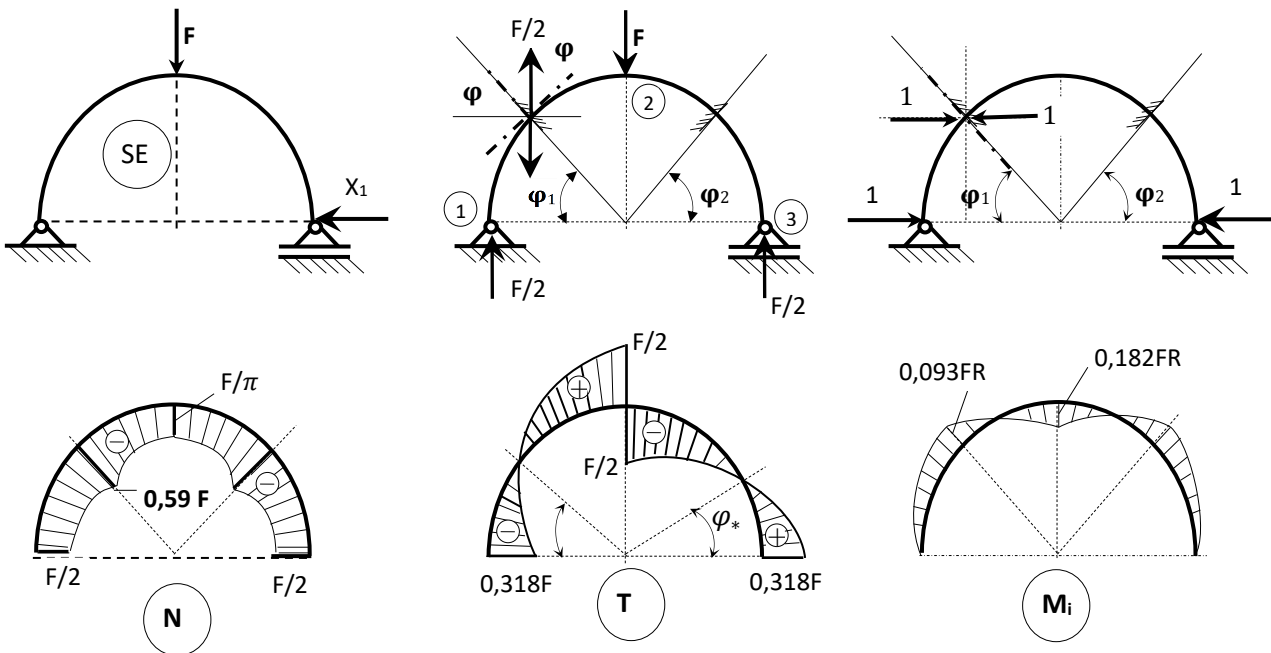
$$\delta_{v(2)} = \frac{2}{EI} \cdot \frac{FR^3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos \varphi}{2} - \frac{\sin \varphi}{\pi} \right) \cdot (1 - \cos \varphi) d\varphi = 1,197 \frac{FR^3}{EI}$$

$$T(\varphi) = \frac{F}{2} \sin \varphi - \frac{F}{\pi} \cos \varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \varphi_* = 32,48$$

$$N(\varphi) = -\frac{F}{2} \cos \varphi - \frac{F}{\pi} \sin \varphi \Rightarrow N(0) = -\frac{F}{2}; N(\varphi_*) = 0,59 F; N(\pi/2) = -\frac{F}{\pi}$$

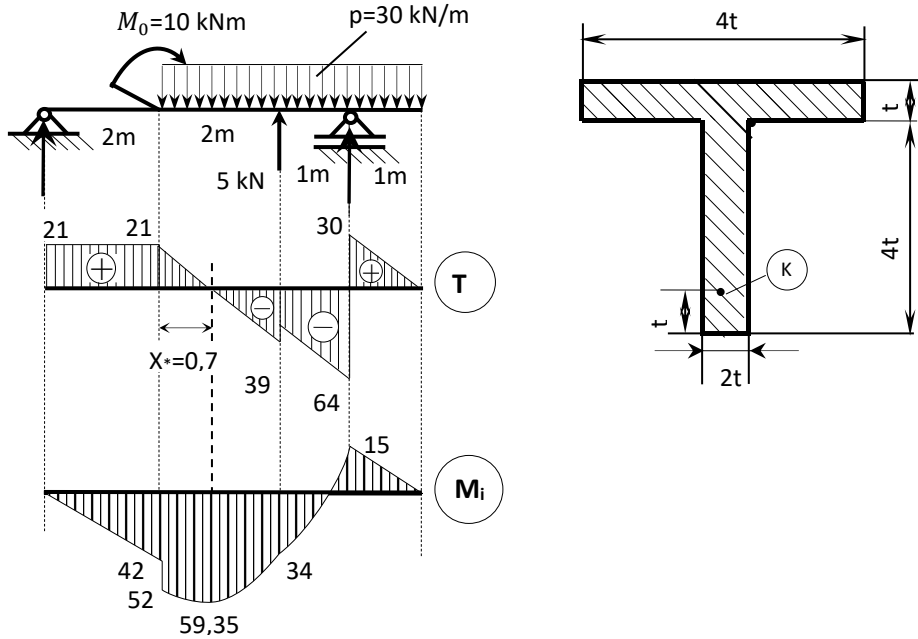
$$M_i(\varphi) = \frac{FR}{2} (1 - \cos \varphi) - \frac{F}{\pi} R \sin \varphi \Rightarrow M_i(0) = 0; M_i(\varphi_*) = -0,09 FR;$$

$$M_i(\pi/2) = 0,182 FR$$



Locală 1994

I)



$$V_A = 21 \text{ kN}; V_B = 94 \text{ kN};$$

$$y_C = 2,8(3) t; I_z = 27,6(6) t^4; W_{z \min} = 9,7647 t^3; W_{z \max} = 12,76923 t^3;$$

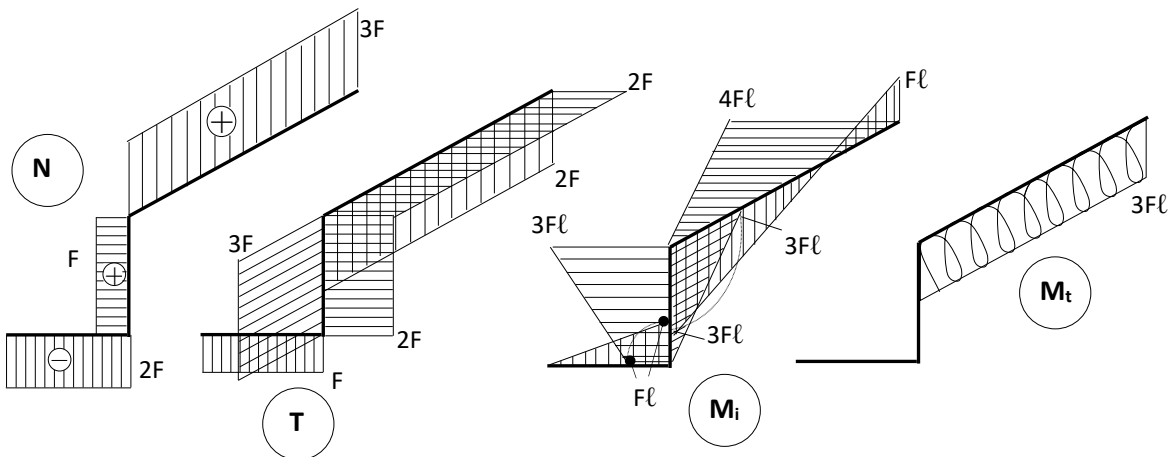
$$\text{a) } \sigma_{\max,t} = \frac{59,35 \cdot 10^6}{W_{z \min}} \leq \sigma_{at}; \quad \sigma_{\max,c} = \frac{59,35 \cdot 10^6}{W_{z \max}} < \sigma_{\max,t}$$

$$\sigma_{\max,t} = \frac{59,35 \cdot 10^6}{W_{z \max}} < \sigma_{\max,t} \Rightarrow \text{asezarea optima este cea inversa fata de cea din figura}$$

$$W_{z \min, nec} = \frac{59,35 \cdot 10^6}{30} = 9,7647 t^3 \Rightarrow t_{nec} = 58,73 \text{ mm} \Rightarrow t_{ef} = 59 \text{ mm}$$

$$\text{b) } T_{\max} = -64 \cdot 10^3 \text{ N}; S_{z,K} = 2t^2 \cdot 2,33(3)t = 4,6(6)t^3; b_K = 2t \Rightarrow \tau_K = -1,55 \text{ MPa}$$

II)



$$M_{i(3)_{2-3}} = 3\sqrt{2}F\ell = 4,243F\ell; M_{i(4)} = 4,123F\ell; M_{i \text{ ech}(3)} = 5,099F\ell;$$

$$W_{z nec} = \frac{M_{i ech(3)}}{\sigma_a} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{5,099 \cdot 10^4 \cdot 500 \cdot 32}{\pi \cdot 120}} = 129,35 \text{ mm} \Rightarrow d_{ef} = 130 \text{ mm}$$

Verificăm ținând cont și de $N = 3F$

$$\sigma_N = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 4}{\pi \cdot 130^2} = 2,26; \sigma_{M_i} = 95,577 \text{ MPa};$$

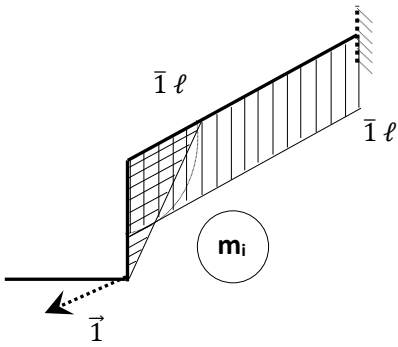
$$\sigma_t = 97,837 \text{ MPa};$$

$$\sigma_{ech(3)} = 120,035 \text{ MPa} \cong \sigma_a = 120 \text{ MPa};$$

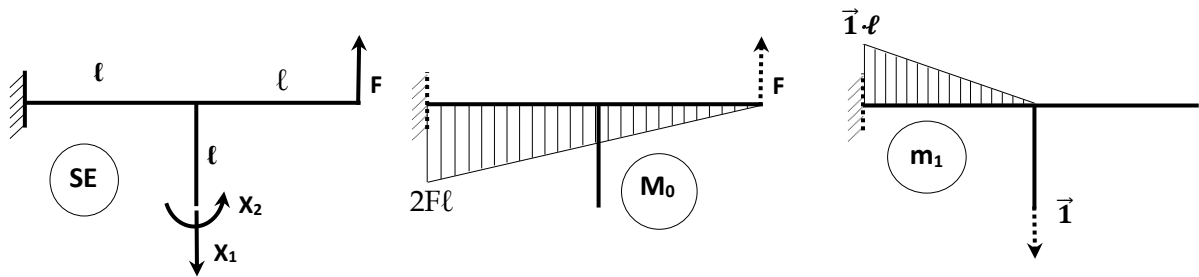
$$\tau_{max} = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 500 \cdot 16}{\pi \cdot 130^3} = 34,772 \text{ MPa}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} 3F\ell \cdot \ell \cdot \frac{2}{3} \ell + \frac{1}{2} 3F\ell \cdot 1,5\ell \cdot \bar{1} \cdot \ell - \frac{1}{2} F\ell \cdot 0,5\ell \cdot \ell \right)$$

$$\delta_2 = \frac{3F\ell^3}{EI} = 1,2737 \text{ mm}$$



III)

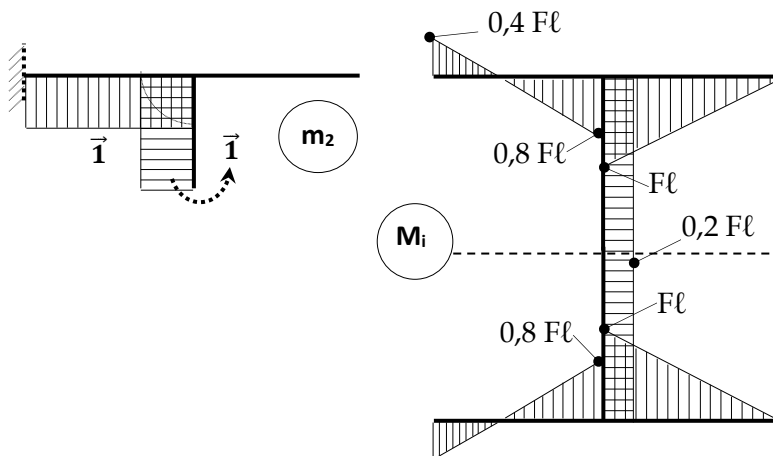


$$EI \cdot \Delta_{10} = -F\ell^2 \cdot \frac{l}{2} - \frac{F\ell^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l = -\frac{5}{6} F\ell^3;$$

$$EI \cdot \Delta_{20} = F\ell^2 + \frac{F\ell^2}{2} = \frac{3}{2} F\ell^2;$$

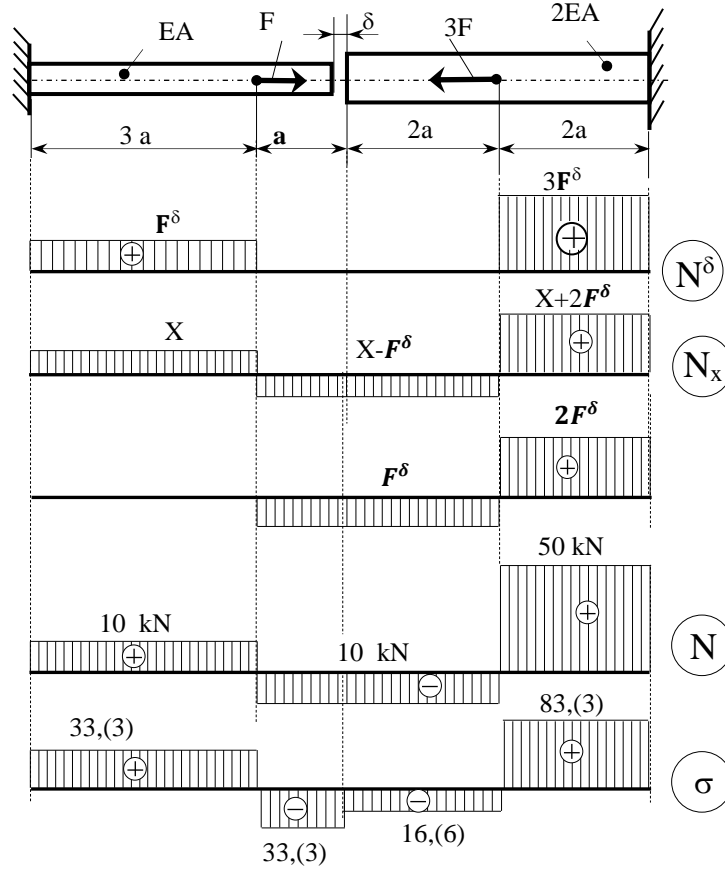
$$EI\delta_{11} = \frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{3}; EI\delta_{22} = 2l; EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = -\frac{l^2}{2};$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{28}{5} F = 5,6F; X_2 = -\frac{1}{5} F\ell;$$



Locală 1995

I)

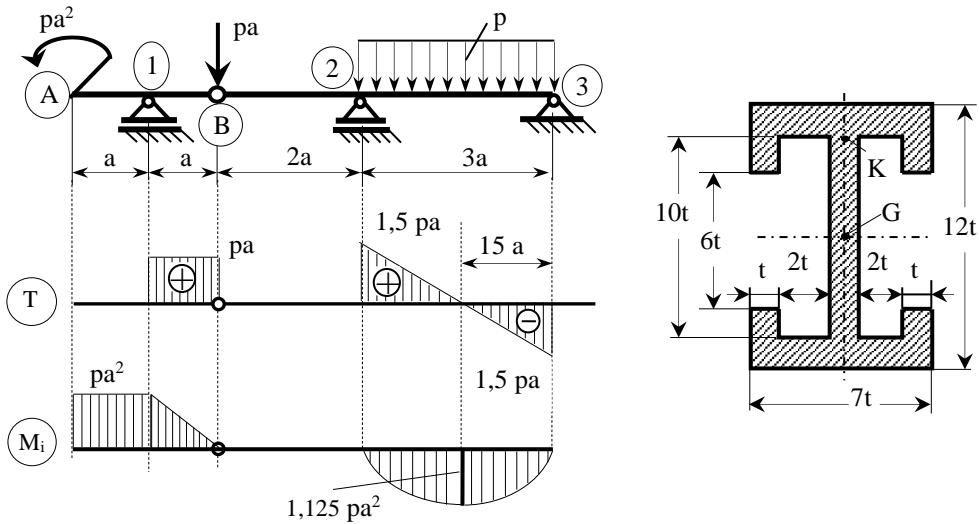


$$\Delta l_{12} + \Delta l_{45} = 0,4 \text{ mm}; \Rightarrow \frac{F^\delta 3a}{EA} + \frac{3 F^\delta 2a}{2 EA} = 0,4 \text{ mm} \Rightarrow F^\delta = 10^4 \text{ N}$$

$$\Delta l_{15} = 0 \Leftrightarrow \frac{X \cdot 3a}{EA} + \frac{(X - F^\delta) \cdot a}{EA} + \frac{(X - F^\delta) \cdot 2a}{2 EA} + \frac{(X + 2F^\delta) \cdot 2a}{2 EA} = 0$$

$$X = 0 \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{5 \cdot 10^4}{600} = +83, (3) \text{ MPa}$$

II)



Rezolvare: *y_c – nu se calculează (simetrie)*

$$I_z = 638,6(6)t^4 \quad W_{z \min} = 106,4(4)t^3$$

$$t_{nec} = 8,15 \text{ [mm]} \Rightarrow t_{ef} = 8,2 \text{ [mm]} \quad \sigma_{K,max} = -125 \text{ [MPa]}$$

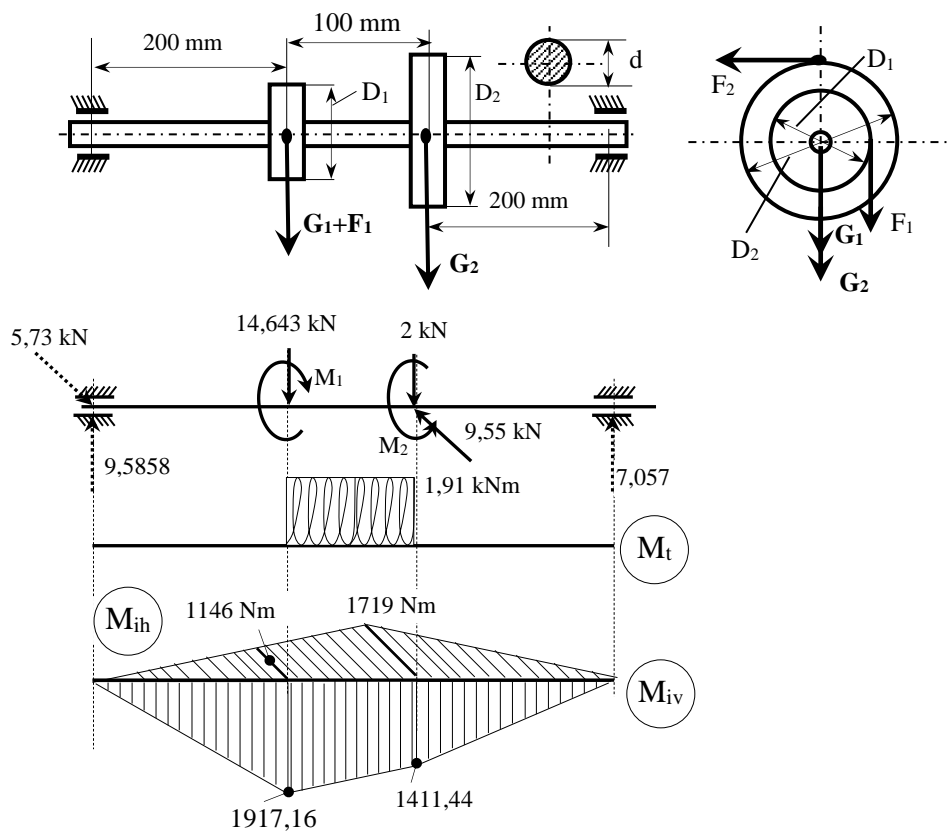
$$S_{z,k} = 7t^2 \cdot 5,5t = 38,5t^3 \quad b_k = 3t$$

$$\Rightarrow \tau_{K,max} = 4,3 \text{ [MPa]}, \rightarrow 4,356 \text{ pentru } t_{nec} = 8,15 \text{ [mm]}$$

$$S_{z,max} = 67t^3 \quad b_G = t$$

$$\Rightarrow \tau_{max} = 22,46 \text{ [MPa]}, \rightarrow 22,74 \text{ pentru } t_{nec} = 8,15 \text{ [mm]}$$

III)



$$M_t = 9,55 \frac{P}{n} = 1,91 \text{ kNm};$$

$$M_1 = F_1 \frac{D_1}{2} = F_1 \cdot 120 \equiv M_t \Rightarrow F_1 = 13,643 \text{ kN};$$

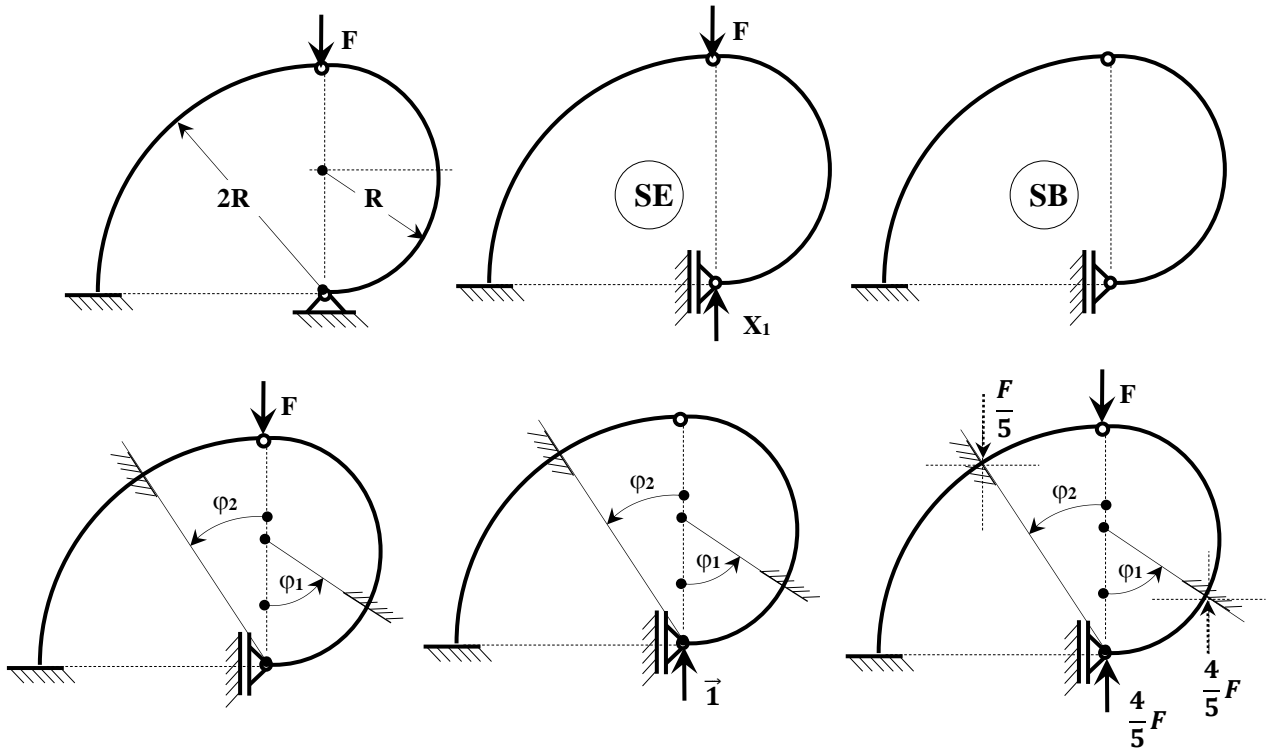
$$M_2 = F_2 \frac{D_2}{2} = F_2 \cdot 200 \equiv M_t \Rightarrow F_2 = 9,55 \text{ kN}$$

$$M_{i,(1)} = 2233,5663 \text{ Nm};$$

$$M_{i,(2)} = 2224,2131 \text{ Nm};$$

$$\Rightarrow M_{i,echIII} = 2938863 \text{ Nmm} \Rightarrow d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{2938863 \cdot 32}{160 \cdot \pi}} = 57,19 \text{ mm}$$

IV)



Condiția de echivalență:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{10} = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}};$$

$$M_0(\varphi_1) \equiv 0; M_0(\varphi_2) = -F \cdot 2R \sin \varphi_2;$$

$$m_1(\varphi_1) = \vec{1} \cdot R \sin \varphi_1;$$

$$m_1(\varphi_2) = \vec{1} \cdot 2R \sin \varphi_2;$$

$$EI \cdot \Delta_{10} = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2R)^3 F \cdot \sin^2(\varphi) \cdot d\varphi = -2\pi FR^3;$$

$$EI \cdot \delta_{11} = \int_0^{\pi} R^3 \cdot \sin^2(\varphi) \cdot d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2R)^3 \cdot \sin^2(\varphi) \cdot d\varphi = \frac{5\pi}{2} R^3$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{4}{5} F$$

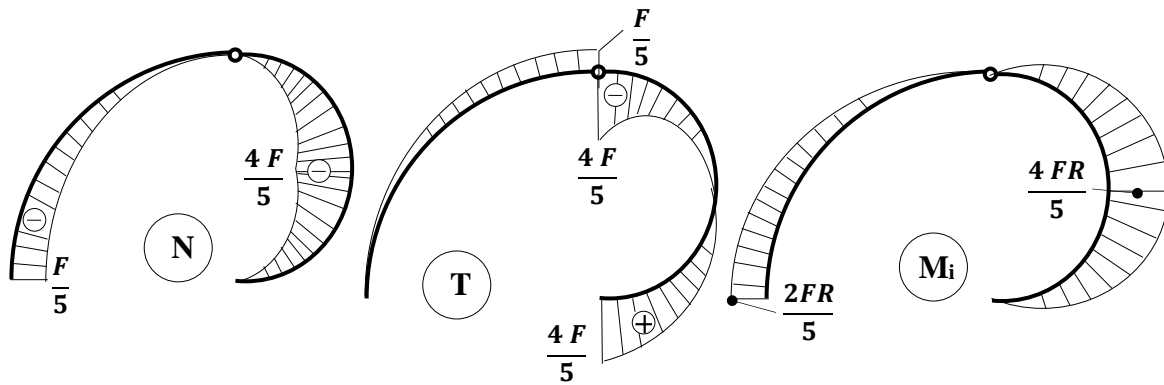
Eforturile au legile de variație:

$$N(\varphi_1) = -\frac{4}{5} F \sin \varphi_1; T(\varphi_1) = +\frac{4}{5} F \cos \varphi_1;$$

$$M_i(\varphi_1) = -\frac{4}{5} F \cdot R \cdot \sin \varphi_1;$$

$$N(\varphi_2) = -\frac{1}{5} F \sin \varphi_2; T(\varphi_2) = +\frac{1}{5} F \cos \varphi_2;$$

$$M_i(\varphi_2) = -\frac{1}{5} F \cdot 2R \cdot \sin \varphi_2;$$



Pentru calculul deplasării pe verticală a punctului de aplicație al forței se scriu legile de variație pentru momentul unitar și pentru momentul real:

$$M_i(\varphi_1) = -\frac{4}{5}F \cdot R \cdot \sin \varphi_1;$$

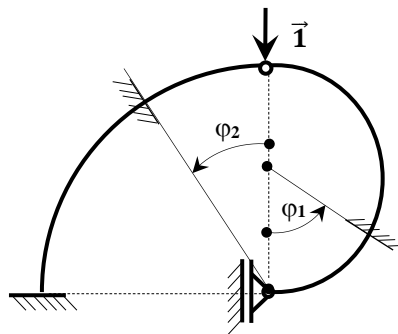
$$m_i(\varphi_1) \equiv 0;$$

$$M_i(\varphi_2) = -\frac{1}{5}F \cdot 2R \cdot \sin \varphi_2;$$

$$m_i(\varphi_2) = -\vec{1} \cdot 2R \sin \varphi_2$$

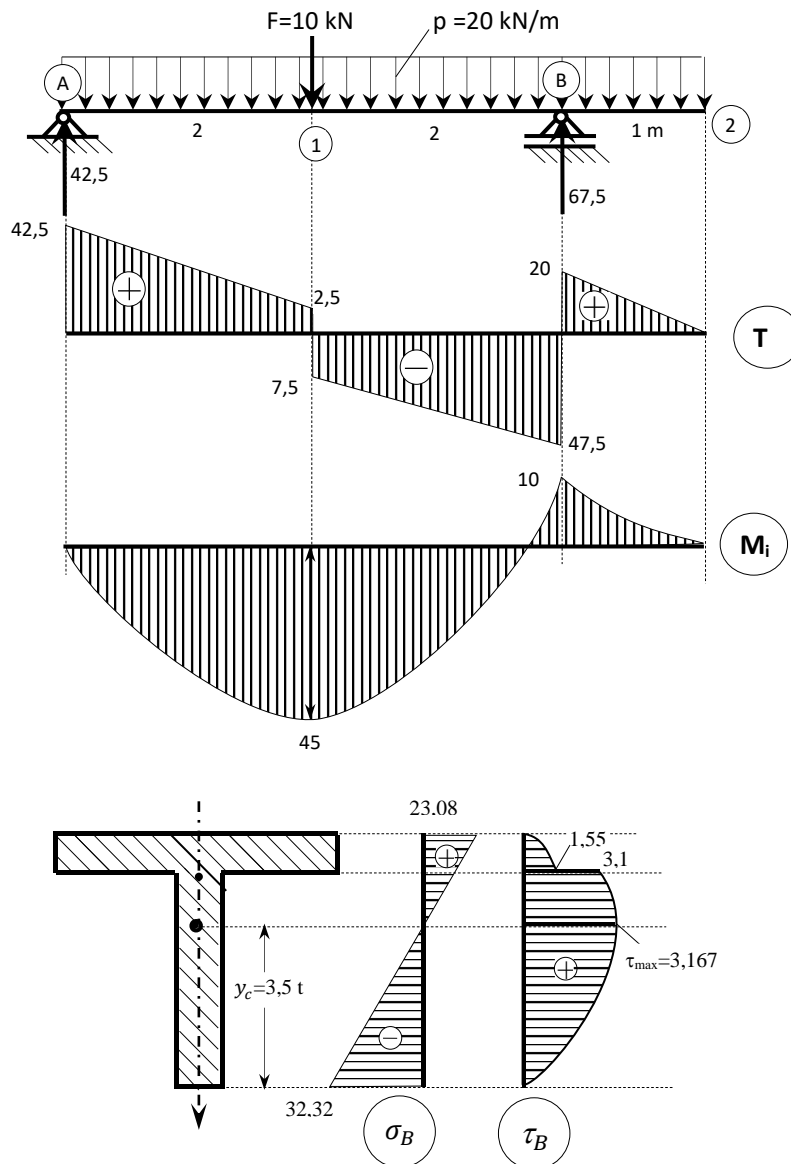
$$EI \cdot \delta_{v,F} = + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F}{5} \cdot \vec{1} \cdot (2R)^3 \cdot \sin^2(\varphi) \cdot d\varphi = \frac{2\pi}{5} F R^3$$

$$\delta_{v,F} = \frac{2\pi FR^3}{5 EI}$$



Locală 1996

I)



$$V_A = 42,5 \text{ kN} \quad V_B = 67,5 \text{ kN}$$

$$y_c = 3,5 \text{ t} \quad I_Z = 49,33 \text{ t}^4 \quad W_{z,min} = 14,095 \text{ t}^3$$

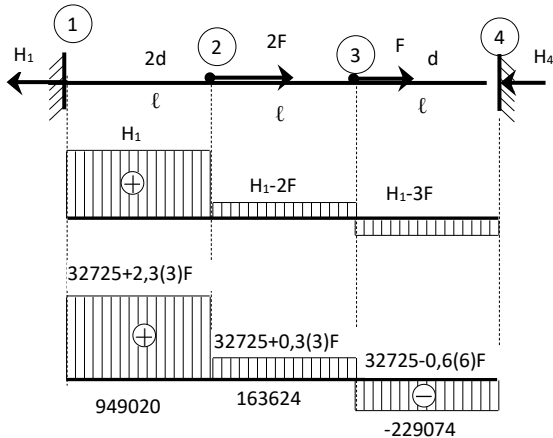
$$t_{nec} = \sqrt[3]{\frac{45 \cdot 10^6}{14,095 \cdot 150}} = 27,71 \Rightarrow t_{ef} = 28 \text{ mm}$$

$$\sigma_{(B)} = \frac{-10 \cdot 10^6}{49,33 \cdot 28^4} \cdot y = 0,3298 \text{ y}$$

$$\tau_{(B)} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot S_z}{b \cdot 49,33 \cdot 28^4}$$

$$S_{z,2} = 8t^2 \cdot 1,5t = 173,745 \text{ t}^3 \quad S_{z,max} = 12,25 \text{ t}^4$$

II)



$$\Delta l_{14} = \delta$$

$$\frac{H_1 \cdot l}{E \cdot \frac{\pi \cdot (2d)^2}{4}} + \frac{(H_1 - 2F)l}{E \frac{4\pi d^2}{4}} + \frac{(H_1 - 3F)l}{E \frac{\pi d^2}{4}} = \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{l \cdot 4}{E \cdot 4\pi d^2} [H_1 + H_1 - 2F + 4H_1 - 12F] = \delta$$

$$6H_1 - 14F = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot E \cdot \delta}{l};$$

$$H_1 = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot E \cdot \delta}{l \cdot 6} + \frac{14F}{6} = 32725 + 2,3(3)F$$

$$\sigma_{max} = \max \left(\frac{32725 + 2,3(3)F}{A_1}; \frac{32735 - 0,6(6)F}{A_2} \right)$$

$$\sigma_{max} = \max \left(\frac{8181,25 + 10,58(3)F}{A_2}; \frac{32725 - 0,6(6)F}{A_2} \right)$$

$$8181,5 + 0,58(3)F = 150 \cdot \frac{\pi \cdot 50^2}{4}$$

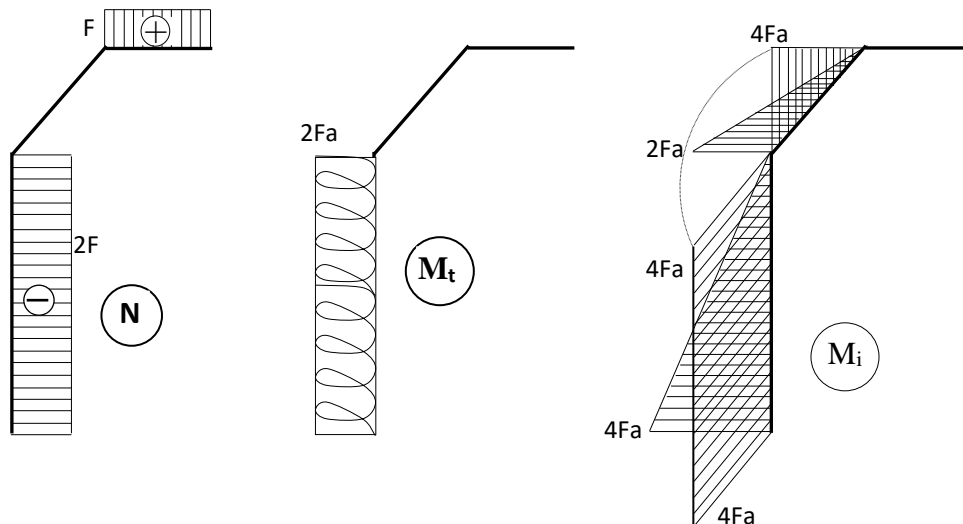
$$\Rightarrow F_{cap} = \frac{150 \cdot 50^2 \cdot \pi}{4 \cdot 0,58(3)} - \frac{8181,5}{0,58(3)} = 490873 \text{ N}$$

III) Secțiunea cea mai solicitată: încastrarea. Eforturile luate în considerare sunt:

$$N = -2F; M_{i,z} = 4F\ell; M_{i,y} = 4F\ell; M_{i,rez} = 4\sqrt{2} F\ell; M_t = 2F\ell$$

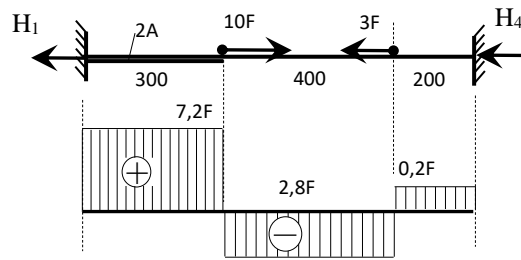
$$\sigma_N = \frac{2F}{\frac{\pi d^2}{4}} = 0,157 \text{ MPa}; \sigma_{M_{i,rez}} = \frac{4\sqrt{2} F\ell}{\frac{\pi d^3}{32}} = 5,93 \text{ MPa}; \Rightarrow \sigma_t = 6,087 \text{ MPa}$$

$$\tau_{M_t} = \frac{2F\ell}{\frac{\pi d^3}{16}} = 1,0484 \text{ MPa}; \Rightarrow \sigma_{ech,(3)} = \sqrt{\sigma_t^2 + 4\tau_{M_t}^2} = 6,438 \text{ MPa}$$



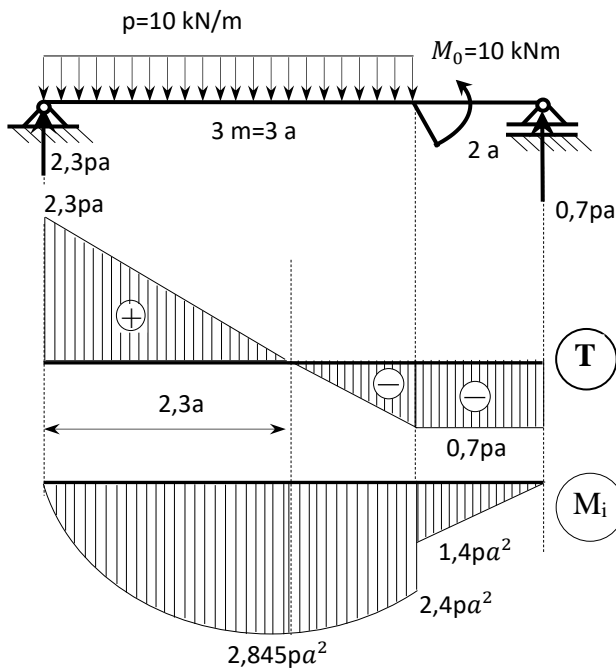
Locală 1997

I)



$$\begin{aligned}
 H_1 - 7F + H_4 &= 0 \\
 \frac{H_1 \cdot 300}{2EA} + \frac{H_1 - 10F}{EA} 400 + \frac{H_1 - 7F}{EA} 200 &= 0 \\
 H_1 &= 7,2 F; \\
 H_4 &= -0,2 F; \\
 \sigma_{max} = \sigma_a &\Rightarrow F_{cap}; \\
 \sigma_{max} = \max\left(\frac{7,2 F}{2 A}; \frac{2,8 F}{A}\right) &= \frac{3,6 F}{A} = \frac{3,6 F}{120} = 150 \\
 \Rightarrow F_{cap} &= 5000 N ; \\
 \delta_{(3)} = \Delta l_{3-4} &= \frac{H_4 200}{E A} = 7,93 \cdot 10^{-3} mm
 \end{aligned}$$

II)



$$\begin{aligned}
 y_c &= 3,5 t; \\
 I_z &= 49,3 t^4; \\
 W_z &= 14,095 t^3 \\
 W_{z nec} &= \frac{M_{i max}}{\sigma_a} = 14,095 t^3 \\
 \Rightarrow t_{nec} &= 23,21 mm \approx 24 mm \\
 T_{max} &= 2,3 pa = 23 \cdot 10^3 N \\
 b &= 2t = 48 mm \\
 I_z &= 49,33 \cdot 24^4 = 16,36 \cdot 10^6 mm^4 \\
 S_{z,max} &= 12,25 t^3 = 1,69 \cdot 10^5 mm^3 \\
 \tau_{max} &= 4,96 MPa
 \end{aligned}$$

III)

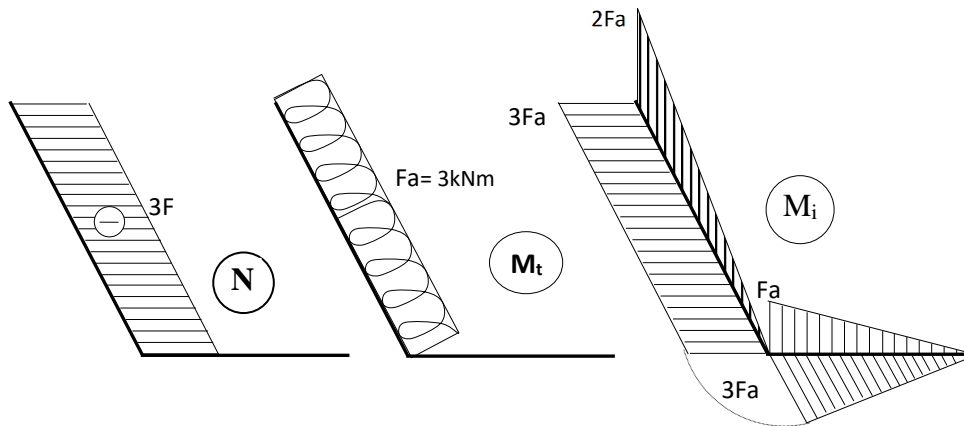
Secțiunea periculoasă: încastrarea

$$N = 3F = 30 \text{ kN};$$

$$M_{iz} = F \cdot 2a = 6 \text{ kNm};$$

$$M_{iy} = 3Fa = 9 \text{ kNm};$$

$$M_t = F \cdot a = 3 \text{ kNm};$$



$$\sigma_{rez} = \left(\frac{N}{A} + \frac{M_{i rez}}{W_z} \right) \cong 114 \text{ MPa};$$

$$\tau = 15,27 \text{ MPa}$$

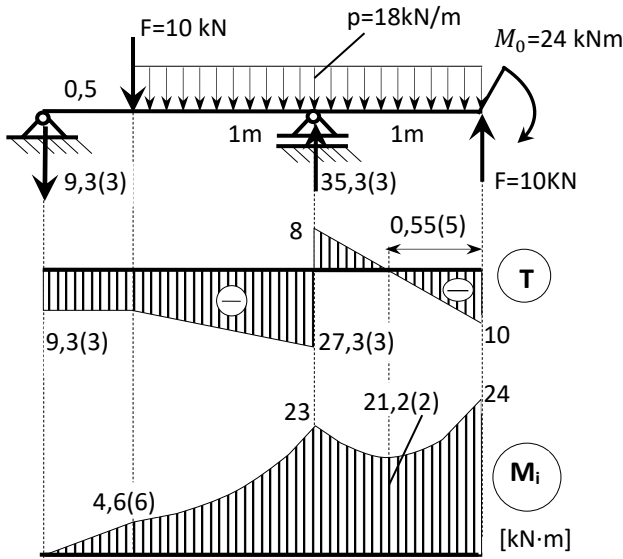
$$\sigma_{ech3} = \sqrt{\sigma_{rez}^2 + 4\tau^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{ech(3),max} = \sqrt{114^2 + 4(15,27)^2}$$

$$\sigma_{ech(3),max} = 118,02 \text{ MPa}$$

Locală 1998

I)



$$y_c = 4,83(3)a$$

$$I_z = 812,5 a^4$$

$$W_z = 113,372093 a^3$$

$$\left(\sum M\right)_B = 0 \Rightarrow V_A = -9,3(3)$$

$$\left(\sum M\right)_A = 0 \Rightarrow V_B = 35,3(3)$$

$$W_{z_{nec}} = \frac{24 \cdot 10^6}{150} = 113,372 \cdot a^3$$

$$\Rightarrow a_{nec} = 11,217 \text{ mm} \Rightarrow a_{ef} = 12 \text{ mm}$$

$$\sigma_K = -9,417;$$

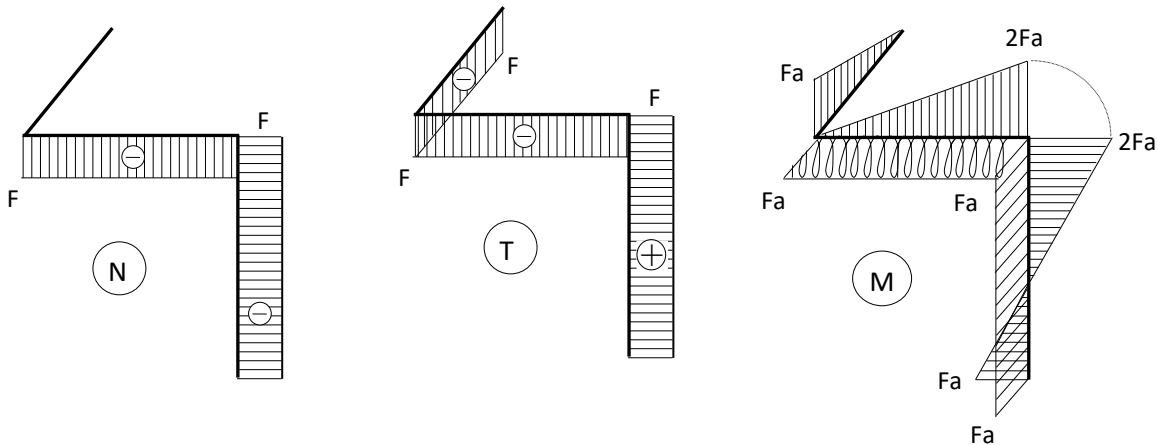
$$\tau_k = -0,6116;$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_K}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_K^2 + 4\tau_k^2} \Rightarrow \sigma_1 = 0,039 \text{ MPa}; \sigma_2 = -9,4565 \text{ MPa}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \arctg\left(-\frac{2\tau_k}{\sigma_K}\right) = -3,7^\circ; \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2} = 86,3^\circ$$

II)

Secțiunea cea mai solicitată : (3)



$$N_3 = -F; M_{i,(3),V} = 2Fa \text{ și } M_{t,(3)} = Fa \text{ sau } M_{i,rez,(3)} = \sqrt{5} Fa \text{ și } M_{t,(3)} = 0$$

$$\Rightarrow M_{i,ech(3)} = \sqrt{5} Fa$$

$$W_{z_{nec}} = \frac{\sqrt{5} \cdot F \cdot a \cdot 32}{\pi d^3} = 100$$

$$\Rightarrow d_{nec} = 96,94 \text{ mm} \Rightarrow d_{ef} = 98 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \text{verificăm: } \sigma_{max} = |\sigma_N| + \frac{\sqrt{5}Fa}{W_z} = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{\sqrt{5} \cdot F \cdot a \cdot 32}{\pi d^3} = 99,45 \text{ MPa}$$

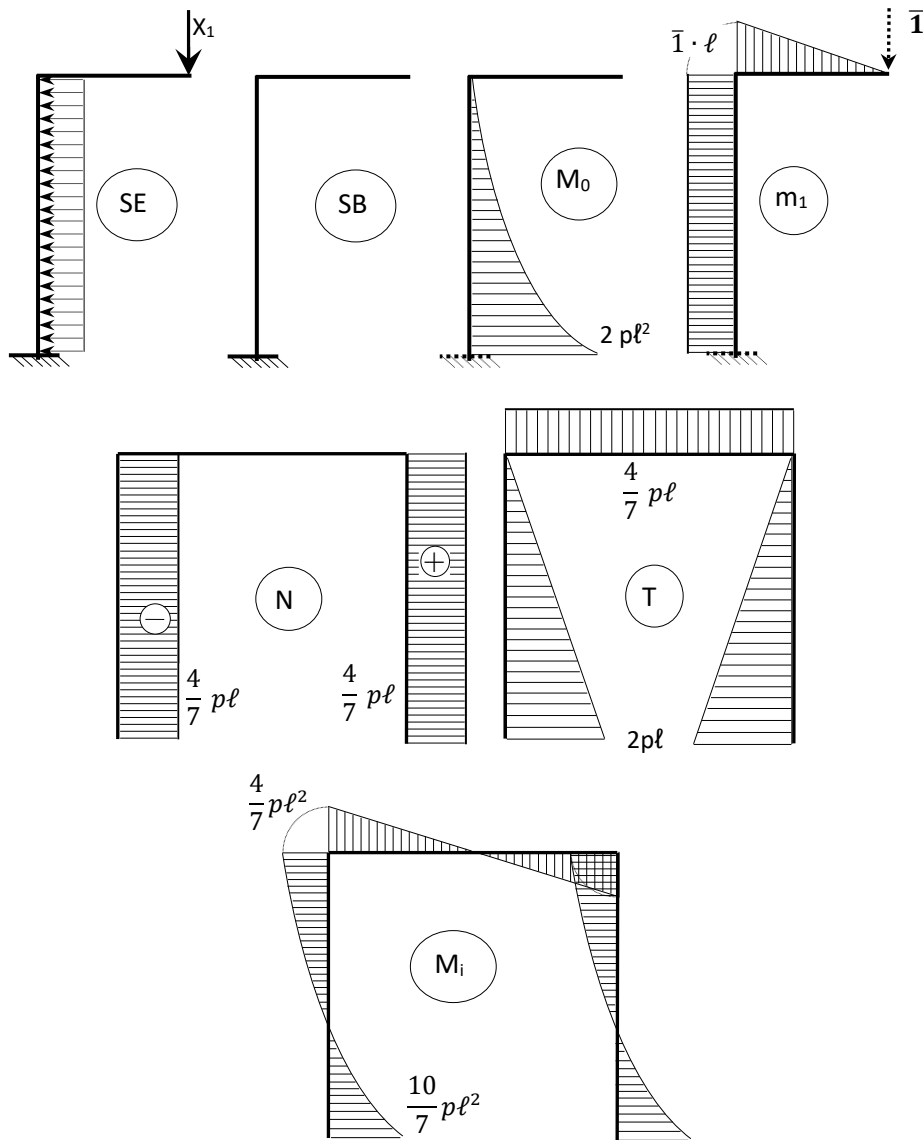
III)

$$X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}}; EI \Delta_{10} = -\frac{4}{3}pl^3 \cdot l = -\frac{4}{3}pl^4;$$

$$EI \delta_{11} = \frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3}l + 2l^2 \cdot l = \frac{7}{3}l^3;$$

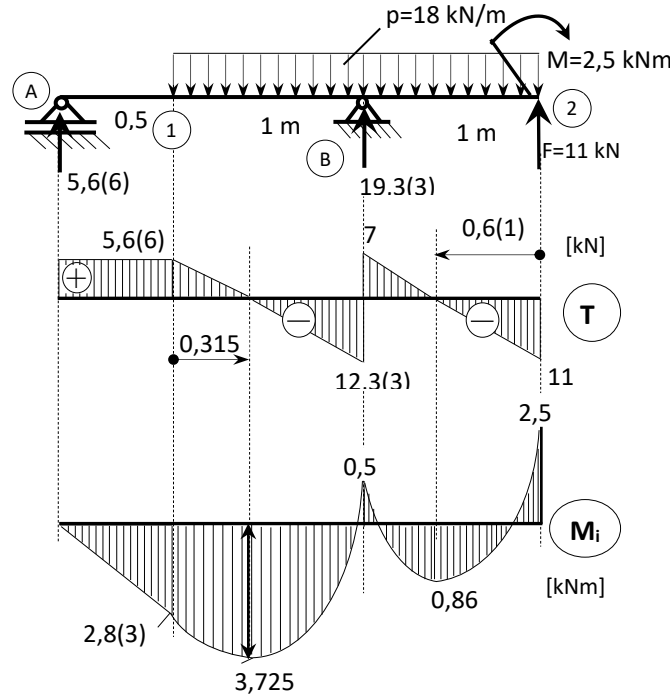
$$X_1 = \frac{4}{7}pl$$

$$\delta_{v_1} = 0$$

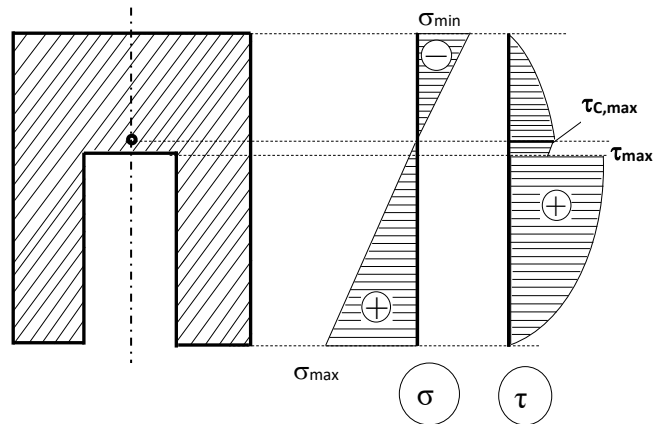


Locală 1999

I)



- a) $V_A = 5,6(6) \text{ kN}$;
 $(\Sigma M)_A = 0 \Rightarrow V_B = 19,3(3)$
- b) $y_C = 8,2 a$,
 $I_z = 1255,4(6) a^4$;
 $W_{z,min} = 153,1 a^3$;
 $a_{nec} = \sqrt[3]{\frac{3,725 \cdot 10^6}{153,1 \cdot 150}} = 5,45$
 $\Rightarrow a_{ef} = 5,5 \text{ mm}$



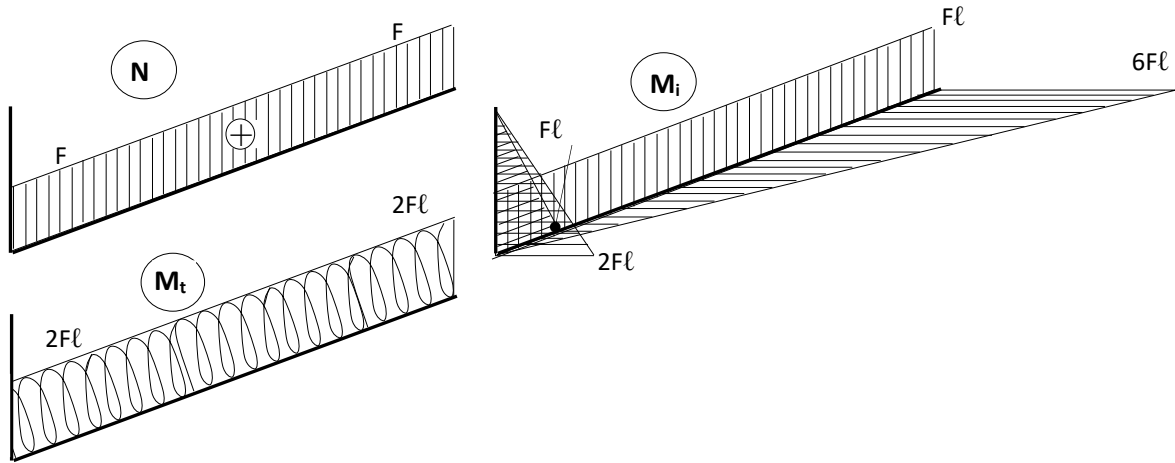
- c) $y_K = 3,2a$, $S_{zK} = 114a^3$,
 $M_{i,(1)} = 2,8(3) \cdot 10^6 \text{ Nmm}$, $T_{(1)} = 5,6(6) \cdot 10^3 \text{ N}$
 $\sigma_K = 43,4 \text{ MPa}$, $\tau_K = \frac{5,6(6) \cdot 10^3 \cdot 114 \cdot a^3}{4a \cdot 1255,4(6) \cdot a^4} = 4,25 \text{ MPa}$

II) Eforturile din secțiunea periculoasă sunt:

$$\begin{aligned} N &= F = 4 \text{ kN}; & M_{i,rez} &= \sqrt{37} F\ell; \\ M_{iz} &= F\ell = 0,8 \text{ kNm}; & M_t &= 2 F\ell \\ M_{iy} &= 6F\ell = 4,8 \text{ kNm}; & M_{ech,v} &= \sqrt{40} F\ell; \end{aligned}$$

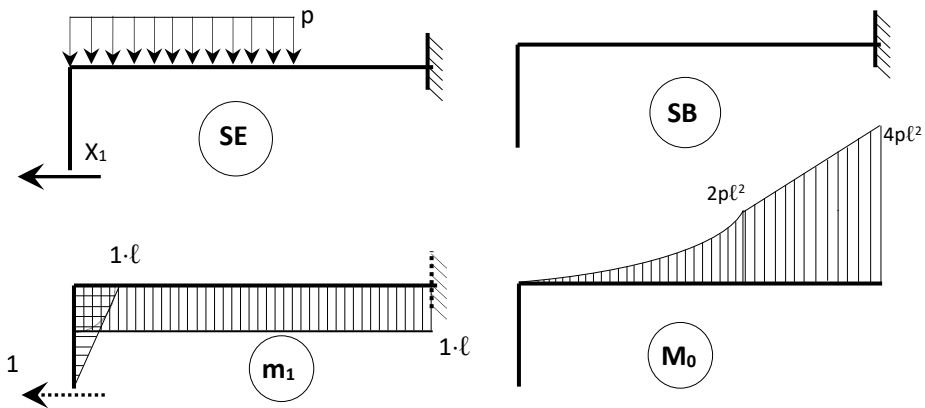
$$\frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{\sqrt{40} F\ell}{\sigma_a} \Rightarrow d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{40} F\ell}{\pi \sigma_a}} = 83,04 \text{ mm} \Rightarrow d_{ef} = 84 \text{ mm}$$

Verificarea duce la $\sigma_{ech,max} = 87,65 < \sigma_a$

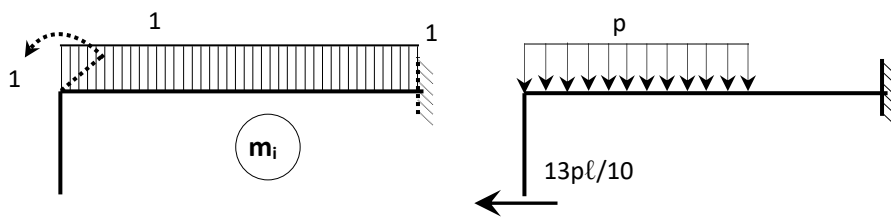


III)

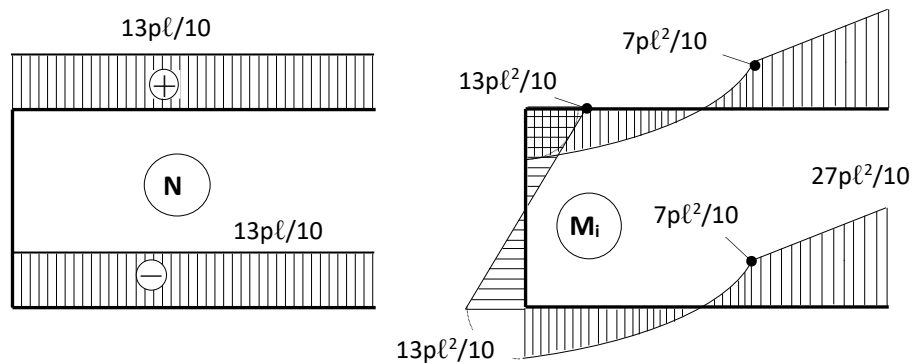
a) $\delta_{11}X_1 + \Delta_{10} = 0; X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}}; EI \delta_{11} = \frac{10}{3}\ell^3; EI \Delta_{10} = \frac{13}{3}p\ell^4; X_1 = \frac{13}{10}p\ell$



b) $EI\varphi_1 = \frac{13}{30}p\ell^3 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{13p\ell^3}{30EI}$



c)



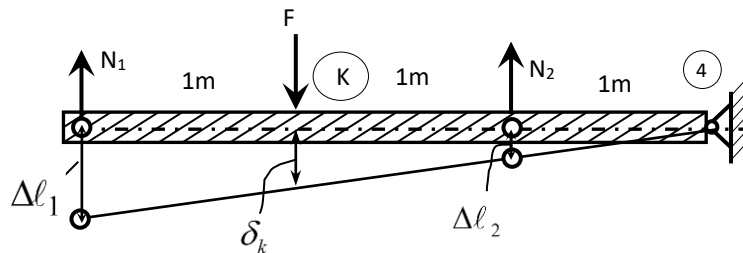
Locală 2001

I)

$$(\Sigma M)_0 = 0; \quad N_1 \cdot 3 - F \cdot 2 + N_2 \cdot 1 = 0; \quad 3N_1 + N_2 = 2F; \quad (1)$$

$$\frac{\Delta \ell_1}{\Delta \ell_2} = \frac{3}{1} \Rightarrow \Delta \ell_1 = 3\Delta \ell_2; \quad \Delta \ell_1 = \frac{N_1 \ell_1}{E_1 A_1}; \quad \Delta \ell_2 = \frac{N_2 \ell_2}{E_2 A_2}$$

$$A_1 = \frac{\pi d^2}{4} = A; \quad A_2 = \frac{\pi (2d)^2}{4} = \frac{\pi d^2}{4} = 3A$$



$$\frac{N_1 \ell_1}{E_1 \cdot \frac{\pi d^2}{4}} = 3 \frac{N_2 \ell_2}{E_2 \cdot \frac{3\pi d^2}{4}} \Rightarrow N_1 = N_2 = \frac{F}{2};$$

$$\sigma_a = \frac{N_1}{A_1};$$

$$N_1 = \sigma_a \cdot A_1 = \sigma_a \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{F}{2} \Rightarrow$$

$$F' = \frac{\sigma_a \cdot \pi d^2}{2} = \frac{150 \cdot \pi \cdot 20}{2} = 94.247,8$$

$$\sigma_a = \frac{N_{21}}{A_2};$$

$$N_2 = \sigma_a \cdot A_2 = \sigma_a \cdot \frac{3\pi d^2}{4} = \frac{F}{2} \Rightarrow$$

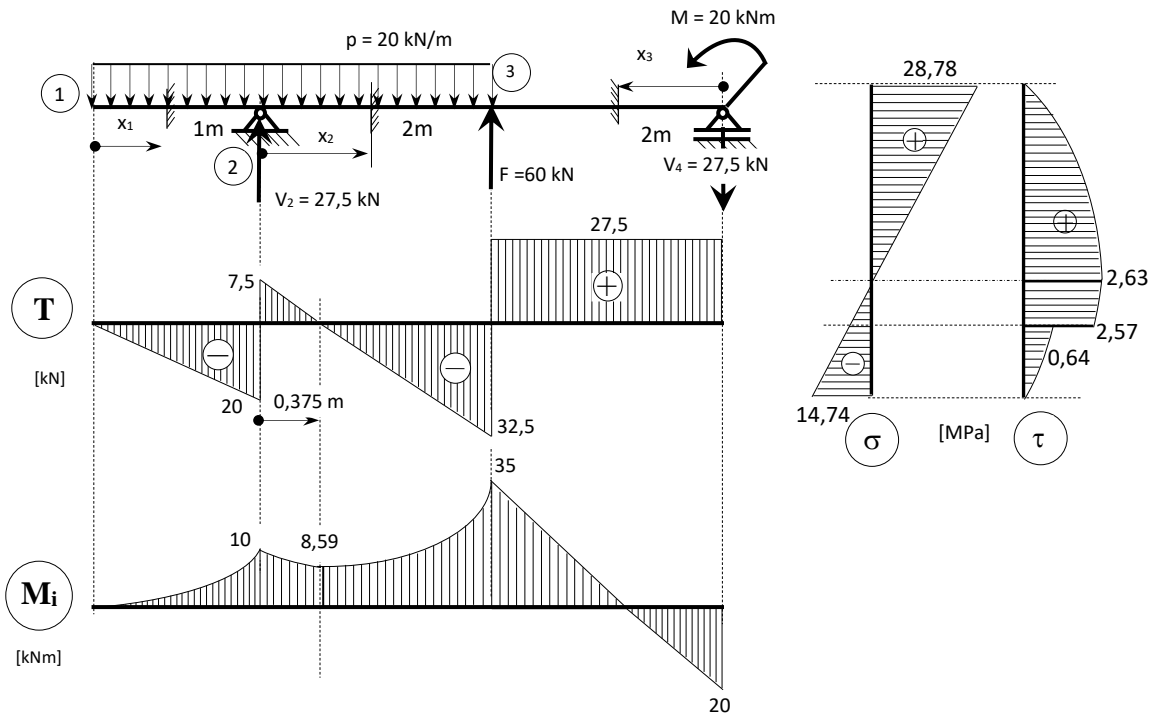
$$F'' = \frac{3\sigma_a \cdot \pi d^2}{2} = \frac{3 \cdot 150 \cdot \pi \cdot 20}{2} = 382.743,34$$

$$F_{\text{cap}} = 94.247 \text{ N}$$

$$\Delta \ell_1 = \frac{N_1 \cdot \ell_1}{E_1 \cdot A_1} = 1,5 \text{ mm} (1,4999...) \Rightarrow \frac{\delta_k}{\Delta \ell_1} = \frac{2}{3}$$

$$\delta_k = \frac{2\Delta \ell_1}{3} = \frac{2}{3} = 1 \text{ mm} (0,999...)$$

II)



$$(\sum M)_{(2)} = 0 \Rightarrow V_4 = -27,5; \quad (\sum M)_0 = 0; \Rightarrow V_2 = 27,5$$

$$y_C = 2,714 \text{ t}; \quad I_z = 75,51 \text{ t}^4; \quad W_{z,min} = 14,27 \text{ t}^3; \quad W_{z,max} = 27,86 \text{ t}^3;$$

$$\sigma_{ef,MAX} = \frac{35 \cdot 10^6}{14,27 \cdot \text{t}^3} \leq \sigma_{a,t} \Rightarrow t_{nec} = 43,4 \text{ mm} \Rightarrow t_{ef} = 44 \text{ mm}$$

$$\sigma_{ef,max} = 28,78 \text{ MPa}; \quad \sigma_{ef,min} = -14,74 \text{ MPa}$$

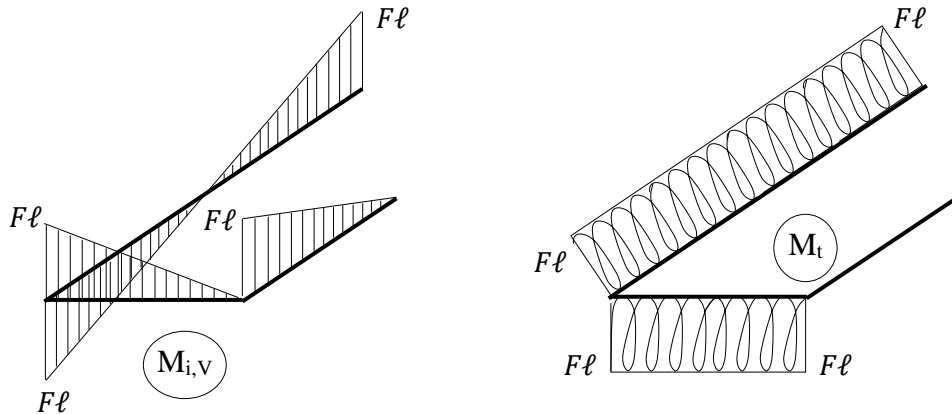
$$T_{(3),Dr.} = +27,5 \text{ kN}; \quad I_z = 2,83 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

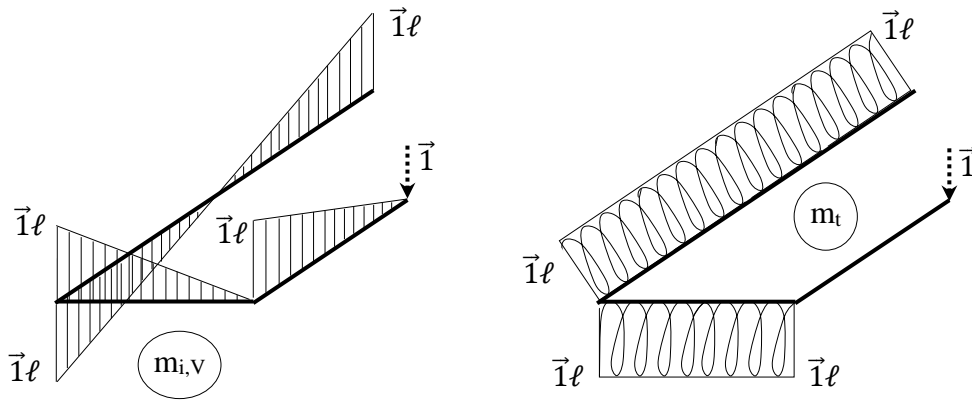
$$S_{z_{1-1}} = 1.191.898,8 \text{ mm}^3; \quad b_{1-1} = 44 \text{ mm}; \quad \tau_{1-1} = 2,63 \text{ MPa}$$

$$S_{z_{2-2}} = S_{z_{3-3}} = 1.165.317,1 \text{ mm}^3; \quad b_{2-2} = 44 \text{ mm};$$

$$\tau_{2-2} = 2,57 \text{ MPa}; \quad b_{3-3} = 176 \text{ mm}; \quad \tau_{3-3} = 0,64 \text{ MPa}$$

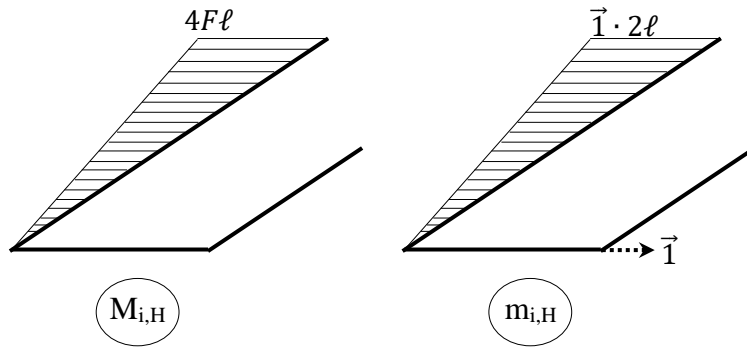
III)





$$\delta_{1,v} = \frac{4}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot F\ell \right) \left(\frac{2}{3} \cdot \bar{1} \cdot \ell \right) + \frac{3}{GI_p} (\ell \cdot F\ell)(\bar{1} \cdot \ell) = 325,33 \frac{F \ell^3}{E \pi d^4} = 103,55 \frac{F \ell^3}{E d^4}$$

$$\delta_{2H} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2\ell \cdot 4F\ell \right) \left(\frac{2}{3} \cdot \bar{1} \cdot 2\ell \right) = \frac{16}{3} \cdot \frac{F\ell^3}{EI} = 5,33 \frac{F\ell^3}{EI}$$



Locală 2002

I)

$$\left(\sum M\right)_B = 0 \Leftrightarrow N_1 \cdot a - F a + N_2 \cdot 2a = 0 \Rightarrow N_1 + 2N_2 - F = 0$$

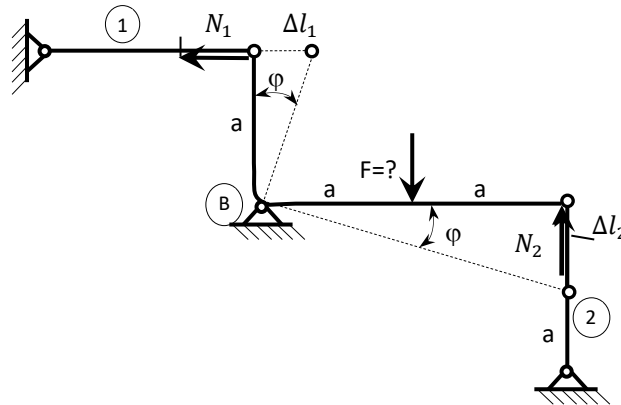
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{2a} \Leftrightarrow 2\Delta l_1 = \Delta l_2; \Rightarrow 2 \frac{N_1 \cdot 1,5a}{EA} = \frac{N_2 a}{EA} \Rightarrow 3N_1 = N_2$$

$$N_2 \text{ înlocuit în } \left(\sum M\right)_B = 0 \Rightarrow N_1 + 2 \cdot 3N_1 - F = 0 \Rightarrow 7N_1 = F \Rightarrow N_1 = \frac{F}{7} \Rightarrow N_2 = \frac{3F}{7}$$

$$\text{Din: } \sigma_{\max} = \sigma_a \Rightarrow F_{\text{cap}};$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 \Rightarrow F_{\text{cap}} = 109955 \text{ N}$$

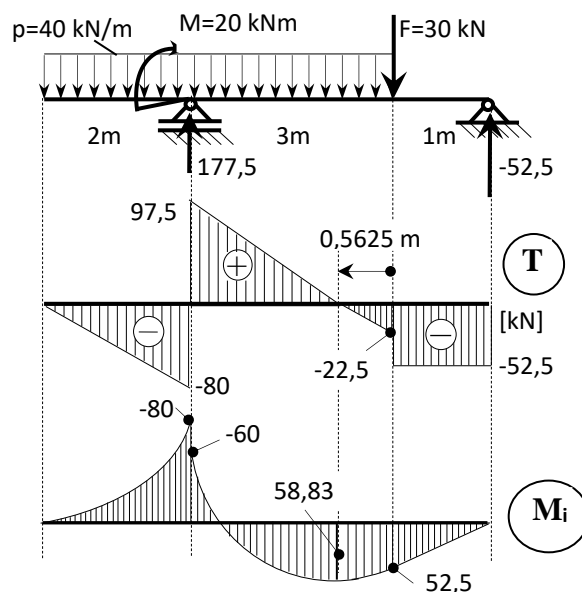
$$\Delta_{H,K} = \Delta l_1 = 0,375 \text{ mm}$$



II)

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \Rightarrow V_4 = 52,5 \text{ N}$$

$$\left(\sum M\right)_4 = 0 \Rightarrow V_2 = 177,5 \text{ N}$$



$$y_c = 9,8 a; I_z = 3355,2 a^4;$$

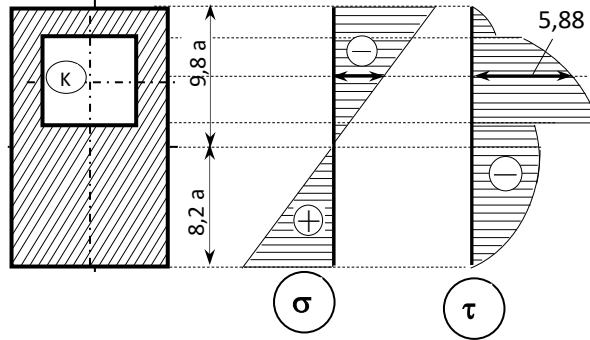
$$|\sigma_{max}| = \frac{|M_{max}| \cdot |Y_{max}|}{I_z} \leq \sigma_a$$

$$\Rightarrow a_{nec} = 11,59 \text{ mm} \Rightarrow a_{ef} = 12 \text{ mm}$$

$$T_{3,max} = -52,5 \text{ kN} ; b = 4a$$

$$s_{z,K} = 216,4 a^3;$$

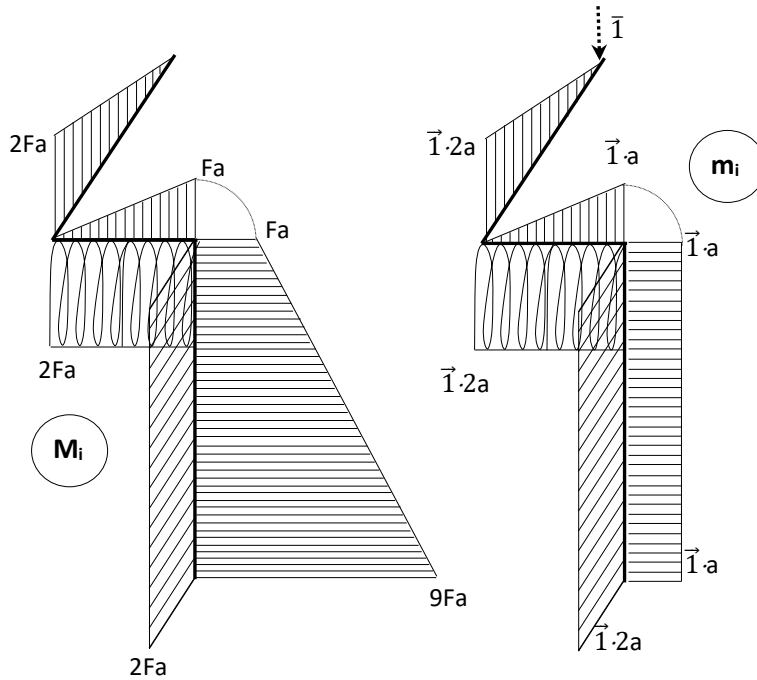
$$\tau_{K,(3)} = -5,88 \text{ MPa}$$



III)

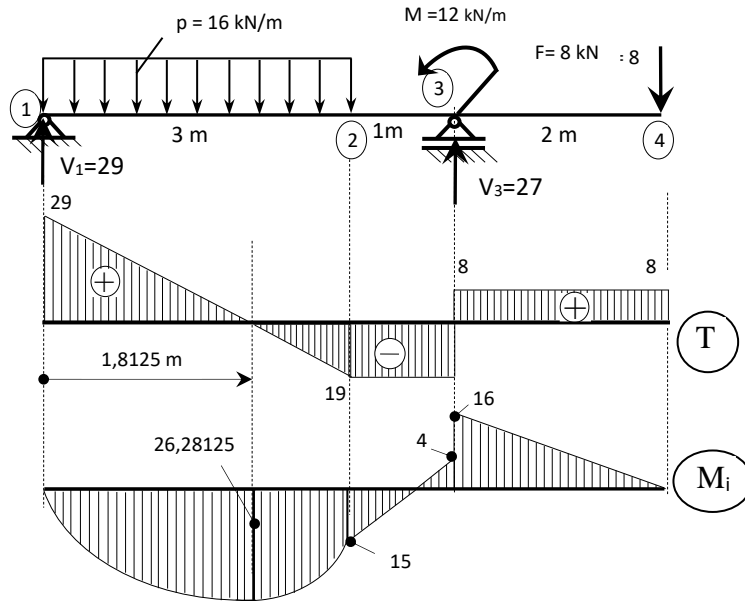
$$\delta_{1,v} = \frac{2Fa^2 \cdot \frac{4}{3}a + \frac{1}{2}Fa^2 \cdot \frac{2}{3}a + 4Fa^2 \cdot a + 16Fa^2 \cdot a + 8Fa^2 \cdot 2a}{EI_z} + \frac{2Fa^2 \cdot 2a}{0,4EI_z}$$

$$\delta_{1,v} = \frac{Fa^3}{EI_z} \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3} + 4 + 16 + 16 + 5 \right) = \frac{132}{3} \cdot \frac{Fa^3}{EI_z}$$



Locală 2003

I)



$$V_1 = 29 \text{ kN}; V_3 = 2 \text{ kN};$$

$$y_C = 3,857 \delta; I_z = 260,762 \delta^4; W_{z,min} = 42,45 \delta^3; W_{z,max} = 67,605 \delta^3$$

$$\sigma_{ef,MAX} = \frac{26,28125 \cdot 10^6}{42,45 \delta^3} \leq \sigma_{ac} = 90 \text{ MPa} \Rightarrow \delta_{nec,c} = 16,28 \text{ mm};$$

$$\sigma_{ef,max,t} = \max\left(\frac{26,28125 \cdot 10^6}{67,605 \delta^3}; \frac{16 \cdot 10^6}{42,45 \delta^3}\right) = \frac{26,28125 \cdot 10^6}{67,605 \delta^3} \leq \sigma_{at} = 40 \text{ MPa}$$

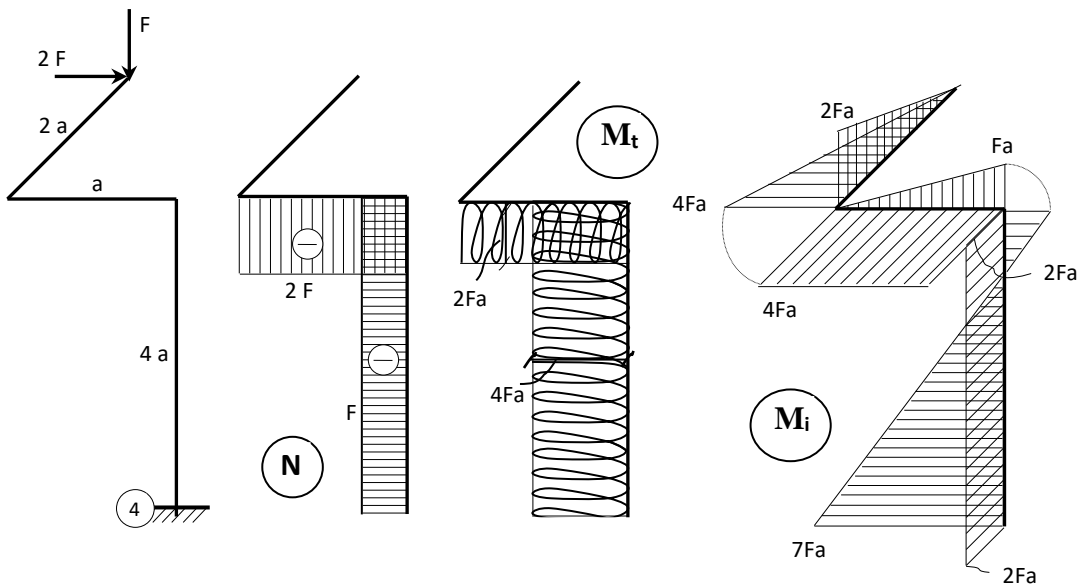
$$\Rightarrow \delta_{nec,t} = 25,54 \text{ mm}$$

$$\delta_{nec} = \max(\delta_{nec,t}; \delta_{nec,c}) = 25,54 \text{ mm} \Rightarrow \delta_{ef} = 26 \text{ mm}$$

$$M_{iz,(2)} = 15 \text{ kNm}; T_{(2)} = -19 \text{ kN}; S_{z,K} = 34,284 \delta^3; b'_K = 2 \delta; b''_K = 6 \delta; y_K = 1,857 \delta;$$

$$\sigma_{K,(2)} = +6,078 \text{ MPa}; \tau'_{K,2} = -1,848 \text{ MPa}; \tau''_{K,2} = -0,616 \text{ MPa}$$

II)



→ Secțiunea cea mai solicitată: (4)

$$M_{i(4)} = \sqrt{7^2 + 2^2} \cdot Fa = \sqrt{53} Fa \quad N_{(4)} = -F; \quad M_{i(4)} = \sqrt{7^2 + 2^2} \cdot Fa = \sqrt{53} Fa;$$

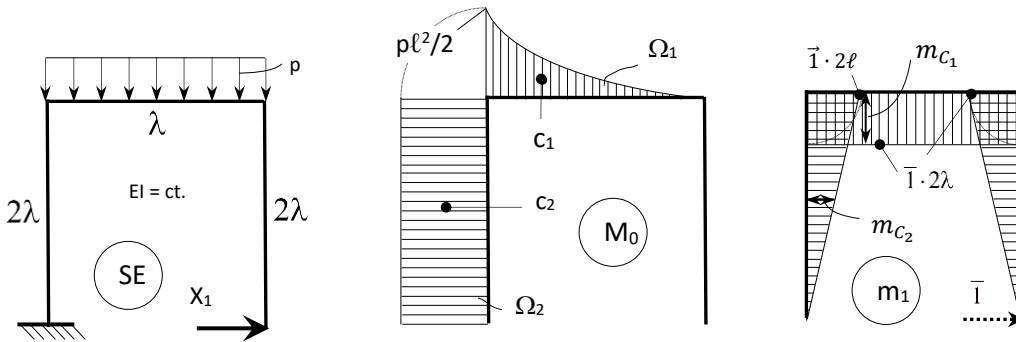
$$\Rightarrow \sigma_N \cong 0,35373 \cdot 10^{-3} F; \quad \sigma_{M_i} = 0,068662 F; \quad \Rightarrow \sigma_t = 0,0690154 F$$

$$M_{t(4)} = 4 Fa \Rightarrow \tau_{max} = 0,018863 F$$

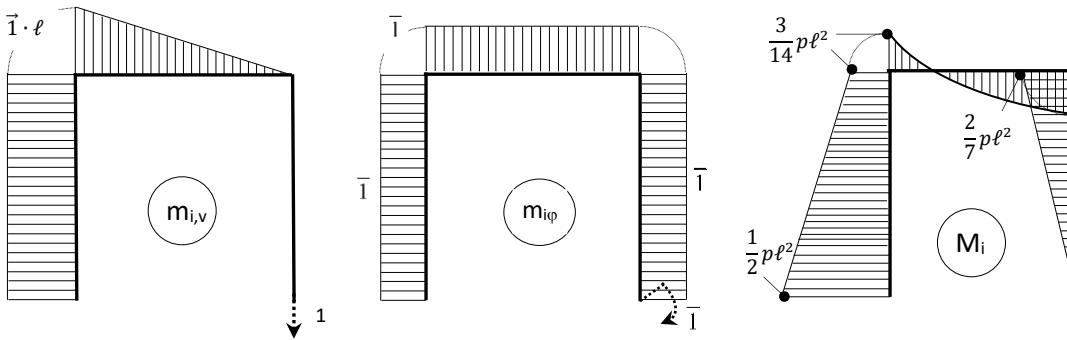
$$\Rightarrow \sigma_{ech(3)} = 0,0786533 F \equiv \sigma_a = 100 MPa$$

$$\Rightarrow F_{cap} = 1271 N$$

III)



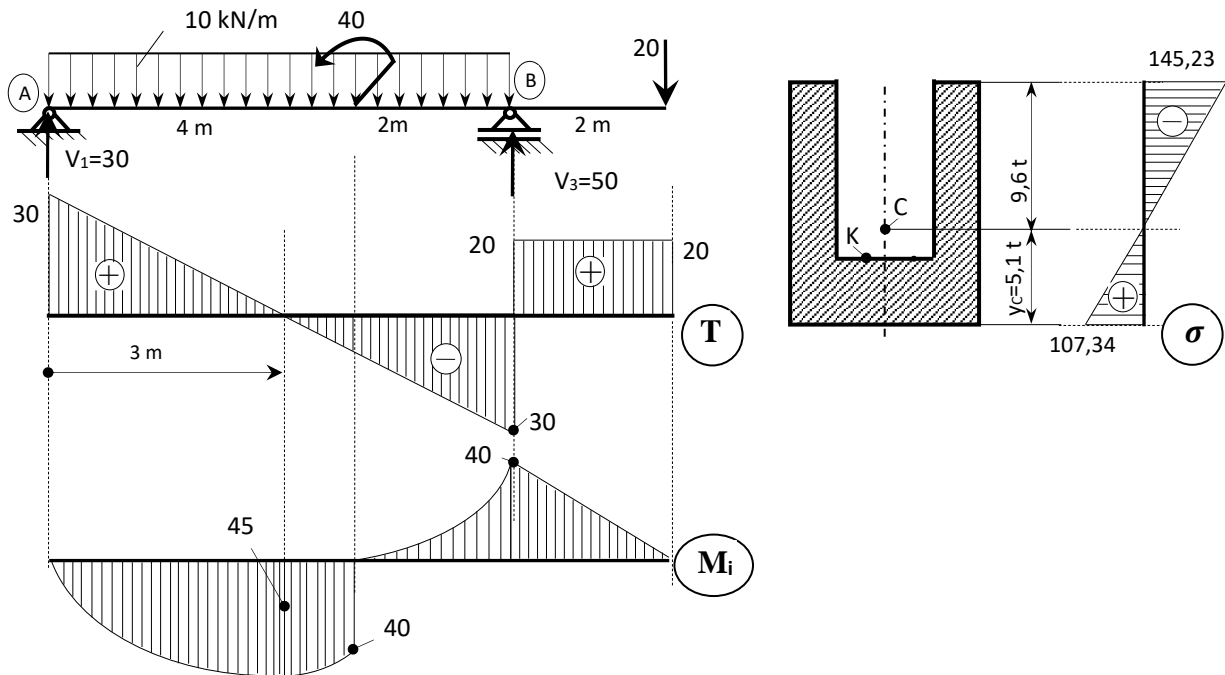
$$\Delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}}; \quad EI \Delta_{10} = -\frac{4}{3} p \ell^4; \quad EI \delta_{11} = \frac{28}{3} \ell^3 \Rightarrow X_1 = \frac{p \ell}{7}$$



$$\varphi_1 = \frac{13}{42} \cdot \frac{p \lambda^3}{EI}; \quad v_1 = \frac{39}{56} \cdot \frac{p \lambda^4}{EI}$$

Locală 2004

I)



$$V_A = 30 \text{ kN}; V_B = 50 \text{ kN}; y_C = 5,1 \text{ t}; I_z = 779,4 \text{ t}^4; W_{z,\min} = 112,956 \text{ t}^3;$$

$$\sigma_{ef,\max} = \frac{45 \cdot 10^6}{112,956 \text{ t}^3} \leq 150 \Rightarrow t_{nec} = 13,85 \text{ mm}; \Rightarrow t_{ef} = 14 \text{ mm}$$

$$M_{iz,\max} = 45 \text{ kNm}; T_{\max} = 30 \text{ kN}; S_{z,K} = 86,4 \text{ t}^3; b_K = 6 \text{ t};$$

$$\sigma_{\max,c} = -145,23 \text{ MPa}; \sigma_{\max,t} = 107,34 \text{ MPa};$$

$$\tau_{K,\max} = 2,121 \text{ MPa}; \text{ pentru } t_{ef} = 14 \text{ mm}$$

$$\sigma_{\max,c} = -150 \text{ MPa}; \sigma_{\max,t} = 110,87 \text{ MPa};$$

$$\tau_{K,\max} = 2,167 \text{ MPa}; \text{ pentru } t_{nec} = 13,85 \text{ mm}$$

II)

$$y_F = y_C = 61,25 \text{ mm}; z_F = 50 \text{ mm}; y_{\min} = 38,75; A = 6400 \text{ mm}^2; I_z = 500,3(3) \cdot 10^4 \text{ mm}^4;$$

$$I_y = 725,3(3) \cdot 10^4 \text{ mm}^4; W_{z,\min} = 81687; W_{z,\max} = 129118 \text{ mm}^3; W_y = 145066, (6) \text{ mm}^3$$

$$\sigma_{\max,c} = -10^3 p \left(\frac{2}{6400} + \frac{622,5}{81687} + \frac{77,5}{145066, (6)} \right) = -8,4673 p \equiv \sigma_{ac} = 90 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow p_{cap,c} = 10,629 \text{ N/mm}$$

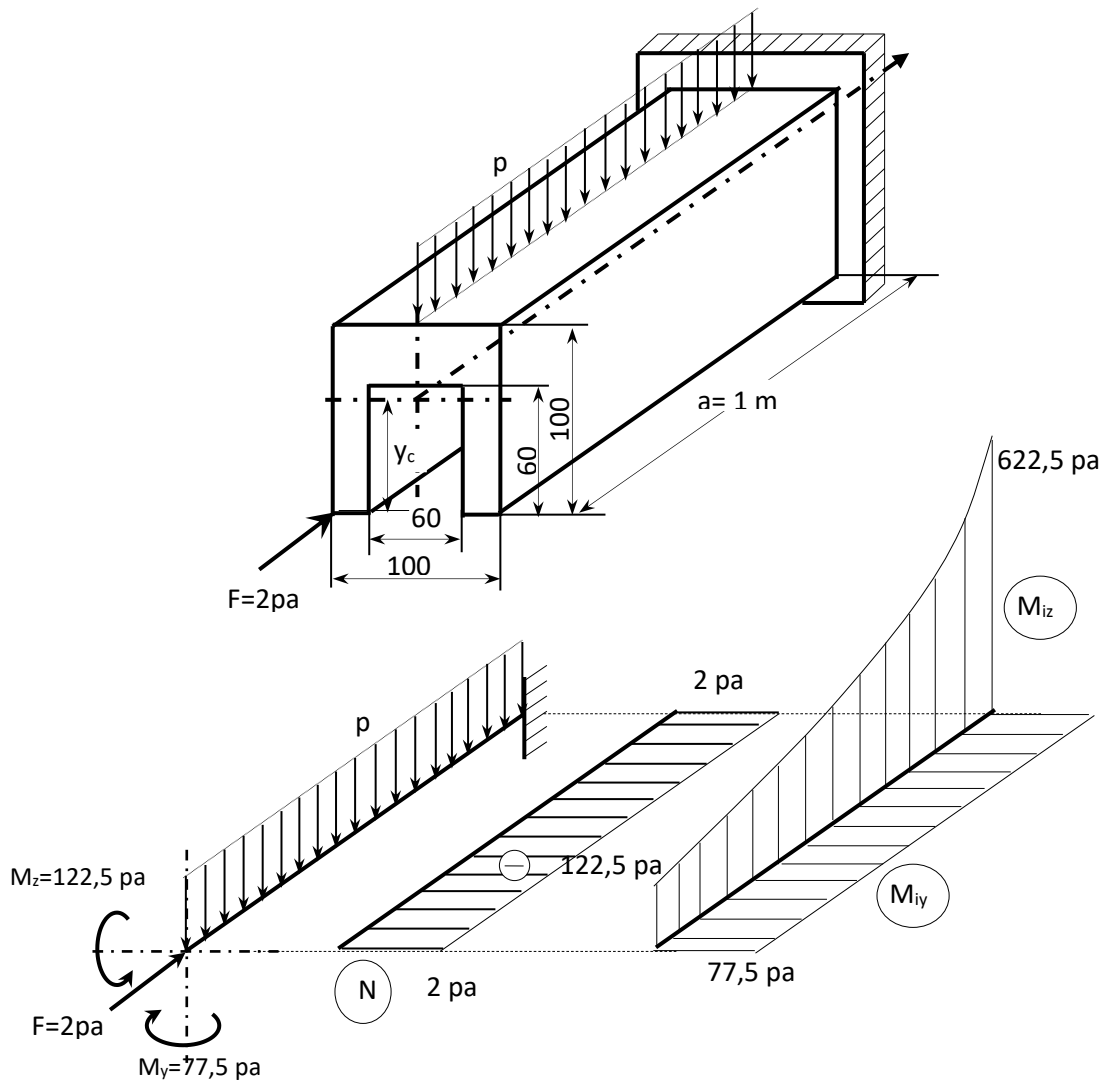
$$\sigma_{\max,t} = -p \left(\frac{2 \cdot 10^3}{6400} - \frac{622,5 \cdot 10^3}{129118} - \frac{77,5 \cdot 10^3}{145066, (6)} \right) = +5,04267 p \equiv \sigma_{at} = 30 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow p_{cap,t} = 5,949 \text{ N/mm}$$

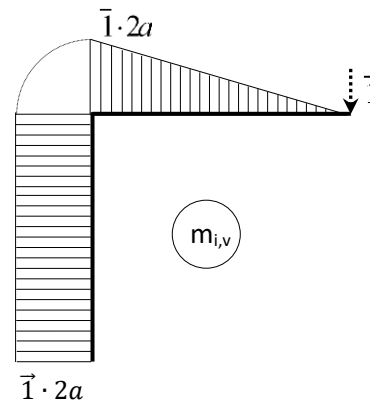
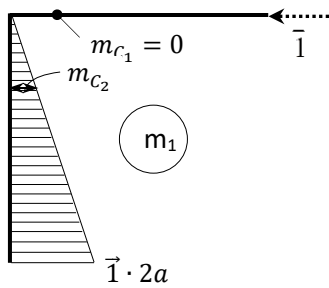
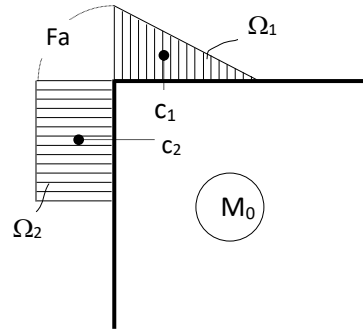
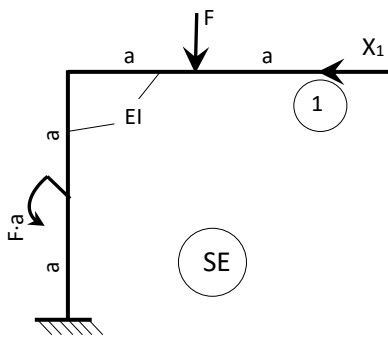
$$p_{cap} = \min(p_{cap,t}; p_{cap,c}) \cong 5,95 \text{ N/mm}$$

$$\sigma_t = -5,95(0,3125 + 0,1244 y + 0,010685 z); \sigma_{t,C} = -50,35; \sigma_{t,T} = +30 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow \bigcap Gy \Rightarrow y_0 = -2,512 \text{ mm}; \bigcap Gz \Rightarrow z_0 = -29,25 \text{ mm};$$



III)



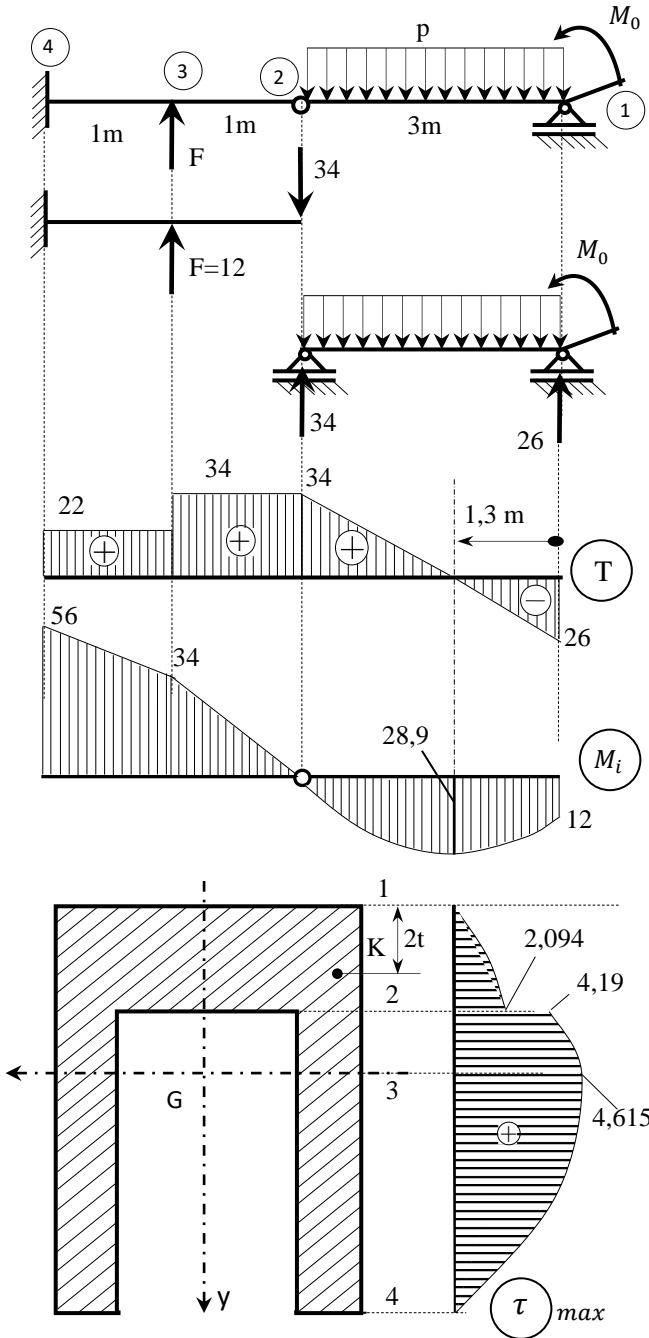
$$\Delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}};$$

$$EI \Delta_{10} = -\frac{Fa^3}{2}; \quad EI \delta_{11} = \frac{8}{3}a^3 \Rightarrow X_1 = \frac{3}{16}F$$

$$EI \delta_v = \frac{25}{12}Fa^3 \Rightarrow \delta_v = \frac{25}{12} \frac{Fa^3}{EI}$$

Locală 2005

I)



$$y_C = \frac{96t^2 \cdot 6t - 36t^2 \cdot 4,5t}{60t^2} = 6,9t,$$

$$W_{Z_{min}} = 112,956522t^3,$$

$$I_Z = 779,4t^4$$

$$t_{nec} = \sqrt[3]{\frac{56 \cdot 10^6}{150 \cdot 112,956}} = 14,8957mm$$

$$\Rightarrow t_{ef} = 15mm$$

$$\sigma_{K,(3)} = 40,916MPa (cu t_{nec}),$$

$$\sigma_{K,(3)} = 40,07MPa (cu t_{ef})$$

$$S_{Z_{22}} = 86,4t^3,$$

$$S_{Z_{max}} = 95,22t^3,$$

$$T_{max} = 34 \cdot 10^3N$$

$$\tau_{max} = \frac{34 \cdot 10^3 \cdot 95,22t^3}{4t \cdot 779,4t^4} = 4,68MPa$$

$$\tau_{max} = 4,615MPa (cu t_{ef})$$

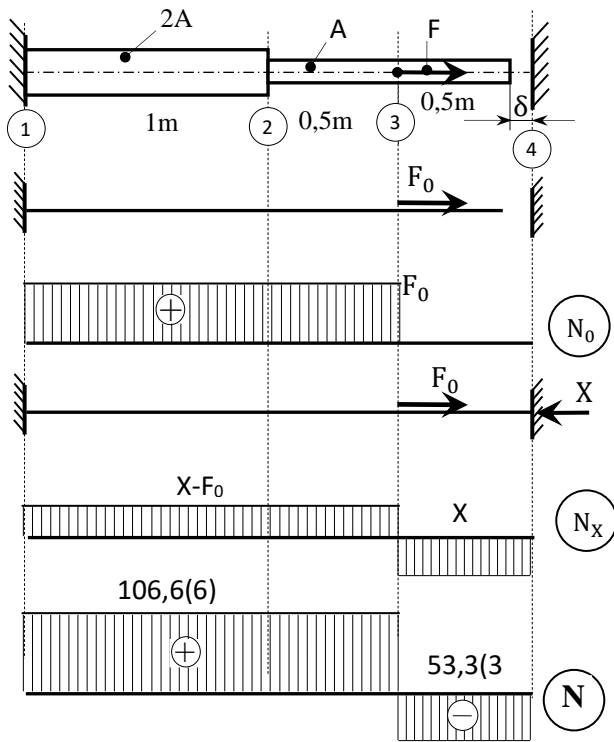
$$\tau_{2-2,max} = 4,19MPa (cu t_{ef})$$

$$\tau_{2-2,max} = 4,25MPa (cu t_{nec})$$

$$\tau_{2-2} = 2,094MPa (cu t_{ef})$$

$$\tau_{2-2} = 2,124MPa (cu t_{nec})$$

II)



$$\Delta \ell_{3-1} = \delta$$

$$\frac{F_0 \cdot a}{EA} + \frac{F_0 \cdot 2a}{2EA} = \delta$$

$$\Rightarrow \frac{2F_0 \cdot a}{EA} = \delta \Rightarrow F_0 = \frac{\delta EA}{2 \cdot a}$$

$$F_0 = 80 \text{ kN}$$

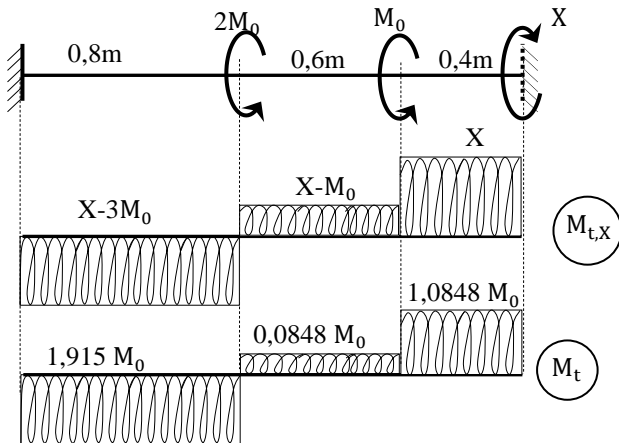
$$\Delta \ell_{1-4} = 0 \Rightarrow \frac{X \cdot a}{EA} + \frac{(X-F_0)a}{EA} + \frac{(X-F_0)2a}{2EA} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{EA} (X + X - F_0 + X - F_0) = 0 \Rightarrow$$

$$3X = 2F_0 \Rightarrow X = \frac{2}{3} F_0 = \frac{2}{3} \cdot 80 \text{ kN}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{2-3} = 53,33 \text{ MPa}$$

III)



$$\Delta \varphi_{14} = 0$$

$$\frac{X \cdot 0,4}{GI_{p_1}} + \frac{(X - M_0)0,6}{GI_{p_1}} + \frac{(X - 3M_0)0,8}{GI_{p_2}} = 0$$

$$I_{p_1} = \frac{\pi \cdot 60^3}{32} = \frac{16 \cdot \pi \cdot 10^4}{32} \cdot 81$$

$$I_{p_2} = \frac{\pi \cdot 80^4}{32} = \frac{16 \cdot \pi \cdot 10^4}{32} \cdot 256$$

$$I_{p_2} = \frac{256}{81} I_{p_1}; W_{p_1} = \frac{\pi \cdot 60^3}{16} = \frac{\pi \cdot 10^3}{2} \cdot 27$$

$$W_{p_2} = \frac{\pi \cdot 10^3}{2} \cdot 64; W_{p_2} = 2,37 W_{p_1}$$

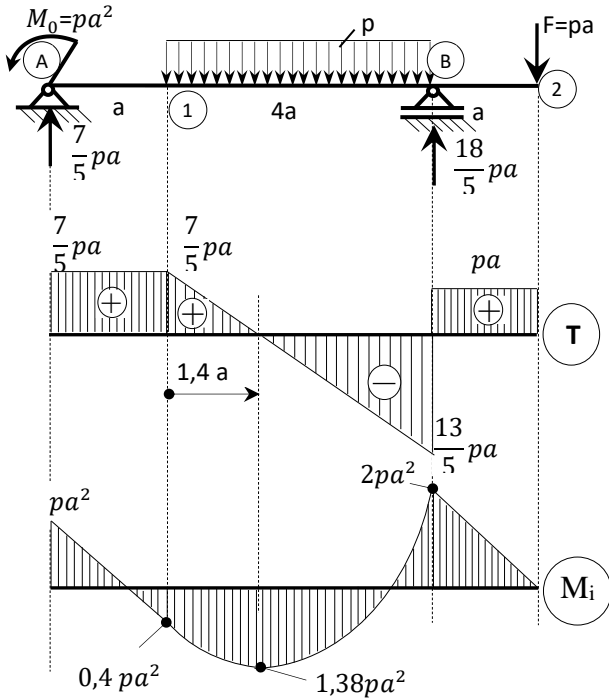
$$\frac{0,2 \text{ m}}{GI_{p_1}} \left[2X + 3X - 3M_0 + \frac{4 \cdot 81}{256} (X - 3M_0) \right] = 0 \Rightarrow 6,265625X = 6,796875M_0 \Rightarrow X = 1,0848M_0$$

$$\tau_{\max} = \max \left(\frac{1,9152M_0}{W_{p_2}}; \frac{1,0848M_0}{W_{p_1}} \right) = \frac{1,0848M_0}{\frac{\pi \cdot 60^3}{16}} = 80 \Rightarrow M_{0, \text{cap}} = 3,127 \text{ kNm}$$

$$\Delta \varphi_2 = \Delta \varphi_{12} = \frac{1,9152 \cdot 3,127 \cdot 10^6 \cdot 800 \cdot 32}{8 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 80^4 \cdot 8^2 \cdot 2} = 0,01489 \text{ rad} = 0,8535^\circ$$

Locală 2006

I)



$$y_c = 55,825 \text{ mm}$$

$$I_z = 10,483 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$W_{zmin} = \frac{I_z}{64,1748} = 163,351 \text{ mm}^3$$

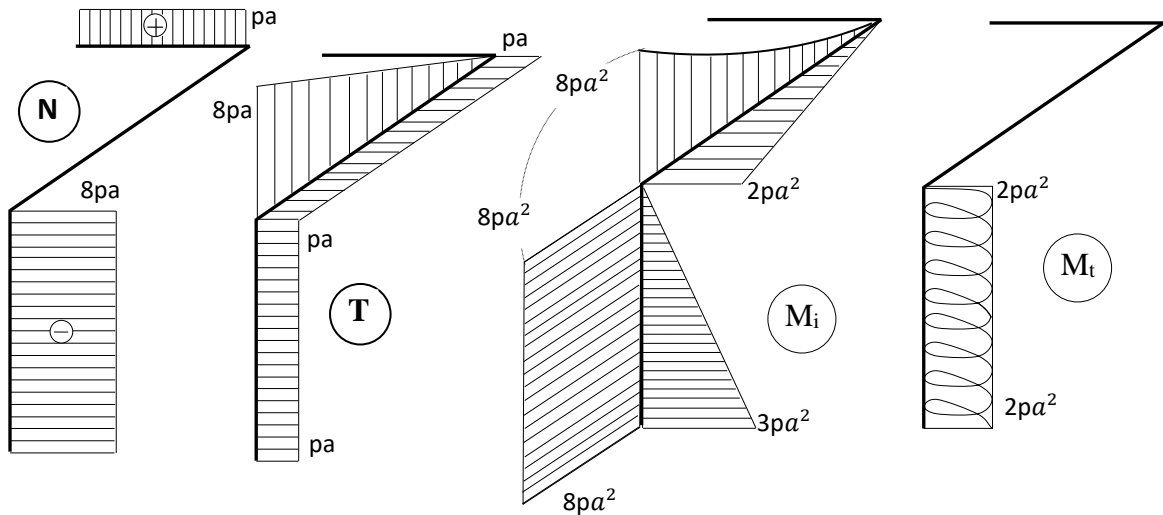
$$M_{i,cap} = 2p \cdot 10^6 = 150 \cdot 163357$$

$$p_{cap} = 12,25 \text{ kN/m}$$

$$\sigma_{K(1)} = \frac{2}{5} pa^2 \cdot \frac{y_K}{I_z} = 16,7455 \text{ MPa}$$

$$\tau_K = 1,499 \text{ MPa}$$

II)



Secțiunea periculoasă este încadrarea:

$$N = 8pa; \quad N = 5760 \text{ N}; \quad M_{i,z} = 3 pa^2; \quad M_{i,y} = 8 pa^2;$$

$$M_{i,rez} = \sqrt{73} pa^2 = 3,691 \cdot 10^6 \text{ Nmm}; \quad M_t = 2 pa^2 = 864 \cdot 10^3 \text{ Nmm};$$

$$M_{ech III} = \sqrt{M_{i,rez}^2 + M_t^2} = \sqrt{77} pa^2 = 3,79078 \cdot 10^6 \text{ Nmm}; \quad W_z = \frac{M_{ech III}}{\sigma_a} \Rightarrow \frac{\pi d^3}{32} = \frac{M_{ech III}}{\sigma_a}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{ech III}}{\pi \cdot \sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot \sqrt{77} pa^2}{\pi \cdot \sigma_a}} \Rightarrow d = 61,14 \text{ mm} = 62 \text{ mm}$$

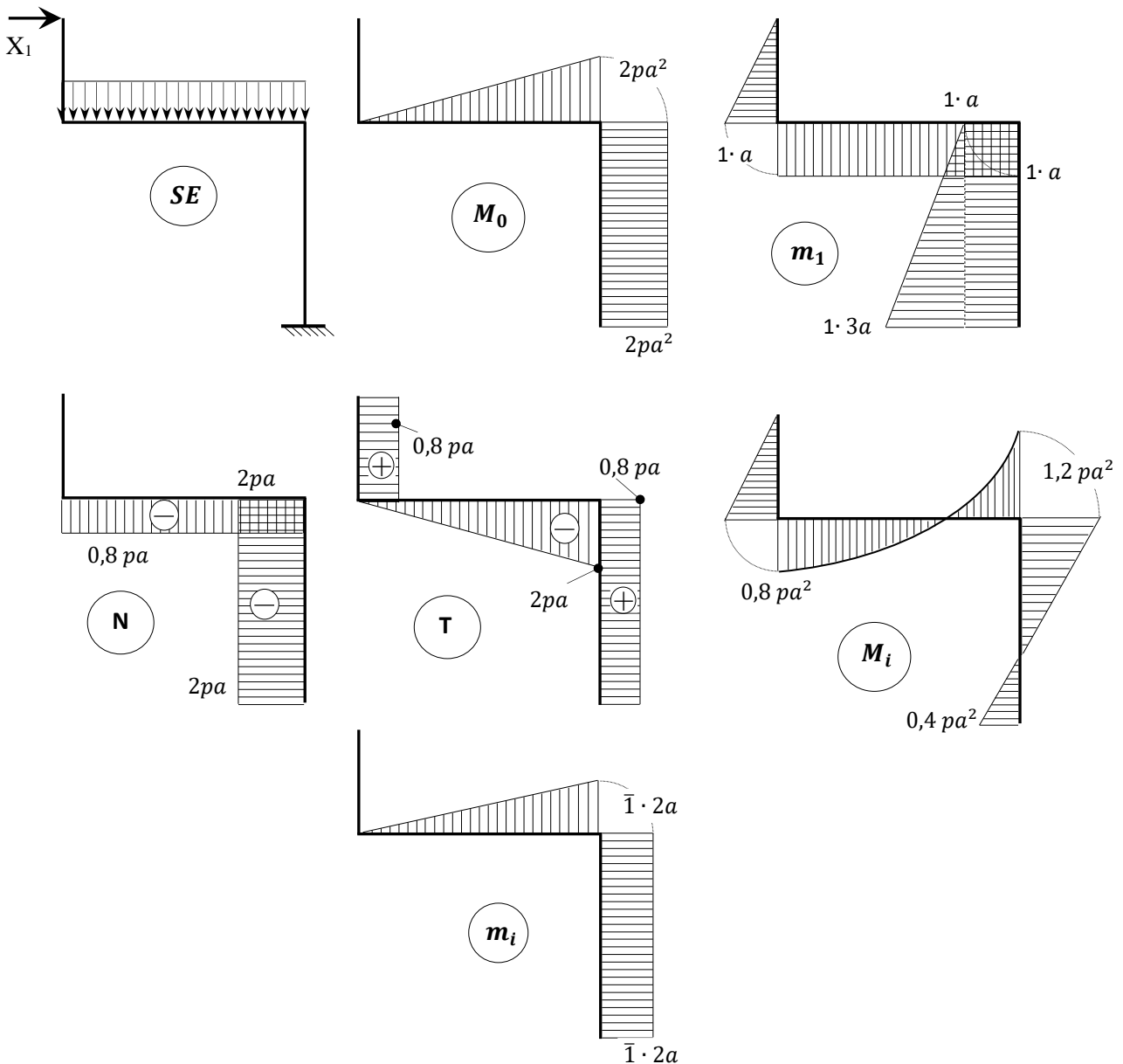
Verificarea tensiunii maxime cu considerarea forței axiale:

$$\sigma_{ech III} = \sqrt{\sigma_t^2 + 4 \tau^2} \approx \sigma_{a,III}; \sigma_t = \sigma_N + \sigma_{M_{i,rez}}; \sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{8pa}{\frac{\pi d^2}{4}} = 1,9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{M_{i,rez}} = \frac{M_{i,rez}}{W_z} = \frac{\sqrt{73} pa^2}{\frac{\pi d^3}{32}} = 157,82; \sigma_t = 1,9 + 157,82 = 159,72; \tau = \frac{2pa^2}{\frac{\pi d^3}{16}} = 18,47 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ech,III,max} = \sqrt{159,72^2 + 4 \cdot 18,47^2} = 163,93 \text{ MPa} > \sigma_a = 160 \text{ MPa} \Rightarrow d_{min} = 63 \text{ mm}$$

III)

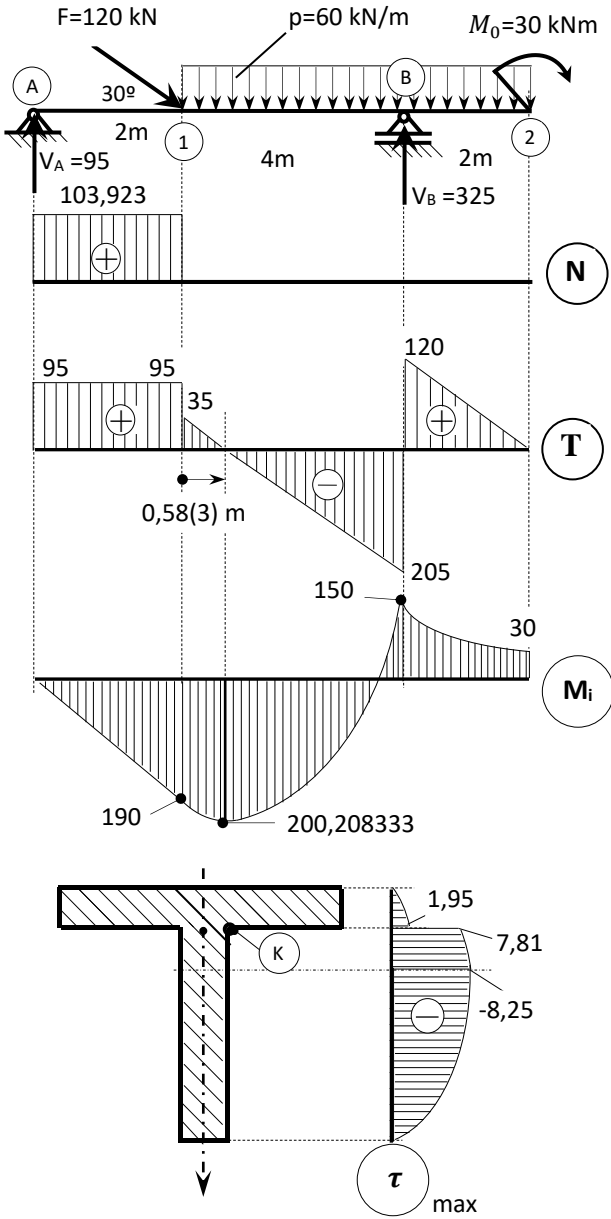


$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{10} = 0; \delta_{11} = \frac{20 a^3}{3 EI}; \Delta_{10} = -\frac{16 pa^4}{3 EI}; X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}}; X_1 = \frac{4}{5} pa = 0,88pa$$

$$\delta_{1,v} = \frac{6 pa^4}{5 EI}$$

Locală 2007

I)



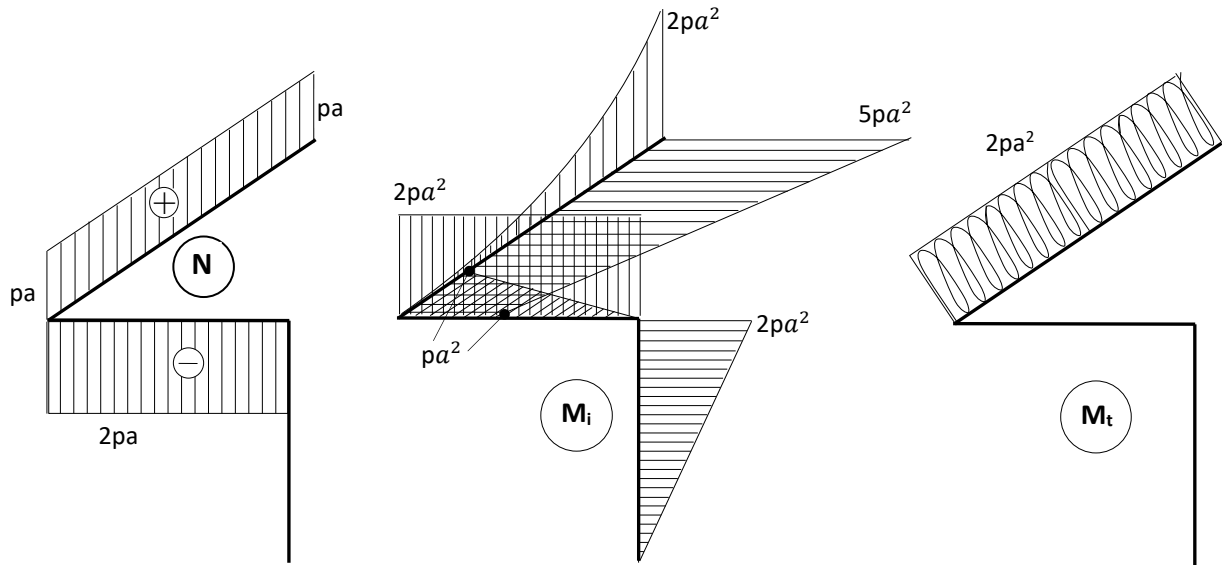
$$\begin{aligned}
 H_A &= 103,923 \text{ kN}; \\
 F_v &= 60; \\
 V_A &= 95 \text{ kN}; \\
 V_B &= 325 \text{ kN}; \\
 y_C &= 3,25 \text{ a}; \\
 I_z &= 18,16(6) \text{ a}^4; \\
 W_{z,min} &= 5,58974 \text{ a}^3; \\
 W_{z,max} &= 10,38095 \text{ a}^3 \\
 \sigma_{ef,MAX} &= \frac{M_{i,max}}{W_{z,min}} \leq \sigma_{at} \\
 \Rightarrow W_{z,min,nec} &= \frac{200,208333 \cdot 10^6}{60} \\
 &= 5,58974 \text{ a}^3_{nec} \\
 \Rightarrow a_{nec,t} &= 84,2 \text{ mm}; \\
 a_{ef} &= 85 \text{ mm} \\
 \sigma_{K,(B)} &= \frac{150 \cdot 10^6}{18,16(6) \cdot 85^3} \cdot 0,75 \\
 \sigma_{K,(B)} &= 10,0837 \text{ MPa} \\
 \text{sau } \sigma_{K,(B)} &= (10,37 \text{ pentru } a_{nec}) \\
 T_{max} &= -205 \cdot 10^3 \text{ N}; \\
 S_{z,2-2} &= 4a^2 \cdot 1,25a = 5a^3; \\
 S_{z,max} &= 5,28125 \text{ a}^3 \\
 \tau_{max} &= -\frac{205 \cdot 10^3 \cdot 5,28125 \cdot a^3}{a \cdot 18,1(6) \cdot a^4}; \\
 \tau_{2-2} &= -\frac{205 \cdot 10^3 \cdot 5}{a^2 \cdot 18,16(6)}
 \end{aligned}$$

II) Secțiunea periculoasă este: ÎNCASTRAREA, (4), în care există eforturile:

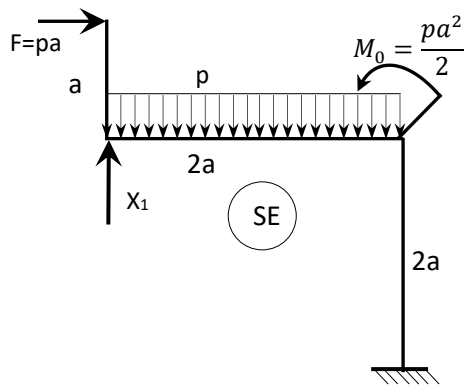
$$N_4 = pa; M_{i,(4)} = \sqrt{29} pa^2; M_{t,(4)} = pa^2;$$

Rezultă tensiunile:

$$\begin{aligned}
 \sigma_N &= \frac{4pa}{\pi d^2}; \quad \sigma_{Mi} = \frac{\sqrt{29} pa^2 \cdot 32}{\pi d^3} = 215,4 \cdot \frac{4pa}{\pi d^2}; \Rightarrow \sigma_t = 216,4 \cdot \frac{4pa}{\pi d^2} \\
 \tau_{max} &= \frac{2pa^2 \cdot 16}{\pi d^3} = 40 \cdot \frac{4pa}{\pi d^2}; \\
 \Rightarrow \sigma_{ech(3)} &= \frac{4pa}{\pi d^2} \sqrt{216,4^2 + 4 \cdot 40^2} = \sigma_a \\
 \Rightarrow p_{cap} &= 2,72 \text{ N/mm}
 \end{aligned}$$



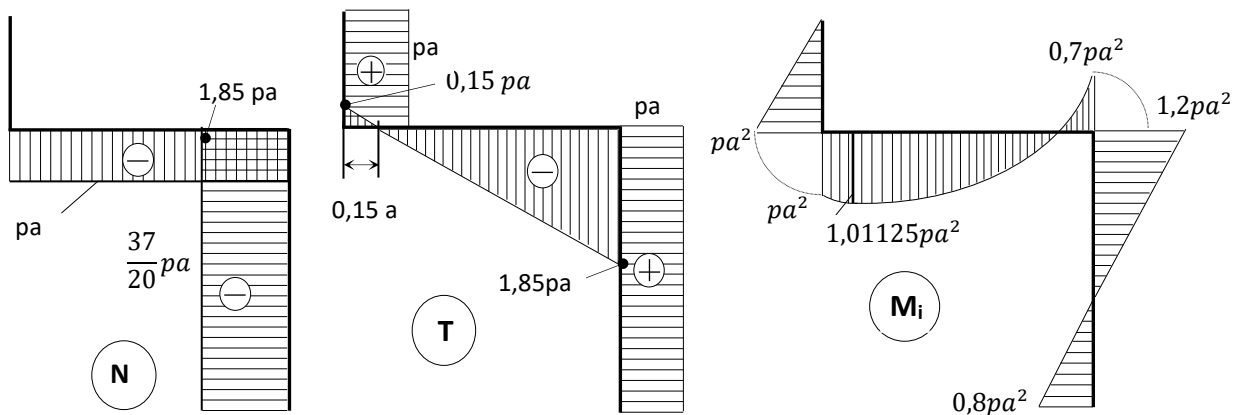
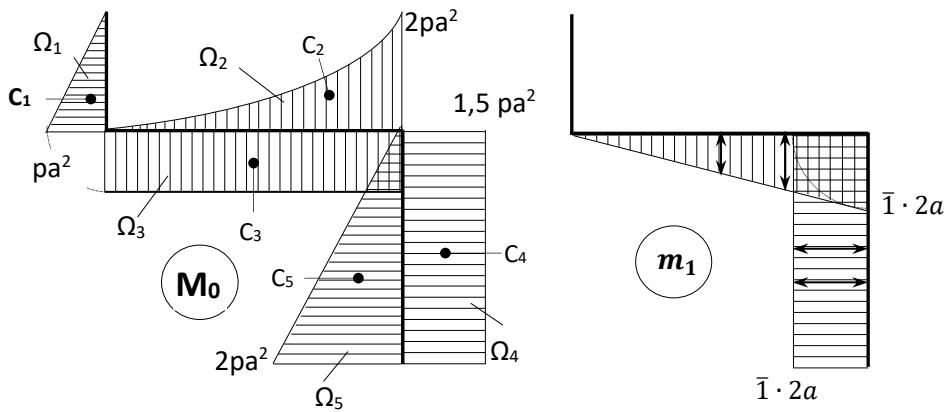
III)



$$EI \Delta_{10} = -pa^4;$$

$$EI \delta_{11} = \frac{20}{3} a^3;$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{3}{20} pa = 0,15 pa$$

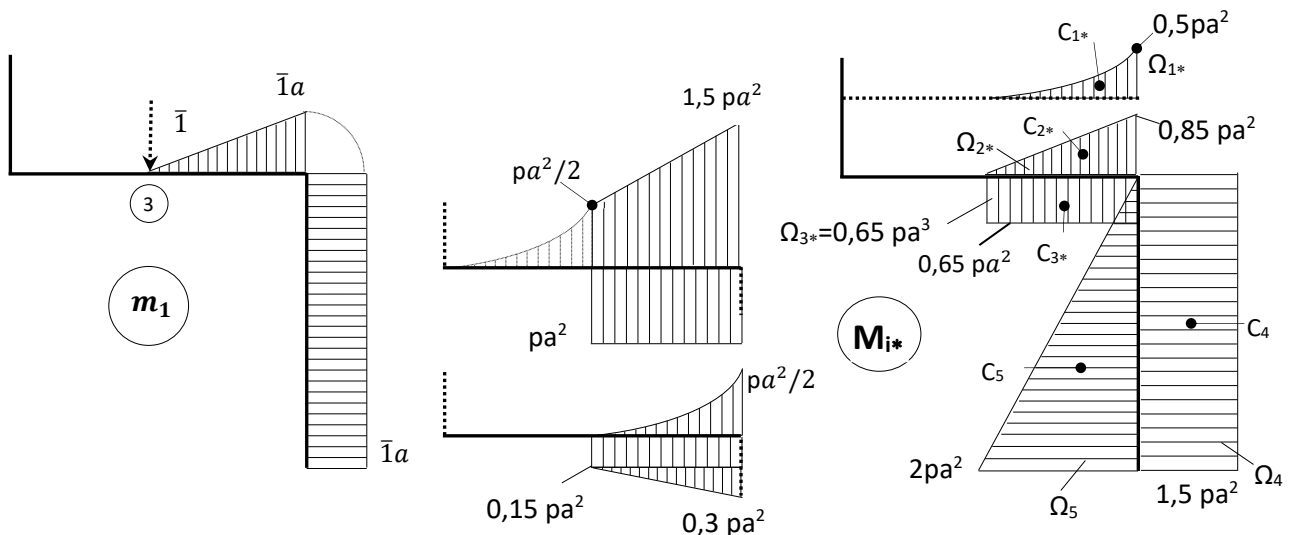


$$[3 - 4] \quad M_{i(x)} = 0,65pa^2 - 0,85pax - 0,5px^2; \quad m_{i(x)} = -\bar{1} \cdot x$$

$$[4 - 5] M_{i(x)} = -1,2pa^2 + pax; \quad m_{i(x)} = -\bar{1}a$$

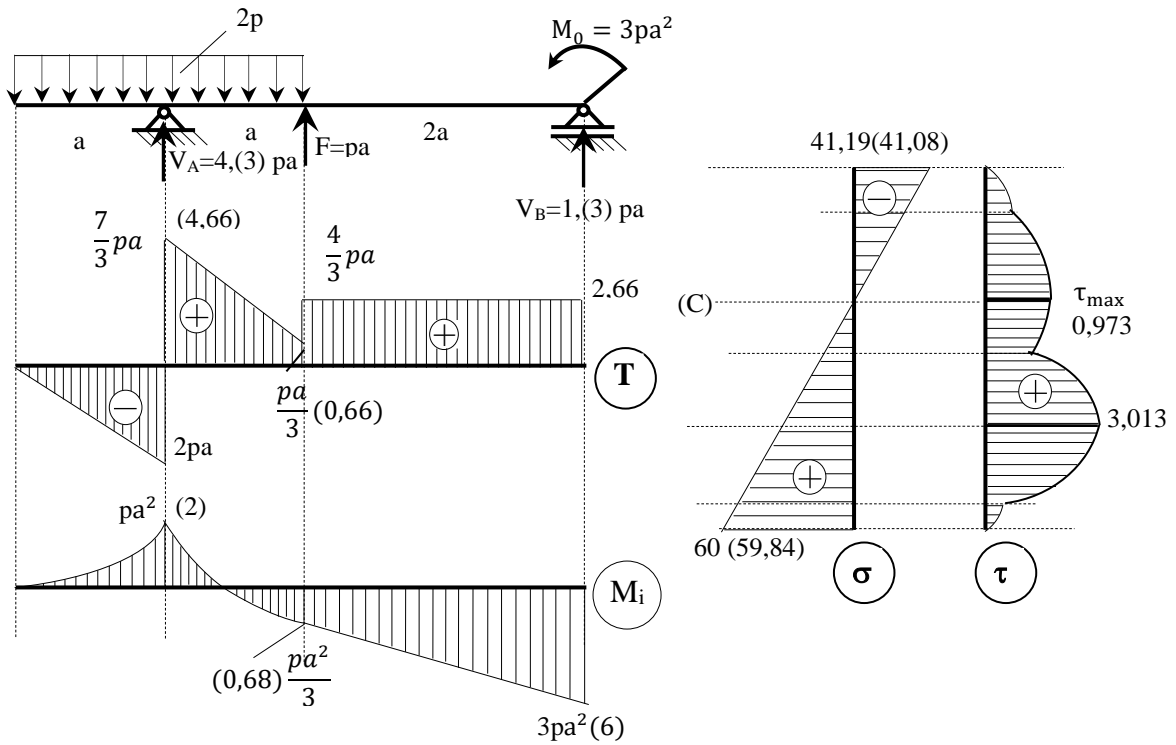
$$\delta_{v(3)} = 0,283(3) \frac{pa^4}{EI}$$

Obs. Dacă se aplică procedeul de integrare Vereșceaghin, calculul deplasării este mai laborios, presupunând trasarea altor diagrame pe intervalul dintre secțiunile (3) și (4) pentru sarcina distribuită. Se vor utiliza doar suprafețele din diagrama (M_{i*}).



Locală 2008

I)



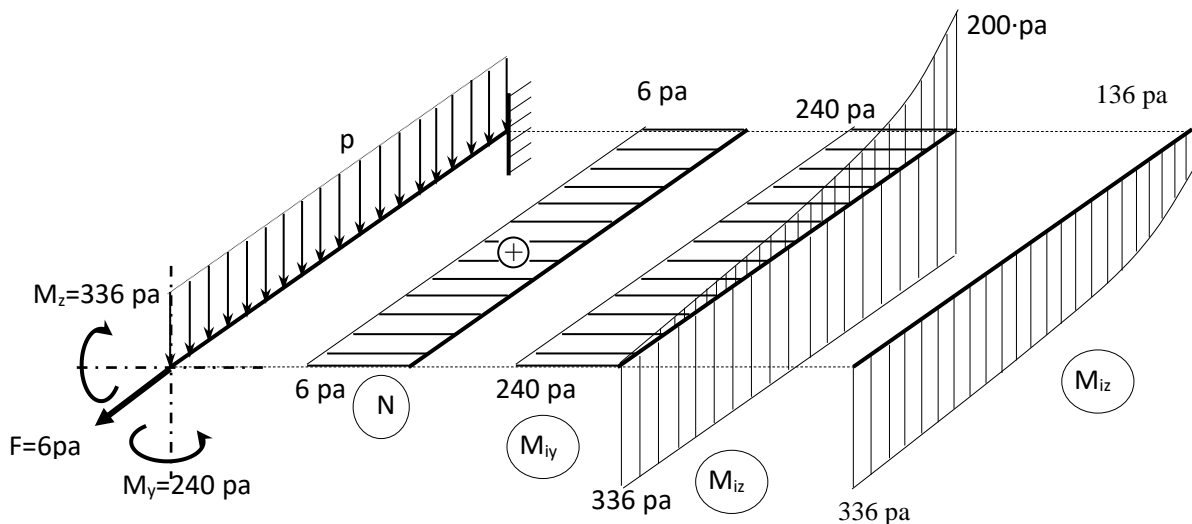
$$V_A = \frac{13}{3}pa = 8,66 \text{ kN} ; V_B = \frac{4}{3}pa = -2,66 \text{ kN}$$

$$Y_G = 6,552t (4,478t) ; I_z = 491,3t^4 ; W_{z_{min}} = 75,33 t^3 ; W_{z_{max}} = 100,714 t^4$$

$$t_{nec} = 10,9 [mm] ; \Rightarrow t_{ef} = 11 [mm]$$

II)

$y_F = 56 \text{ mm} ; z_F = 40 \text{ mm} ; \Rightarrow N = 6 pa ; M_z = F \cdot y_F = 336 pa ; M_z = F \cdot z_F = 240 pa$
 Sarcina uniform distribuită determină un moment $M_{i,z}$ variabil cu valoarea maximă: $0,5 pa^2$.



$$y_C = 56 \text{ mm}; A = 8000 \text{ mm}^2; I_z = 1053,86 \cdot 10^4 \text{ mm}^4; I_y = 490,66 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Secțiunea periculoasă este în capătul liber, în care există eforturile:

$$\begin{aligned} N &= 2.400 \text{ p} = 6 \text{ pa}; \\ M_{iz} &= 134,4 \cdot 10^3 \text{ p} = 336 \text{ pa}; \\ M_{iy} &= 96 \cdot 10^3 \text{ p} = 240 \text{ pa}. \end{aligned}$$

Tensiunea maximă se obține în punctul de aplicație al forței, punct cel mai îndepărtat de axa neutră:

$$\begin{aligned} \sigma_{max,t} &= \frac{2400 \text{ p}}{8000} + \frac{134,4 \cdot 10^3 \text{ p} \cdot 56}{1053,86 \cdot 10^4} + \frac{96 \cdot 10^3 \text{ p} \cdot 40}{490,66 \cdot 10^4} = 150 \text{ [MPa]} \\ &\Rightarrow p_{cap} = 83,51 \text{ N/mm} \end{aligned}$$

Expresia tensiunii totale este:

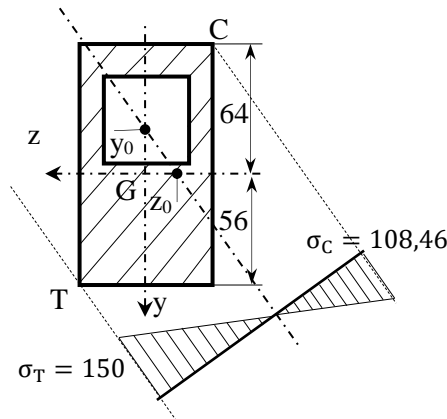
$$\sigma_t = 25,053 + 1,065 y + 1,634 z;$$

Axa neutră:

$$\sigma_t \equiv 0; \cap Gy (z = 0) \Rightarrow y_0 = -23,52; \cap Gz (y = 0) \Rightarrow z_0 = -15,33 \text{ mm}$$

Tensiunea maximă la compresiune:

$$\sigma_{t,c} = 25,053 - 1,065 \cdot 64 - 1,634 \cdot 40 = -108,467 \text{ MPa};$$



III)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad N_1' \sin \alpha &= N_3' \sin \alpha \Rightarrow N_1' = N_3'; N_1' \cos \alpha + N_3' \cos \alpha = N_2' \Rightarrow \sqrt{3}N_1' = N_2' \\ \delta &= \frac{N_1' \cdot \ell EA}{\ell} + \frac{N_2' \cdot \ell}{EA} \Rightarrow \frac{\delta EA}{\ell} = N_1' \frac{4}{3} + \sqrt{3}N_1' \Rightarrow \frac{5 \cdot 10^{-4} \ell EA}{\ell EA} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{3} N_1' \\ \Rightarrow N_1' &= \frac{3 \cdot 5 \cdot 10^{-4} EA}{4 + 3\sqrt{3}}; N_2' = \frac{3\sqrt{3} \cdot 5 \cdot 10^{-4} EA}{4 + 3\sqrt{3}} \Rightarrow \sigma_2' = 56,5 \text{ MPa}; \sigma_1' = \sigma_3' = -32,62 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad N_1'' \sin \alpha &= N_3'' \sin \alpha; 2N_1'' \cos \alpha + N_2'' = F \Rightarrow \sqrt{3}N_1'' + \frac{4}{3}N_1'' = F \Rightarrow N_1'' = 0,326 F \\ \frac{N_1'' \ell}{\cos^2 \alpha \cdot EA} &= \frac{N_2'' \ell}{EA} \Rightarrow N_2'' = \frac{4}{3}N_1''; N_1'' = 16311 \text{ N}; N_2'' = 21748 \text{ N}; \sigma_1'' = \sigma_3'' = +51,92; \end{aligned}$$

$$\sigma_2'' = \frac{N_2''}{A} = 69,23 \text{ MPa}$$

$$\text{c)} \quad \sigma_1 = \sigma_3 = 19,3 \text{ MPa}; \quad \sigma_2 = 125,73 \text{ MPa}$$

Locală 2009

I)

$$V_A = pa; V_B = 3pa;$$

$$y_C = 6,26 t; I_z = 2322,57 t^4;$$

$$W_{z_{\min}} = \frac{I_z}{8,74 t} = 265,741 t^3;$$

$$W_{z_{\max}} = 371,018 t^3;$$

$$\sigma_{ef,MAX} = \frac{4,5 pa^2}{W_{z_{\min}}} \leq \sigma_{ac} = 90$$

$$\Rightarrow t_{nec,c} = \sqrt[3]{\frac{4,5 \cdot 12 \cdot 600^2}{265,741 \cdot 90}} = 9,33 \text{ mm}$$

$$\sigma_{ef,max,t} = \max\left(\frac{4,5 pa^2}{W_{z_{\max}}}; \frac{3 pa^2}{W_{z_{\min}}}\right)$$

$$\sigma_{ef,max,t} = \frac{4,5 pa^2}{371,018 t^3} = 60 = \sigma_{at}$$

$$\Rightarrow t_{nec,t} = 9,558 \text{ mm}$$

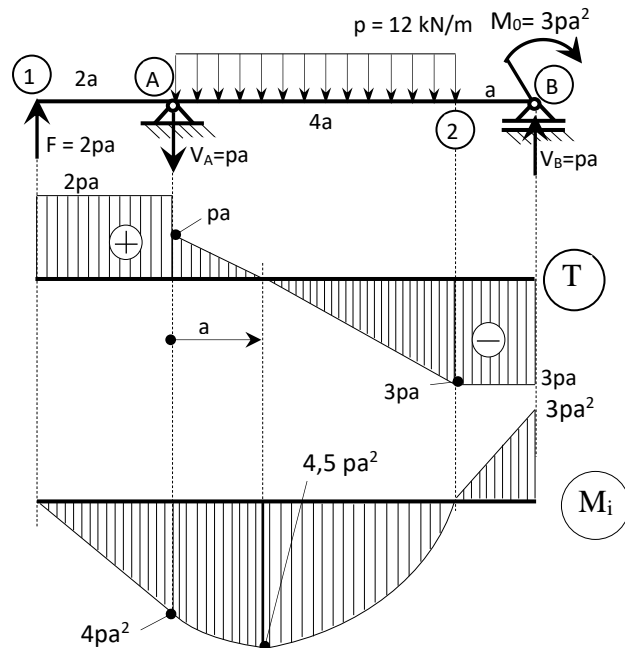
$$t_{nec} = \max(t_{nec,c}; t_{nec,t}) = 9,56 \text{ mm}$$

$$y_K = 6,74 t; S_{z,K} = 123,84 t^3; b_K = 4 t; M_{i,max} = 4,5 pa^2; T_{max} = -3pa$$

$$\sigma_{K,max} = \frac{4,5 \cdot 12 \cdot 600^2}{2322,57(3) \cdot t^4} \cdot 6,74 t = -64,56 \text{ MPa}$$

$$\text{sau } \sigma_{K,max} = -\frac{60}{6,26 t} \cdot 6,74 t = -64,6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{K,max} = -\frac{3 \cdot 12 \cdot 600 \cdot 123,84 t^3}{4 t \cdot 2322,57(3) t^4} = -3,15 \text{ MPa}$$



II)

$$A = 2 a^2; W_z = \frac{a^3}{3}; W_y = \frac{2 a^3}{3};$$

$$I_z = \frac{a^4}{6}; I_y = \frac{2 a^4}{3}$$

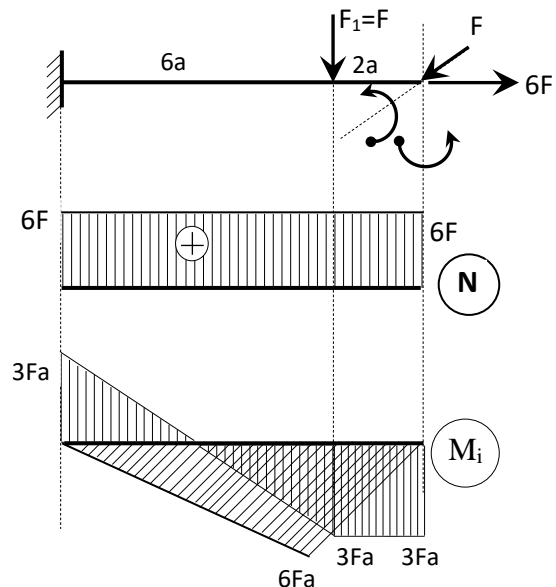
$$\sigma_{max} = \frac{6F}{A} + \frac{6Fa}{W_y} + \frac{3Fa}{W_z} = 21 \frac{F}{a^2} \equiv \sigma_a$$

$$\Rightarrow F_{cap} = \frac{120 \cdot 160^2}{21} = 146285,7 \text{ N}$$

$$\sigma_t = \frac{6F}{2a^2} + \frac{6Fa}{\frac{2}{3}a^4} \cdot z + \frac{3Fa}{\frac{1}{6}a^4} \cdot y$$

$$\sigma_t = \frac{3F}{a^2} \left(1 + \frac{3}{a} \cdot z + \frac{6}{a} \cdot y \right)$$

$$\sigma_t \equiv 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{3}{a} \cdot z + \frac{6}{a} \cdot y = 0$$

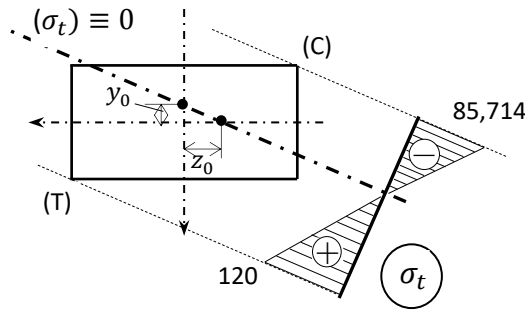


$$\Rightarrow \cap Gy (z = 0) \Rightarrow y_0 = -\frac{a}{6} = -26, (6)mm;$$

$$\cap Gz (y = 0) \Rightarrow z_0 = -\frac{a}{3} = -53, (3)mm$$

$$\sigma_{t,(C)} = \frac{3F}{a^2} \left(1 - \frac{3}{a} \cdot a - \frac{6}{a} \cdot \frac{a}{2} \right) = -\frac{15F}{a^2} = -85,71$$

$$\sigma_{t,(T)} = \frac{3F}{a^2} \left(1 + \frac{3}{a} \cdot a + \frac{6}{a} \cdot \frac{a}{2} \right) = \frac{21F}{a^2} = 120 MPa$$

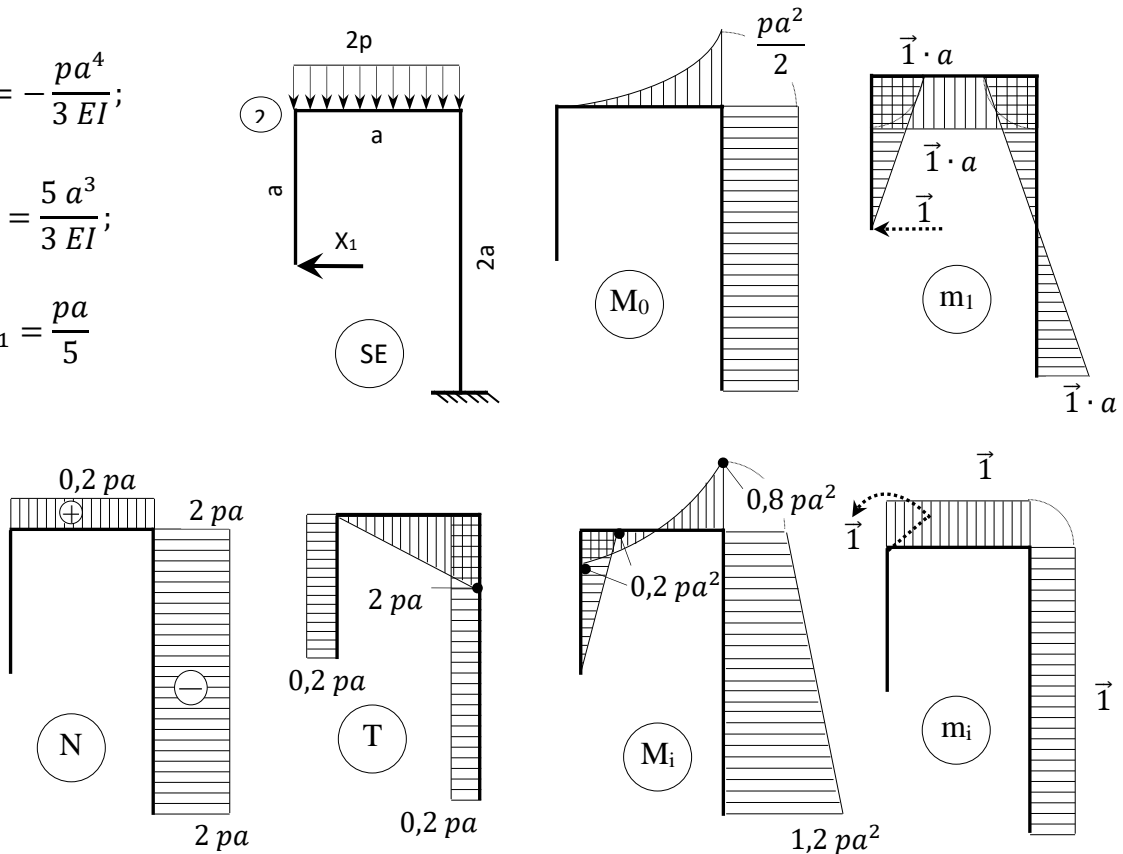


III)

$$\Delta_{10} = -\frac{pa^4}{3EI};$$

$$\delta_{11} = \frac{5a^3}{3EI};$$

$$X_1 = \frac{pa}{5}$$



$$\varphi_2 = \frac{1}{EI} \left(\frac{pa^3}{3} \cdot 1 - a^2 \frac{pa}{5} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2EI} (2pa^2 \cdot 1) = \frac{17}{15} \frac{pa^3}{EI}$$

Locală 2010

I)

$$y_c = 95 \text{ mm}; I_z = 29546700 \text{ mm}^4;$$

$$\sigma_{at} = 50 \text{ MPa și } \sigma_{ac} = 80 \text{ MPa}$$

$$W_{z,min} = 311017,5 \text{ mm}^3;$$

$$W_{z,max} = 454564 \text{ mm}^3;$$

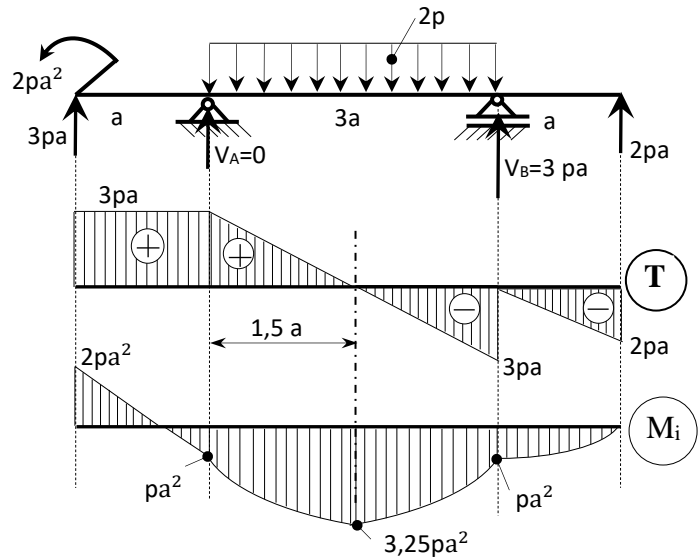
$$S_{z,max} = 270750; S_{z,(2)} = 252000 \text{ mm}^3;$$

$$S_{z,(K)} = 144000 \text{ mm}^3;$$

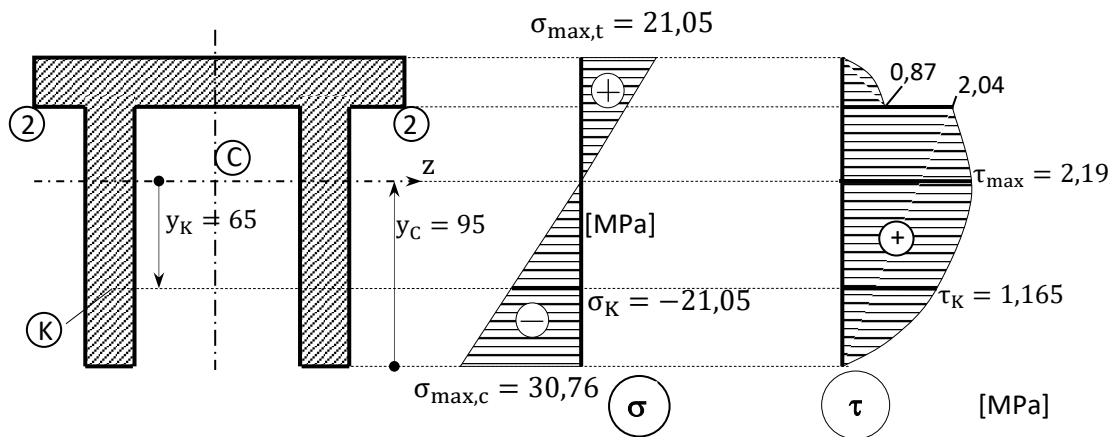
$$\sigma_{MAX} = \sigma_{max,t} = \frac{3,25pa^2}{W_{z,min}} = 50 \Rightarrow$$

$$p_{cap} = 31107,5 \cdot \frac{50}{3,25 \cdot 10^6}$$

$$p_{cap} = 4,785 \text{ N/mm}$$



$$\sigma_1 = 0,064 \text{ MPa}; \sigma_2 = -21,114 \text{ MPa}; \alpha_1 = 3,158^\circ; \alpha_2 = 93,158^\circ$$



II)

a) $\ell = 600 \text{ mm}; A = 400 \text{ mm}^2; E_{O\ell} = 2 \cdot 10^5;$

$$E_{A\ell} = 1 \cdot 10^5; \alpha_{A\ell} = 1,8 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}};$$

$$E_{A\ell} \cdot A_{A\ell} = 2E_{O\ell}A_{O\ell} = 2EA = E_2A_2;$$

$$E_1A_1 = E_3A_3 = EA$$

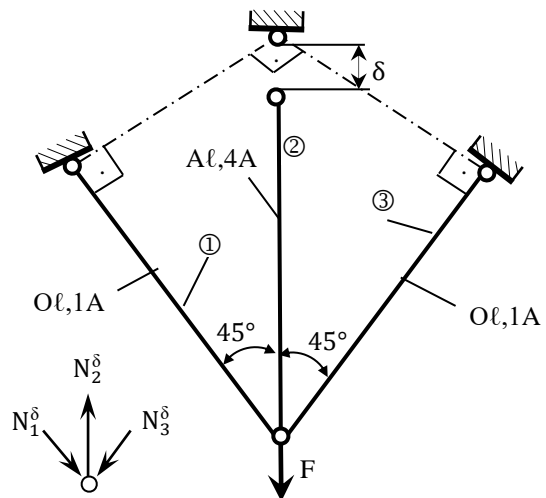
$$N_2^\delta = N_3^\delta$$

$$N_2^\delta = 2N_1^\delta \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{2} \cdot N_1^\delta = N_2^\delta$$

$$\delta = \Delta\ell_2 + \frac{\Delta\ell_1}{\cos 45^\circ} = \frac{N_2^\delta \cdot \sqrt{2}\ell}{2EA} + \frac{N_1^\delta \cdot \ell \cdot 2}{\sqrt{2}EA}$$

$$\delta = \frac{\sqrt{2}N_1^\delta \cdot \sqrt{2}\ell}{2EA} + \frac{N_1^\delta \cdot \ell 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}EA} \Leftrightarrow$$

$$\delta = \frac{N_1^\delta \cdot \ell}{EA} (1 + \sqrt{2}) \Rightarrow N_1^\delta = \frac{\delta \cdot EA}{\ell(1 + \sqrt{2})} = 11045,7 \text{ N}; N_2^\delta = 15621 \text{ N}; N_3^\delta = N_1^\delta = 11045,7 \text{ N}$$

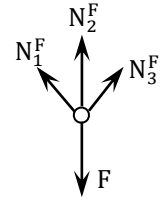


b) $N_1^F = N_3^F; 2N_1^F \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2^F = F$

$$\Delta \ell_2^F = \frac{\Delta \ell_1^F}{\cos 45^\circ} \Leftrightarrow \frac{N_2^F \cdot \sqrt{2} \ell}{2EA} = \frac{N_1^F \cdot \ell \cdot 2}{\sqrt{2}EA} \Rightarrow N_2^F = 2N_1^F \Rightarrow$$

$$N_1^F \sqrt{2} + 2N_1^F = F \Rightarrow N_1^F = \frac{F}{2 + \sqrt{2}} = 5857,86;$$

$$N_1^F = N_3^F \cong 5858 \text{ N}; N_2^F = 11716 \text{ N}$$

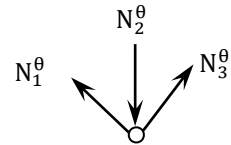


$$N_1^{F,\delta} = N_3^{F,\delta} = -5187,7 \text{ N} \Rightarrow \sigma_1 = -12,97 \text{ MPa} = \sigma_3; N_2^{F,\delta} = 27337 \text{ [N]} \Rightarrow \sigma_2 = 17,08 \text{ MPa}$$

c) $N_2^\theta = 2 \cdot N_1^\theta \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow N_2^\theta = \sqrt{2} N_1^\theta$

$$\Delta \ell_2^\theta = \frac{\Delta \ell_1^\theta}{\cos 45^\circ}; \sqrt{2} \ell \cdot \alpha \cdot \Delta \theta = \frac{N_1^\theta \cdot 2}{EA\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2} N_1^\theta \cdot \sqrt{2}}{2EA} = \frac{N_1^\theta (\sqrt{2} + 1)}{EA}$$

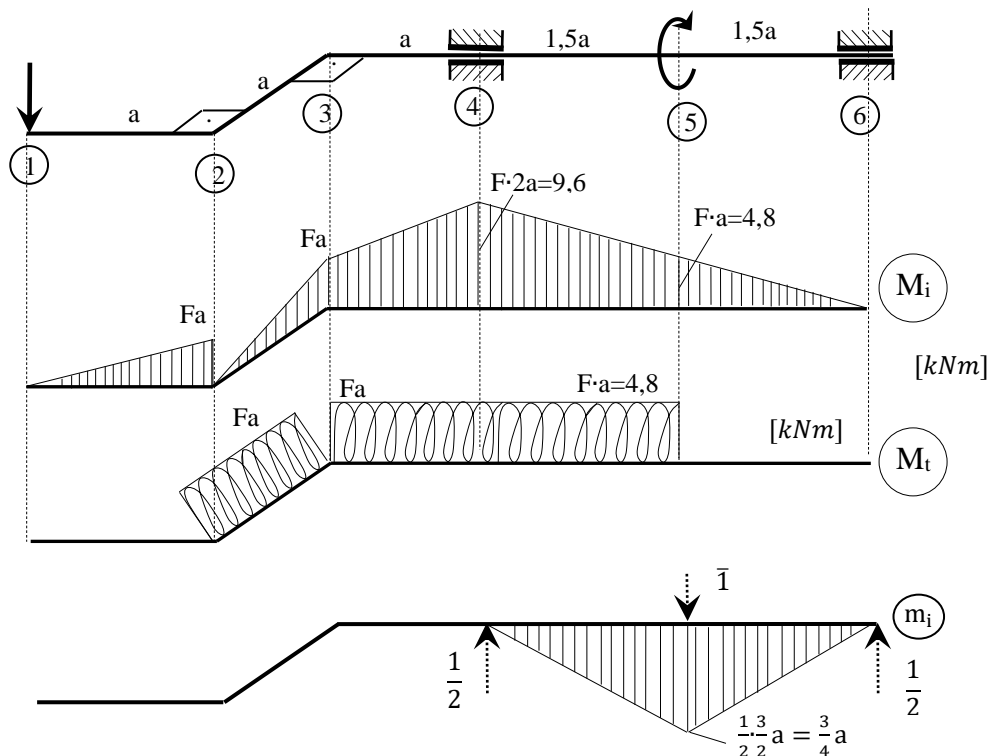
$$\Rightarrow N_1^\theta = \frac{\sqrt{2} EA \cdot \alpha \cdot \Delta \theta}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 400 \cdot 1,8 \cdot 20}{10^5 \cdot (\sqrt{2} + 1)} = 16870,65 \text{ N};$$



$$N_2^\theta = -23858,7 \text{ N} \Rightarrow N_{2,final} = 3478,3 \text{ N}; \sigma_1^\theta = \sigma_3^\theta = 42,176 \text{ MPa}; \sigma_2^\theta = -14,912 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1^{\delta,F,\theta} = \sigma_3^{\delta,F,\theta} = -12,97 + 42,17 = 29,2 \text{ MPa}; \sigma_2^{\delta,F,\theta} = 17,08 - 14,912 = 2,168 \text{ MPa}$$

III)



Secțiunea periculoasă:(4)

Eforturile sunt: $M_i = M_{i_z} = 2F \cdot a = 9,6 \text{ kNm}; M_t = F \cdot a = 4,8 \text{ kNm}$

$$M_{ech,III} = \sqrt{M_i^2 + M_t^2} = \sqrt{5} F a = 10,733 \Rightarrow W_{nec} = \frac{M_{ech}}{\sigma_a}$$

$$d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 10,733 \cdot 10^6}{\pi \cdot 160}} = 88,07 \text{ mm}$$

Se ia : fie d = 88 mm; fie d = 89 mm

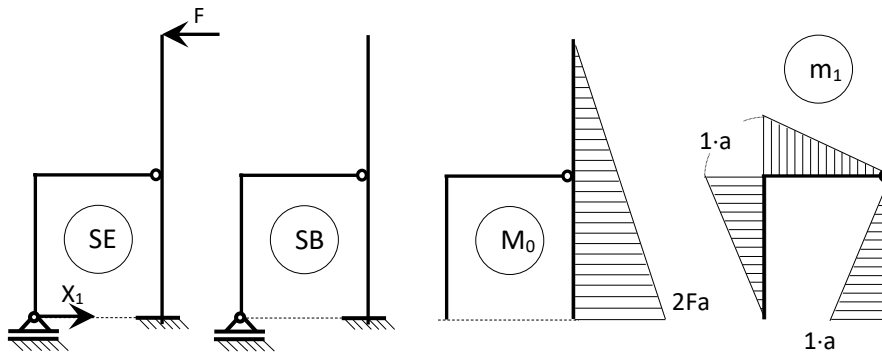
Săgeata:

$$EI\delta_5 = -\frac{1}{2}F \cdot a \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}a - F \cdot a \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}a - \frac{1}{2}F \cdot a \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}a$$

$$EI\delta_5 = -\frac{9}{8}Fa^3 = -1,125Fa^3$$

$$\Rightarrow \delta_5 = -\frac{9}{8} \cdot \frac{Fa^3}{EI_z} = -1,125 \frac{Fa^3}{EI_z} \Rightarrow \delta_5 = -3,155 \text{ mm (calculat pentru: d = 89 mm)}$$

IV)

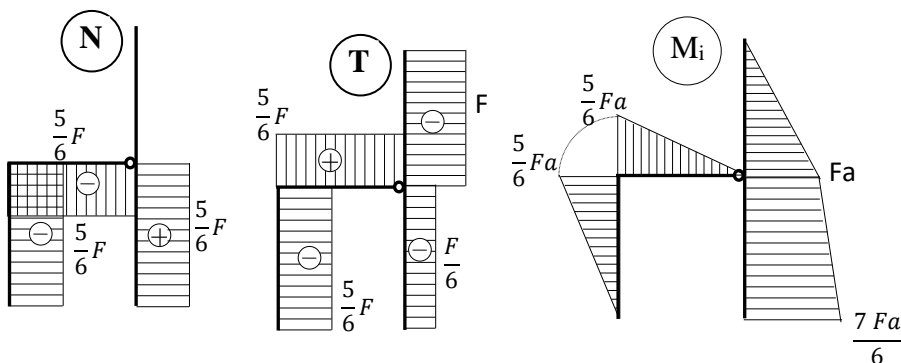


$$\Delta_{10} + \delta_{11}X_1 = 0;$$

$$EI \Delta_{10} = -F a^2 \frac{a}{2} - \frac{F a^2 2}{2} \frac{2}{3} a = -\frac{5}{6} F a^3;$$

$$EI \delta_{11} = 3 \frac{a^2 2}{2} \frac{2}{3} a = a^3$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{5 F}{6};$$



Locală 2011

I)

$$y_c = 8,579 \delta \text{ sau } 8,58 \delta;$$

$$I_z = 1451,86 \delta^4;$$

$$W_{z,min} = 169,214 \delta^3;$$

$$W_{z,max} = 267,87 \delta^3;$$

$$\sigma_{ef,MAX} = \frac{60 \cdot 10^6}{169,214 \delta^3} \equiv \sigma_{ac} = 90 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow \delta_{nec,c} = 15,794 \text{ mm};$$

$$\sigma_{max,t} = \max\left(\frac{60 \cdot 10^6}{W_{z,max}}; \frac{40 \cdot 10^6}{W_{z,min}}\right) \equiv \sigma_{at}$$

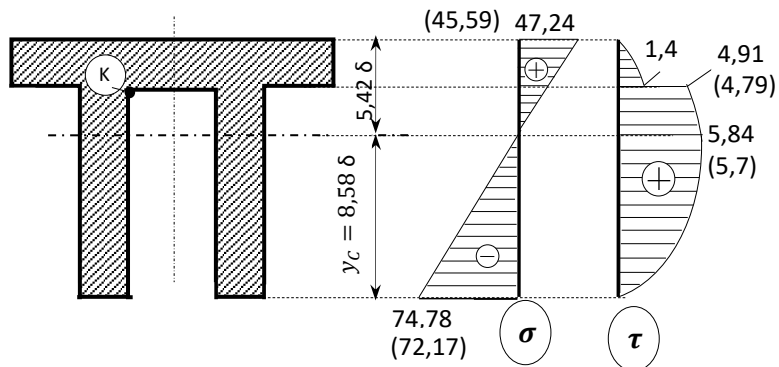
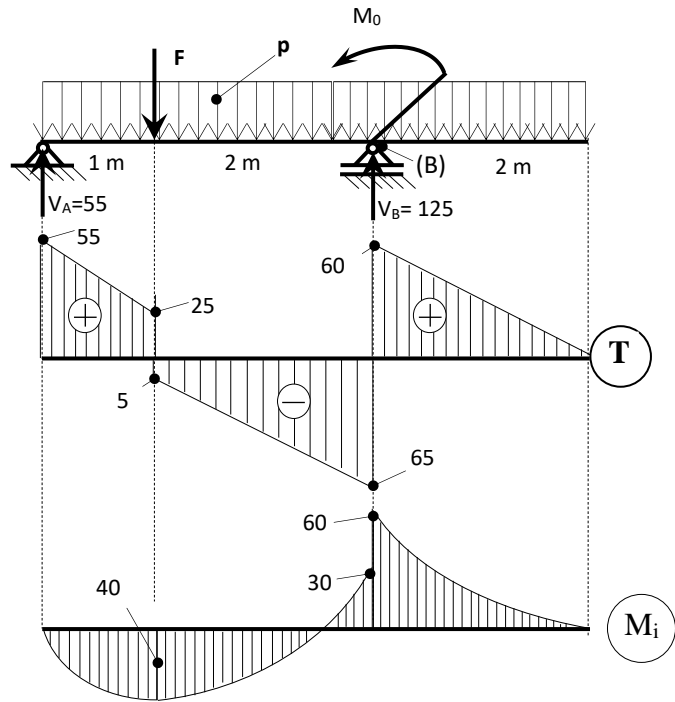
$$\sigma_{max,t} = \frac{40 \cdot 10^6}{169,214 \delta^3} = 50 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow \delta_{nec,t} = 16,78 \text{ mm}$$

$$\delta_{nec} = \max(\delta_{nec,t}; \delta_{nec,c})$$

$$\delta_{nec} = 16,78 \text{ mm}$$

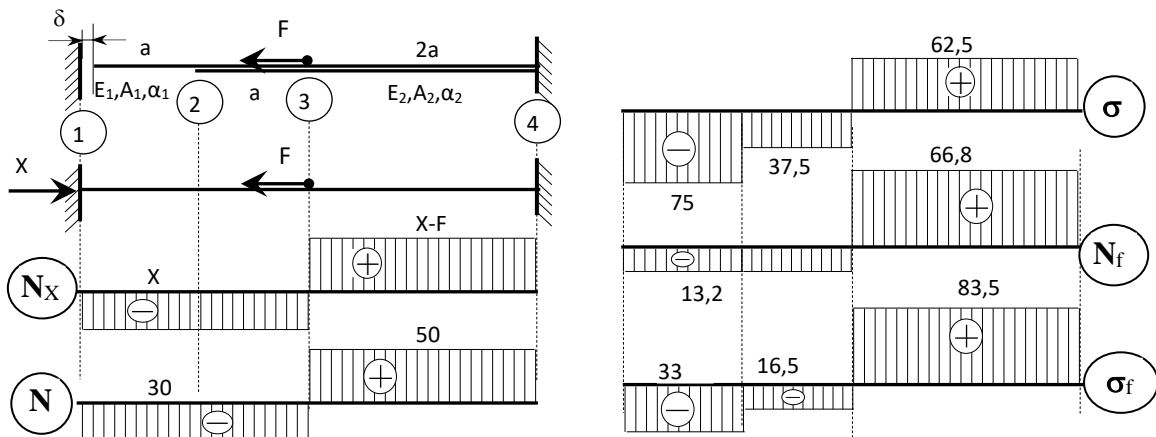
$$\Rightarrow \delta_{ef} = 16,8 \text{ sau } 17 \text{ mm}$$



$$\sigma_{K,(B)dr} = +29,8; \tau_{K,(B)dr} = 4,91; \sigma_1 = 30,59; \sigma_2 = -0,79 \text{ MPa};$$

$$\alpha_1 = 9,12^\circ; \alpha_2 = 99,12^\circ$$

II)



$$\Delta l_F = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 400}{10^5 \cdot 800} = 0,8 \text{ mm} \Rightarrow \text{apare reacțiunea } X$$

$$\frac{X \cdot a}{E_1 A} + \frac{X \cdot a}{E_2 2A} + \frac{(X - F) \cdot 2a}{E_2 2A} + \delta = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{EA} (X + X + 2X - 2F) = -\delta$$

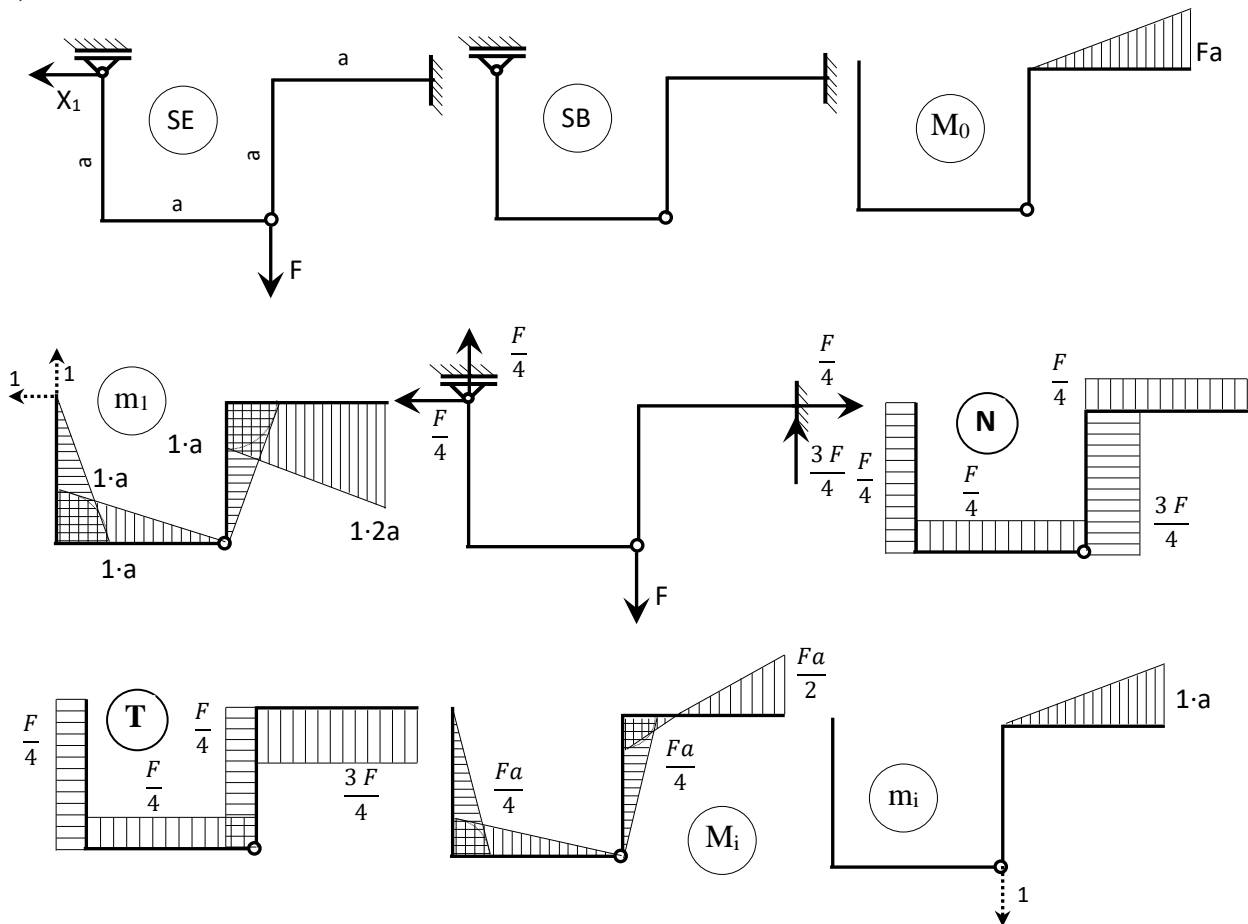
$$\Rightarrow X = 40000 - \frac{0,2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 400}{4 \cdot 400} = 30000 \text{ N} = 30 \text{ kN}$$

\Rightarrow diagrama (N) pentru eforturi și tensiunile conform diagramei (σ) în MPa

$$\Delta l_\theta = \alpha_1 \cdot a \cdot \Delta\theta + 2 \alpha_1 \cdot 3a \cdot \Delta\theta = 7 \alpha_1 \cdot a \cdot \Delta\theta \equiv \frac{N_\theta \cdot a}{EA} + \frac{N_\theta \cdot 3a}{EA} = \frac{N_\theta \cdot 4a}{EA} \Rightarrow$$

$$N_\theta = \frac{7}{4} \alpha_1 \cdot \Delta\theta \cdot EA = 16800 \text{ N} = 16,8 \text{ kN} \Rightarrow \text{diagrama } (N_f) \text{ și tensiunile } (\sigma_f)$$

III)



$$\Delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0;$$

$$EI \Delta_{10} = -\frac{F a^2 5}{2 \cdot 3} a = -\frac{5}{6} F a^3; \quad EI \delta_{11} = 3 \frac{a^2 2}{2 \cdot 3} a + \frac{a^2 3}{2 \cdot 2} a + \frac{a^2 5}{2 \cdot 3} a = \frac{10}{3} a^3$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{F}{4};$$

$$\delta_{v,(3)} = \frac{1}{EI} \left(\frac{F a^2 2}{2 \cdot 3} a - a^2 \frac{F a}{4 \cdot 2} - \frac{a^2 F 2}{2 \cdot 4 \cdot 3} a \right) = \frac{F a^3}{8 EI}$$

IV) a.

$$M_t = 9,55 \frac{P}{n} = 0,955 \text{ kNm};$$

$$M_1 = F_1 \frac{D_1}{2} = F_1 \cdot 120 \equiv M_t$$

$$\Rightarrow F_1 = 7958, (3) \text{ N};$$

$$M_2 = F_2 \frac{D_2}{2} = F_2 \cdot 200 \equiv M_t$$

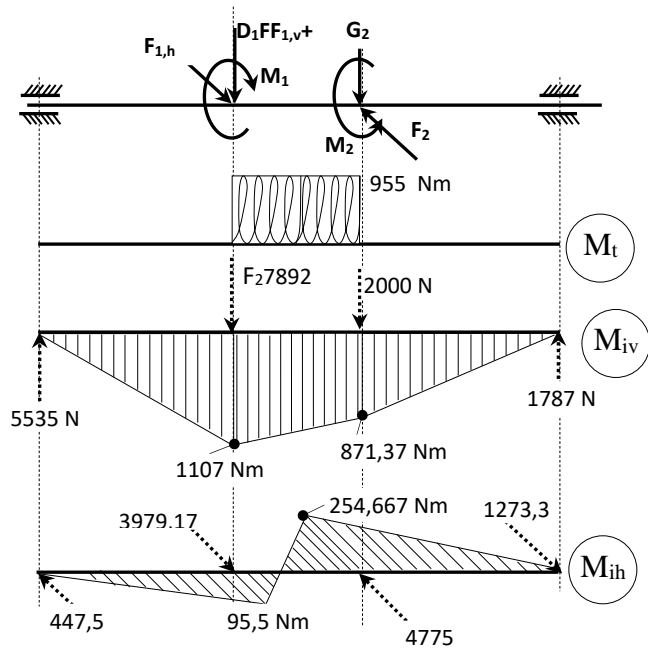
$$\Rightarrow F_2 = 4775 \text{ N}$$

$$M_{i,(1)} = 1111,165(7) \text{ Nmm};$$

$$M_{i,(2)} = 907,822 \text{ Nmm};$$

$$\Rightarrow M_{i,echIII} = 1465,167 \text{ Nmm}$$

$$d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{1465167 \cdot 32}{160 \cdot \pi}} = 45,35 \text{ mm}$$



IV) b.

$$M_t = 9,55 \frac{P}{n} = 1,91 \text{ kNm};$$

$$M_1 = F_1 \frac{D_1}{2} = F_1 \cdot 120 \equiv M_t$$

$$\Rightarrow F_1 = 15,91(6) \text{ kN};$$

$$M_2 = F_2 \frac{D_2}{2} = F_2 \cdot 200 \equiv M_t$$

$$\Rightarrow F_2 = 9,55 \text{ kN}$$

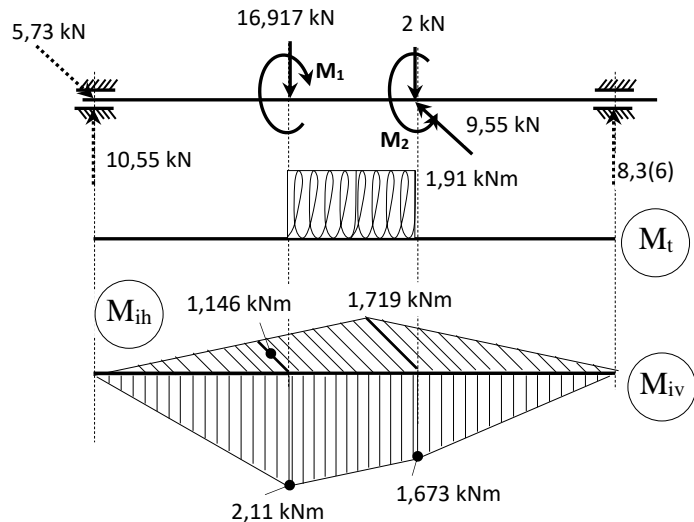
$$M_{i,(1)} = 2,401 \text{ kNm};$$

$$M_{i,(2)} = 2,3989 \text{ kNm};$$

$$\Rightarrow M_{i,echIII} = 3,068 \text{ kNm}$$

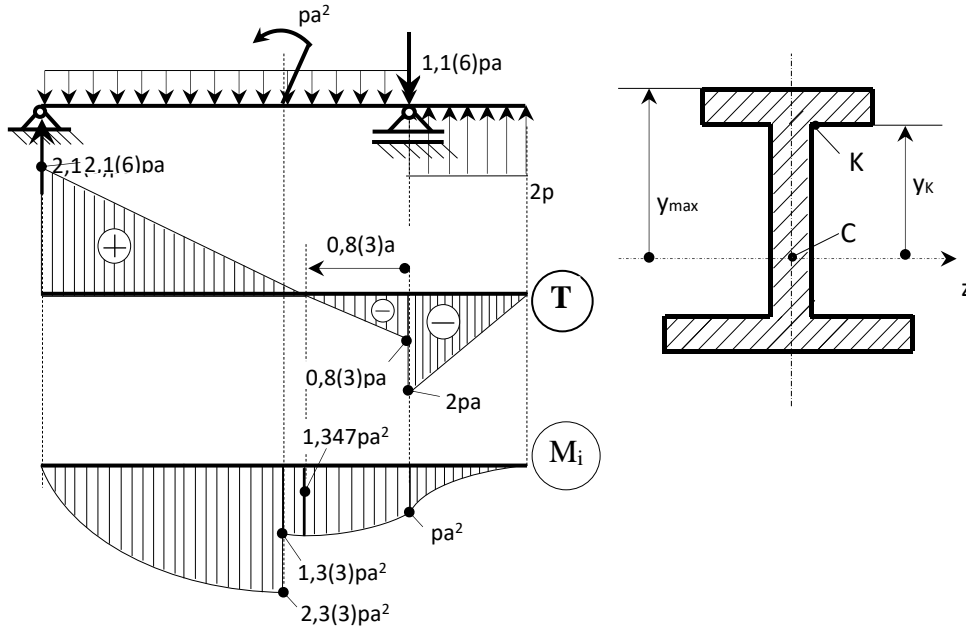
$$\Rightarrow d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{3068000 \cdot 32}{160 \cdot \pi}}$$

$$d_{nec} = 58,02 \text{ mm}$$



Locală 2012

I)



$$y_C = 83,68 \text{ mm}; y_{max} = 116,32 \text{ mm}; y_K = 98,32 \text{ mm}; I_z = 60,207 \cdot 10^6 \text{ mm}^4;$$

$$W_{z,min} = 51,76 \cdot 10^4 \text{ mm}^3; M_{i,max} = 2,3(3)pa^2 = 2,3(3)p \cdot 10^6;$$

$$\sigma_{max} = \sigma_a \Rightarrow p_{cap} = 35,49 \text{ N/mm} \cong 35,5 \text{ N/mm};$$

$$T_{(B)} = -2pa = -70980 \text{ N}; M_{i,(B)} = pa^2 = 35,49 \cdot 10^6 \text{ Nmm}; S_{z,K} = 231811,2 \text{ mm}^3;$$

$$\sigma_{K,(B)} = -57,96; \tau_{K,(B)} = -9,11; \sigma_1 = 1,4 \text{ MPa}; \sigma_2 = -59,36 \text{ MPa}; \alpha_1 = -8,72^\circ; \alpha_2 = 81,27^\circ$$

II)

a) $(\sum M)_B = 0$

$$N_1^\delta \cdot a = N_2^\delta \cdot 2a \Leftrightarrow N_1^\delta = 2 N_2^\delta$$

$$\delta = |\Delta l_2| + 2 \Delta l_1$$

$$\delta = \frac{N_2^\delta \cdot 2a}{EA} + \frac{2 N_1^\delta \cdot a}{EA} = 14 \frac{N_2^\delta \cdot a}{EA}$$

$$\Rightarrow N_2^\delta = 1570,8 \text{ N}; N_1^\delta = 3141,6 \text{ N}.$$

b) $(\sum M)_B = 0$

$$N_1^p \cdot a + N_2^p \cdot 2a = 2 pa^2; 2 \Delta l_1^p = \Delta l_2^p \Rightarrow$$

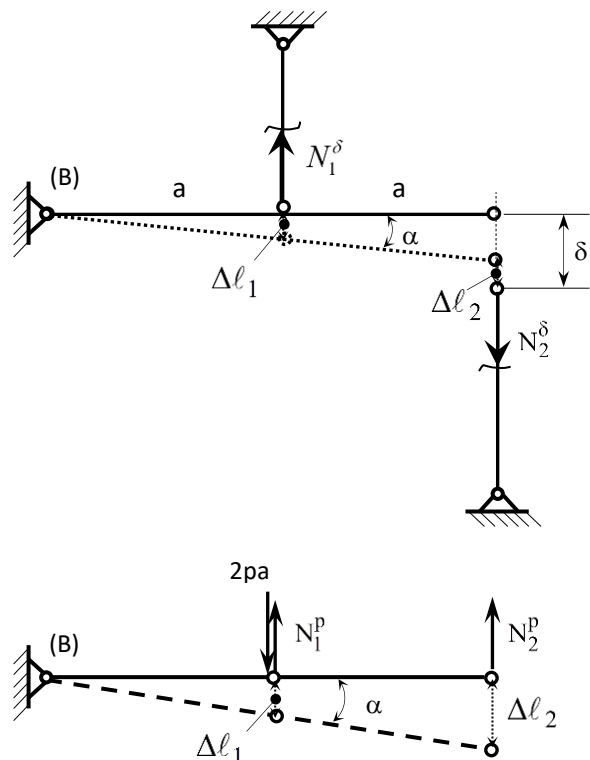
$$\Rightarrow \frac{N_2^p \cdot 2a}{EA} = \frac{2 N_1^p \cdot a}{EA} \Rightarrow N_2^p = 3 N_1^p \Rightarrow 7 N_1^p = 2 pa$$

$$\Rightarrow N_1^p = 3428,6 \text{ N}; N_2^p = 10285,7 \text{ N};$$

Prin însumare algebrică se obțin eforturile:

$$N_1 = 6570,2 \text{ N}; N_2 = -8715 \text{ N};$$

și tensiunile: $\sigma_1 = 20,91 \text{ MPa}$ și $\sigma_2 = -27,74 \text{ MPa}$.



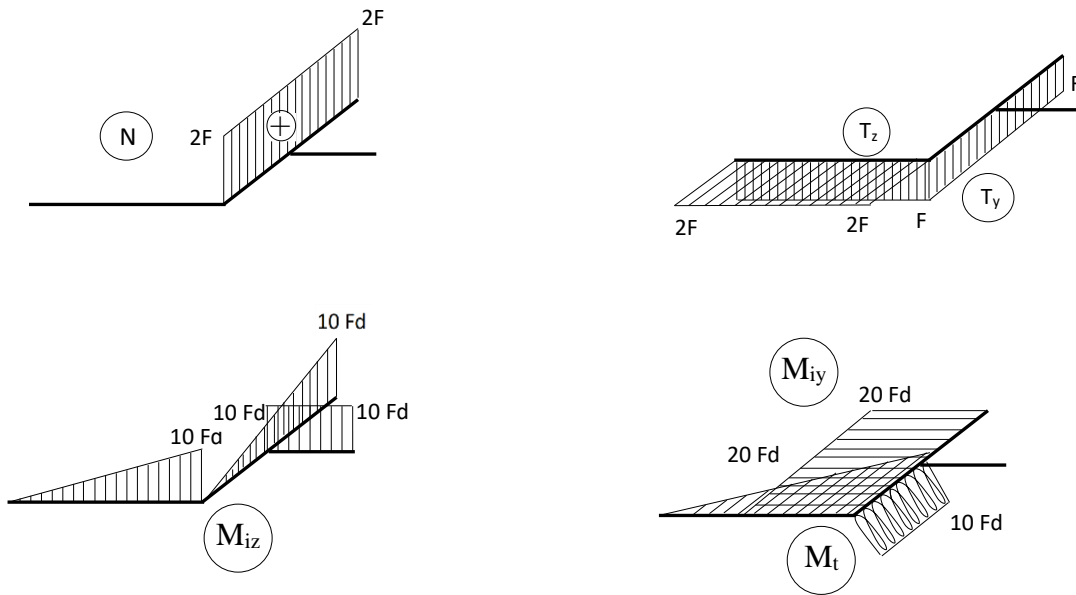
$$c) a \cdot \alpha \cdot \Delta\theta - \frac{N_1^\theta a}{\frac{E}{3}A} = \frac{1 N_2^\theta 2a}{2 EA};$$

$$\left(\sum M\right)_B = 0 \Leftrightarrow N_1^\theta \cdot a = N_2^\theta \cdot 2a \Leftrightarrow N_1^\theta = 2 N_2^\theta$$

$$N_2^\theta = \frac{EA \cdot \alpha \cdot \Delta\theta}{7}; N_1^\theta = \frac{2EA \cdot \alpha \cdot \Delta\theta}{7};$$

$$\Rightarrow \sigma_1^\theta = \frac{2E \cdot \alpha \cdot \Delta\theta}{7} = -21,6 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_{A\ell} = -0,686 \text{ MPa}$$

III)



$$M_{i,(5)} = Fd \sqrt{500}; M_{t,(5)} = 0; \Rightarrow M_{i,ech,(5)} = Fd \sqrt{500};$$

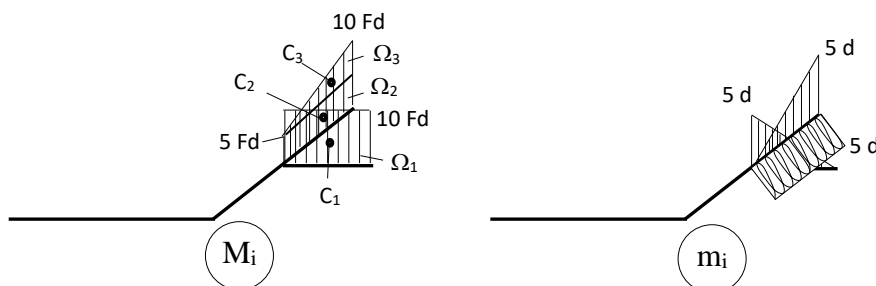
$$M_{i,(4)} = Fd \sqrt{425}; M_{t,(4)} = 10 Fd; \Rightarrow M_{i,ech,(5)} = Fd \sqrt{525};$$

\Rightarrow Secțiunea periculoasă: (4)

$$N_{(4)} = 2F \Rightarrow \sigma_N = \frac{8F}{\pi d^2}; M_{i,(4)} = Fd \sqrt{425} \Rightarrow \sigma_{M_{i,(4)}} = \frac{Fd \sqrt{425}}{\frac{\pi d^3}{32}} = 659,7 \frac{F}{\pi d^2};$$

$$M_{t,(4)} = 10 Fd \Rightarrow \tau_{M_t} = 160 \frac{F}{\pi d^2}; \Rightarrow \sigma_{t,(4)} = 667,7 \frac{F}{\pi d^2};$$

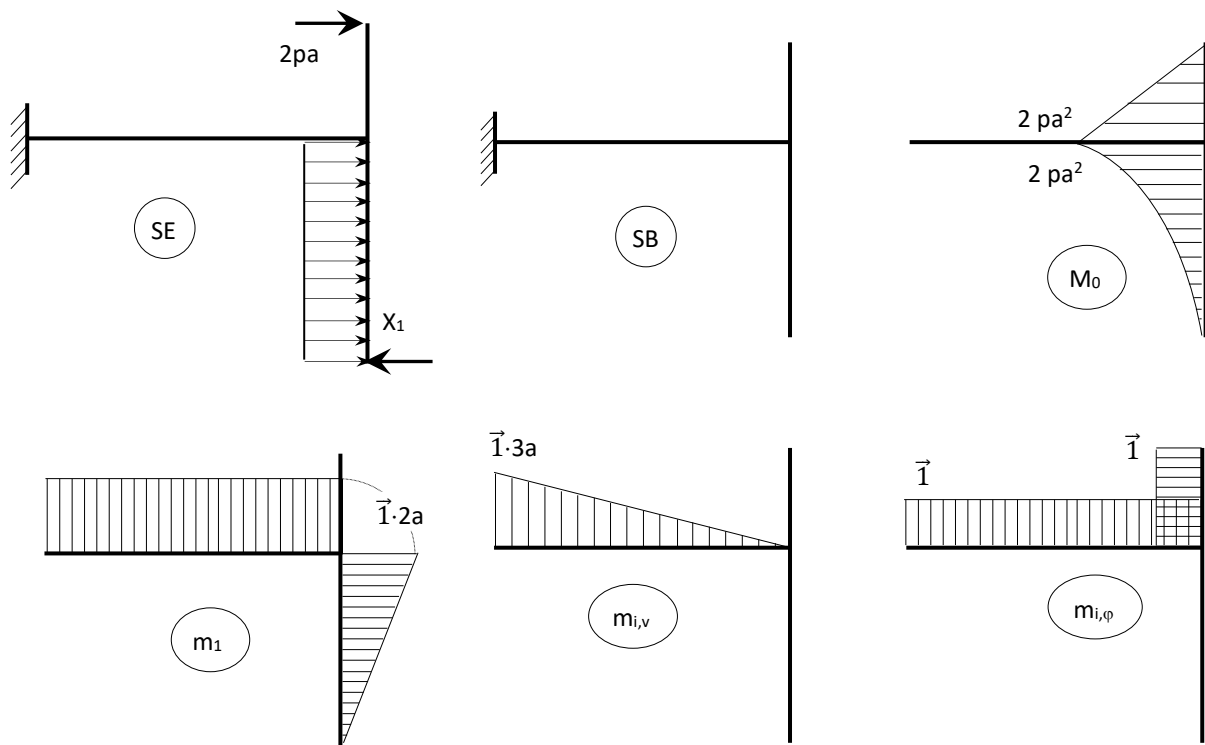
$$\sigma_{ech(3)} = 740,42 \frac{F}{\pi d^2} \cong 140 \text{ MPa} \Rightarrow d_{nec} = 58,02 \text{ mm} \Rightarrow d_{ef} \approx 58 \text{ mm}$$



$$\begin{aligned} \Omega_1 &= 50 F d^2; & m_{c_1} &= 2,5 d; \\ \Omega_2 &= 25 F d^2; & m_{c_2} &= 2,5 d; \\ \Omega_3 &= \frac{25}{2} F d^2; & m_{c_3} &= \frac{10}{3} d; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{v,(3)} &= 229,1(6) \frac{F d^3}{E I} \\ \delta_{v,(3)} &= 0,805 \text{ mm} \end{aligned}$$

IV)



$$\Delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = - \frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}};$$

$$EI \Delta_{10} = - \frac{1}{3} 2a \cdot 2pa^2 \frac{3}{4} 2a = -2 pa^4;$$

$$EI \delta_{11} = \frac{1}{2} 2a \cdot 2a \frac{4}{3} a + \frac{1}{2} 2a \cdot 3a \cdot 2a = \frac{26}{3} a^3$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{3}{13} pa$$

$$\delta_{1,h} \equiv 0;$$

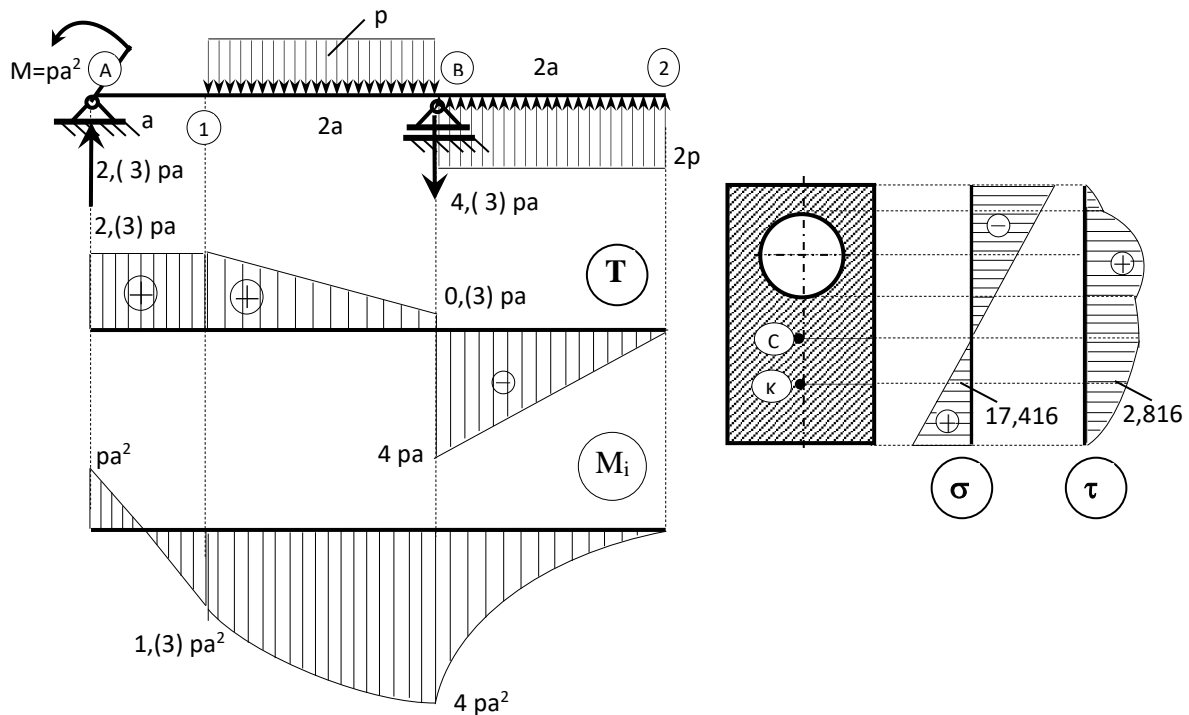
$$\delta_{1,v} = \frac{1}{2 EI} 2a \cdot 3a \cdot \frac{3}{13} pa \cdot \frac{3}{2} a = \frac{27}{26} \frac{pa^4}{EI}$$

$$\Rightarrow \delta_1 = \frac{27}{26} \frac{pa^4}{EI}$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{EI} pa^3 \cdot 1 + \frac{1}{2 EI} 6a^2 \cdot \frac{3}{13} pa \cdot 1 = \frac{22}{13} \frac{pa^3}{EI}$$

Locală 2013

I)



$$y_C = 7,1 t; I_z = 1714,9477 t^4; W_{z_{min}} = \frac{1714,9477 t^4}{8,9 t} = 192,691 t^3;$$

$$t_{nec} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 20 \cdot 10^6}{192,691 \cdot 150}} = 14,04 mm \cong 14,1 mm; y_K = 3,1 t; \sigma_{K,(1)} = 17,416 MPa$$

$$b_K = 6 t; S_{z,K} = 4t \cdot 6t \cdot 5,1 t = 122,4 t^3; \tau_{K,(1)} = \frac{2, (3) \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 122,4 t^3}{6t \cdot 1714,9477 t^4} = 2,816 MPa$$

II)

$$N_{(4)} = 9 pa; \Rightarrow \sigma_N = \frac{9 pa}{\frac{\pi D^2}{4} (1-0,8^2)} = 1,3263 p;$$

$$M_{i,(4)} = \sqrt{81 + 4 pa^2}; \Rightarrow \sigma_{M_i} = \frac{\sqrt{85} pa^2}{\frac{\pi D^3}{32} (1-0,8^4)}$$

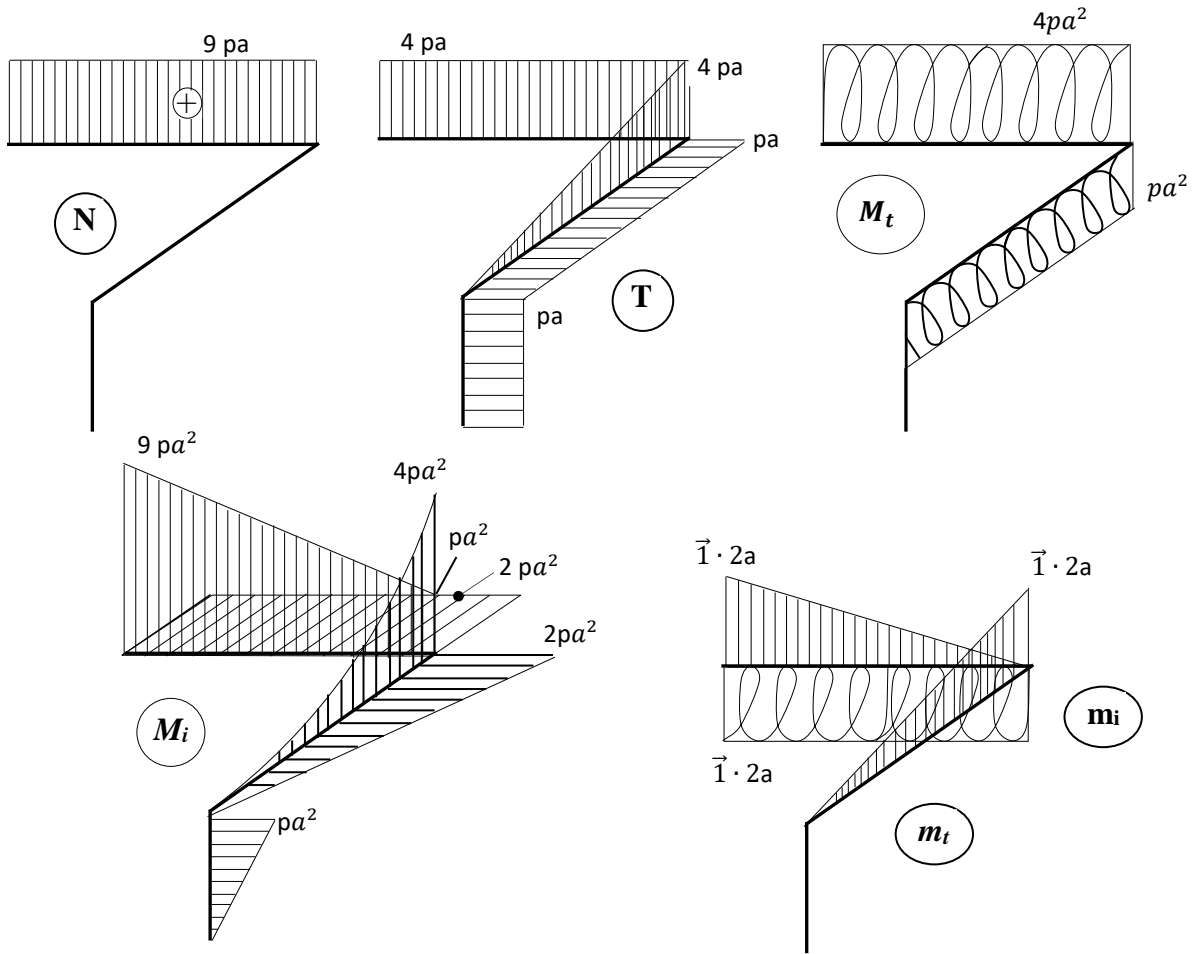
$$\Rightarrow \sigma_t = \sigma_N + \sigma_{M_i} = 34,464 p;$$

$$M_{t,(4)} = 4 pa^2 \Rightarrow \tau_{max} = \frac{4 pa^2}{\frac{\pi D^3}{16} (1-0,8^4)} = 7,1886 p;$$

$$\Rightarrow \sigma_{ech,III} = 37,3426 p \cong \sigma_a \Rightarrow p_{cap} = 4,017 N/mm; \Rightarrow p_{ef} = 4 N/mm$$

$$\delta_{v,(3)} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 4 pa^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2a + \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2 pa^2 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 8 pa^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot a \right) + \frac{1}{GI_p} 8 pa^3 \cdot 2a$$

$$\delta_{v,(3)} = \frac{54,6(6) pa^4}{EI} = 23,58 mm.$$



III)

$$N^0 \cdot a = 1,5 a F_0; \delta_0 = \frac{1,5 F \cdot 200}{E_{Al} \cdot 2A} = 0,1 \Leftrightarrow \frac{1,5 F \cdot 200}{7 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 400} \Rightarrow F_0 = 18666, (6)N$$

$$N_{Al}^0 = 1,5 \cdot 18666, (6) = 28000 N; N_{Ol}^0 = 0; F^* = 30000 - F_0 = 11333, (3)N;$$

$$N^* = 1,5 \cdot F^* = 17 kN; N^* = N_{Al}^* + N_{Ol}^*;$$

$$\Delta \ell_{Al} = \Delta \ell_{Ol} \Leftrightarrow \frac{N_{Ol}^*}{EA_{Ol}} = \frac{N_{Al}^*}{EA_{Al}} \Rightarrow N_{Ol}^* = \frac{EA}{\frac{3}{2}EA} N_{Al}^* = \frac{3}{2} N_{Al}^*$$

$$\frac{5}{2} N_{Al}^* = N^* \Rightarrow N_{Al}^* = \frac{2}{5} N^* = 6,8 kN; N_{Ol}^* = \frac{3}{5} N^* = 10,2 kN;$$

$$\Rightarrow N_{Al} = 34,8 kN; N_{Ol} = 10,2 kN; \sigma_{Al} = -43,5 MPa; \sigma_{Ol} = -25,5 MPa;$$

Notăm cu indicele 1 mărimile care se referă la cilindrul din oțel și cu 2 pe cele din cilindrul de Al.

$$N_1 + N_2 = 28 kN; \Delta \ell_1 \equiv \Delta \ell_2 \Leftrightarrow \alpha_1 \Delta \theta - \frac{N_1}{EA_1} \equiv \alpha_2 \Delta \theta - \frac{N_2}{EA_2} \Leftrightarrow EA(\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \Delta \theta = \frac{3}{2} N_2 - N_1;$$

$$N_1 = \frac{3}{2} N_2 - EA \cdot \Delta \alpha \cdot \Delta \theta \Rightarrow \frac{5}{2} N_2 = 28000 + EA \cdot \Delta \alpha \cdot \Delta \theta$$

$$\Rightarrow N_2 \equiv N_{Al} = 13216 N; N_1 = N_{Ol} = 14784 N; \Rightarrow \sigma_{\theta, Al} = -16,52 MPa; \sigma_{\theta, Ol} = -36,96 MPa;$$

$$\delta_K = 1,5 \cdot \Delta l_{Ol} = 1,5 \left(200 \cdot \frac{12}{10^6} \cdot 10 - \frac{36,96 \cdot 200}{2,1 \cdot 10^5} \right) = 0,0168 mm$$

IV)

$$\Delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0$$

$$\Delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{a^2}{2} + \frac{4a^2}{\sqrt{3}} \cdot 2a + \frac{4a^2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{7}{3}a = 10,3407 a^3;$$

$$\delta_{22} = \frac{4a^2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a = 3,08 a^3;$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \frac{4a^2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{7}{3}a = 5,4 a^3;$$

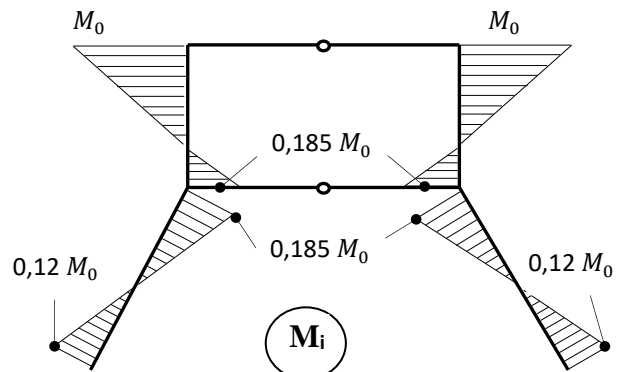
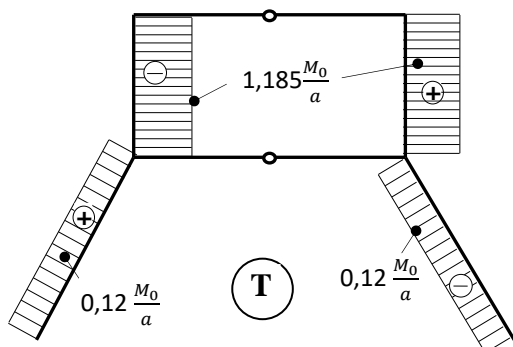
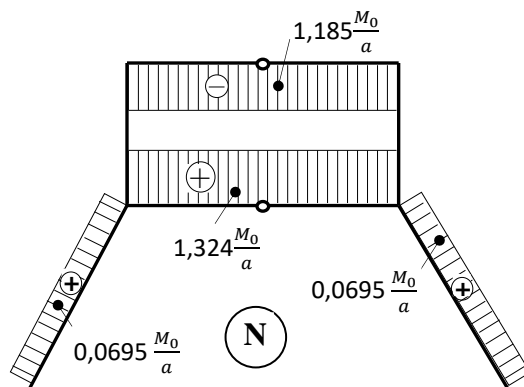
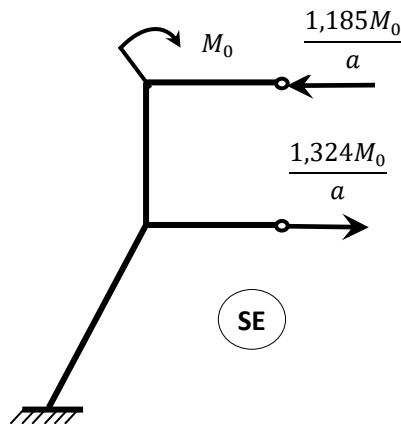
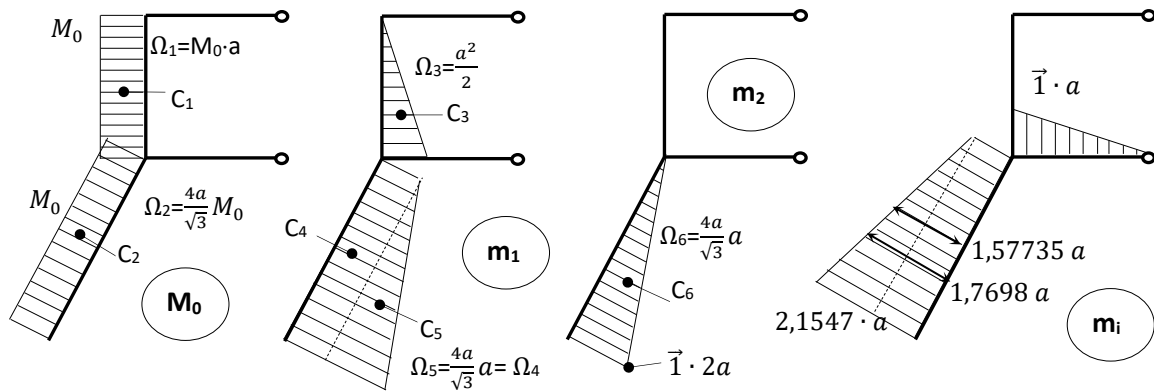
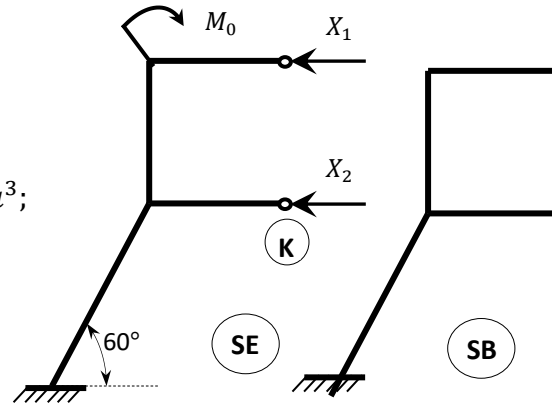
$$\Delta_{20} = -\frac{4aM_0}{\sqrt{3}} \cdot a = -2,31 M_0 a^2$$

$$\Delta_{10} = -\left(M_0 \cdot a \cdot \frac{a}{2} + \frac{4aM_0}{\sqrt{3}} \cdot 2a \right) = -5,12 M_0 a^2$$

$$X_2 = -1,324 \frac{M_0}{a}$$

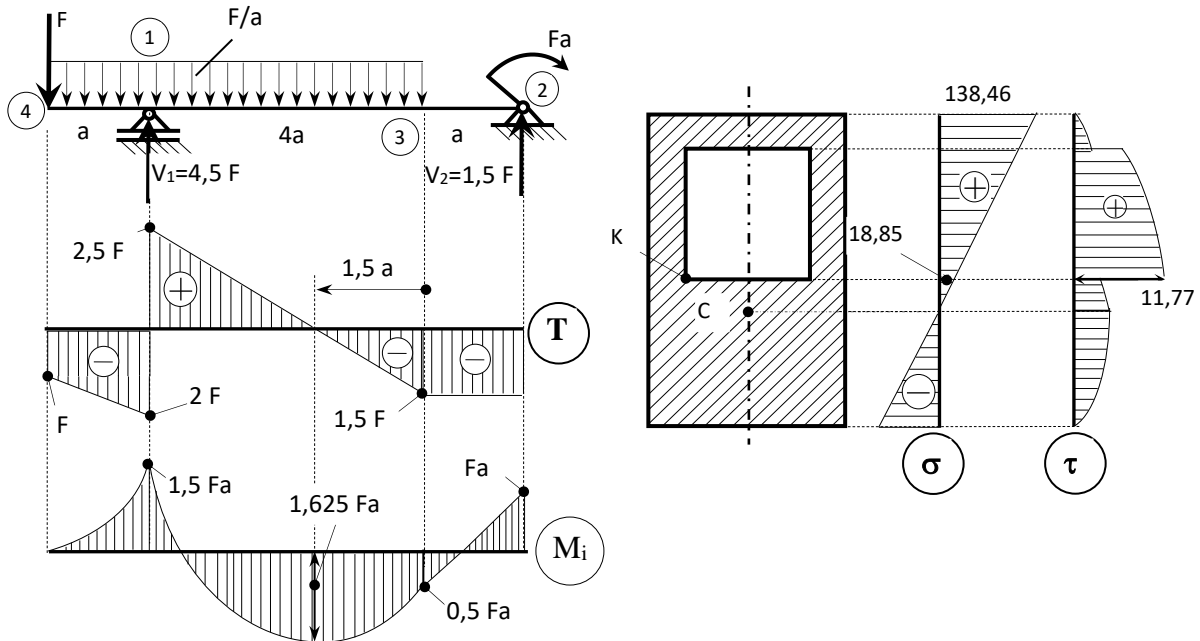
$$X_1 = 1,185 \frac{M_0}{a}$$

$$\delta_{v,(K)} = -0,1058 \frac{M_0 a^2}{EI}$$



Locală 2014

I)



$$y_C = 5,04 c; I_Z = 649,2565 c^4; W_{z,min} = \frac{649,2565 c^4}{6,96 c} = 93,284 c^3;$$

$$c_{nec} = \sqrt[3]{\frac{1,625 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{93,284 \cdot 150}} = 9,76 \text{ mm} \Rightarrow c_{ef} = 9,8 \text{ sau } 10;$$

$$y_K = 0,96 c; \sigma_{K,(1)} = 18,85 \text{ MPa}$$

$$b_K = 2 c; S_{z,K} = 36 c^2 \cdot 3,96 c - 20 c^2 \cdot 3,46 c = 73,36 c^3;$$

$$\tau_{K,(1)} = -\frac{1,5 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 73,4 c^3}{2 c \cdot 649,2565 c^4} = -7,063 \text{ MPa } (c = 9,8) \text{ sau } -6,78 \text{ MPa } (c = 10)$$

II)

a) $N_2^\delta = N_3^\delta;$

$$2 N_2^\delta \cos 30^\circ = N_1^\delta$$

$$\sqrt{3} N_2^\delta = N_1^\delta;$$

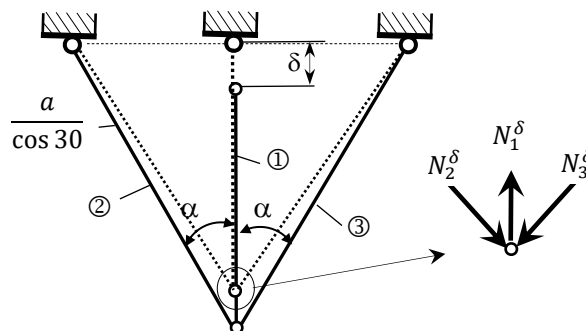
$$\delta \equiv \Delta \ell_1 + \frac{\Delta \ell_2}{\cos 30^\circ}$$

$$\delta \equiv \frac{N_1^\delta \cdot a}{\sum EA} + \frac{N_2^\delta \cdot a}{E_{Ol} A_{Ol} \cos^2 30^\circ};$$

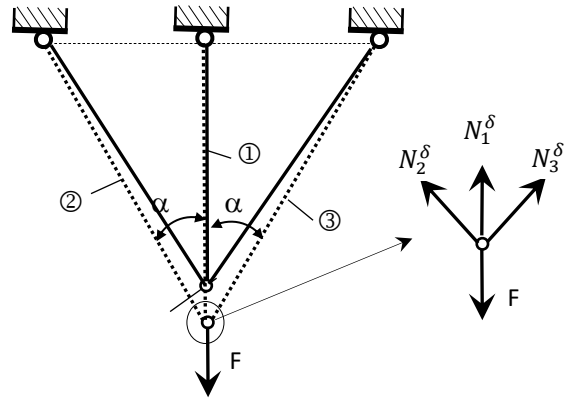
$$E_1 A_1 = E_{Ol} A_{Ol} + \frac{E_{Ol}}{3} 3 A_{Ol} = 2 E_{Ol} A_{Ol} = 2 EA \Rightarrow$$

$$\delta \equiv \frac{N_1^\delta \cdot a}{2 EA} + \frac{N_1^\delta \cdot a \cdot 4}{\sqrt{3} \cdot 3 \cdot EA} = \frac{N_1^\delta \cdot a}{2 EA} \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \right)$$

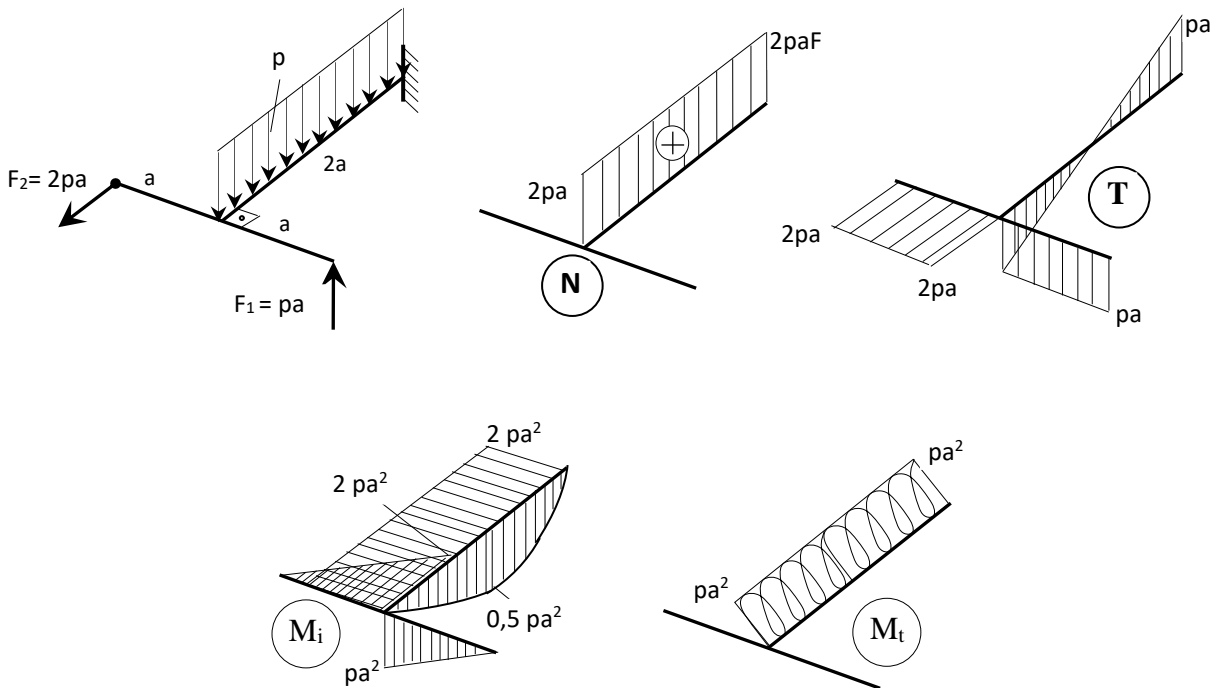
$$\Rightarrow N_1^\delta = \frac{\delta \cdot EA}{a \cdot 1,2698} = 32472 \text{ N}; N_1^\delta = 32472 \text{ N}; N_2^\delta = N_3^\delta = 18748 \text{ N}; N_{1,Ol}^\delta = N_{1,Al}^\delta = 16236 \text{ N}.$$



b) $2 N_2^F \cdot \cos 30^\circ + N_1^F = F;$
 $\Delta \ell_1^F \equiv \frac{\Delta \ell_2^F}{\cos 30^\circ} \Leftrightarrow \frac{N_1^F \cdot a}{2 EA} = \frac{N_2^F \cdot a}{\cos^2 30^\circ \cdot EA}$
 $\Rightarrow N_1^F = \frac{8}{3} N_2^F; \Rightarrow$
 $N_2^F = N_3^F = 0,227F = 27,24 \text{ kN};$
 $N_1^F = 0,606 F = 72,748 \text{ kN};$
 $N_1 = N_1^\delta + N_1^F = 105,22 \text{ kN};$
 $N_1^{Ol} = N_1^{Al} = 52,61 \text{ kN};$
 $N_2 = N_3 = N_2^F - N_2^\delta = 8,492 \text{ kN}$
 $\sigma_1^{Ol} = 26,79 \text{ MPa}; \sigma_1^{Al} = 8,93 \text{ MPa};$



III)



Secțiunea periculoasă este cea în care $T=0$, (la distanța a de încastrare).

Eforturile și tensiunile sunt:

$$N = 2 pa \Rightarrow \sigma_N = 2, (2) \frac{p}{\pi} = 0,707 p;$$

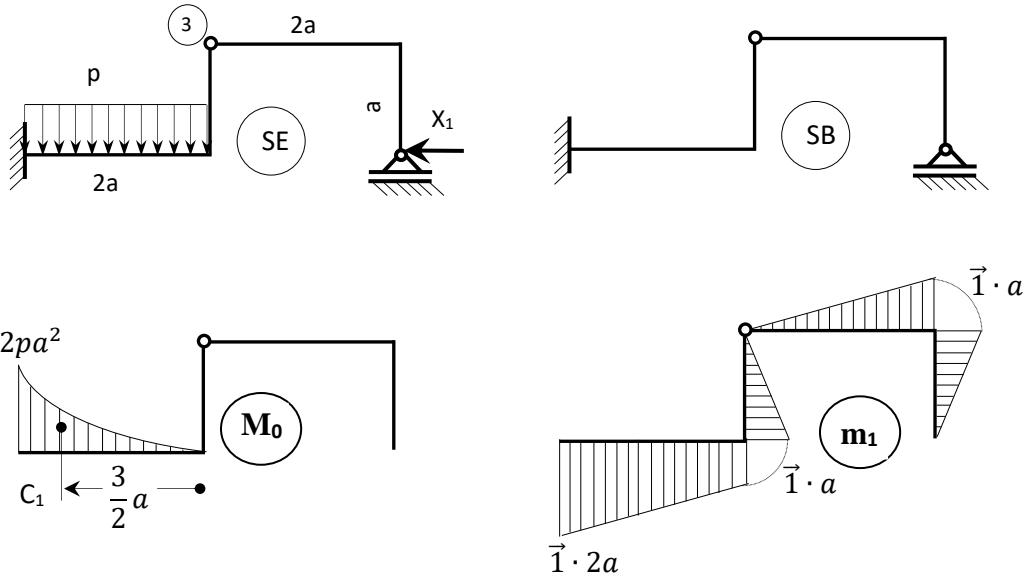
$$M_i = pa^2 \sqrt{4,25} \Rightarrow \sigma_{M_i} = 305,415 \frac{p}{\pi} = 97,217 p$$

$$\Rightarrow \sigma_t = 307,637 \frac{p}{\pi} = 97,924 p;$$

$$M_t = pa^2 \Rightarrow \tau_{max} = 74,079 \frac{p}{\pi} = 23,58 p$$

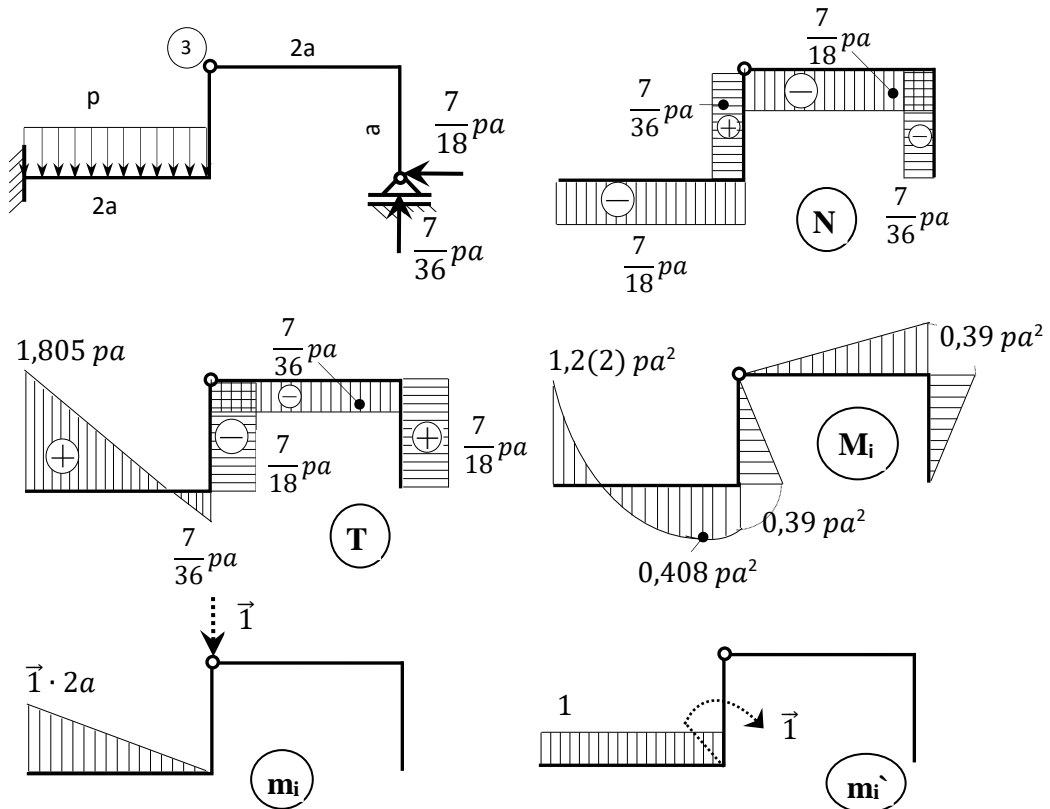
$$\Rightarrow \sigma_{ech,III} = 341,455 \frac{p}{\pi} = 108,688 p \equiv \sigma_a = 120 \Rightarrow p_{cap} = 1,104 \text{ N/mm}$$

IV)



$$\Delta_{10} + \delta_{11}X_1 = 0; \Rightarrow X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}}; \quad EI \Delta_{10} = -\frac{4pa^3}{3} \cdot \frac{7}{4}a = -\frac{7}{3}pa^4;$$

$$EI \delta_{11} = 2 \frac{a^2}{2} \frac{2}{3}a + a^2 \frac{2}{3}a + 2a^2 \frac{3}{2}a + a^2 \frac{5}{3}a = 6a^3 \Rightarrow X_1 = \frac{7}{18}pa$$



$$\varphi_4 = \frac{1}{EI} \left(\frac{4}{3}pa^3 \cdot 1 - 2a^2 \frac{7}{18}pa \cdot 1 - a^2 \frac{7}{18}pa \cdot 1 \right) = \frac{0,16(6)}{EI} pa^3$$

$$v_3 = \frac{1}{EI} \left(\frac{4}{3}pa^3 \cdot \frac{3}{2}a - 2a^2 \frac{7}{18}pa \cdot a - a^2 \frac{7}{18}pa \cdot \frac{4}{3}a \right) = \frac{0,704}{EI} pa^4$$

2015

(1)

$$\left(\sum M\right)_{(3)}^{Dr} = 0 \Rightarrow V_4 = \frac{5}{2}pa;$$

$$\sum V \equiv 0 \Rightarrow V_1 = \frac{3}{2}pa;$$

$$y_C = 8,5 t;$$

$$I_z = 2255,6(6) t^4;$$

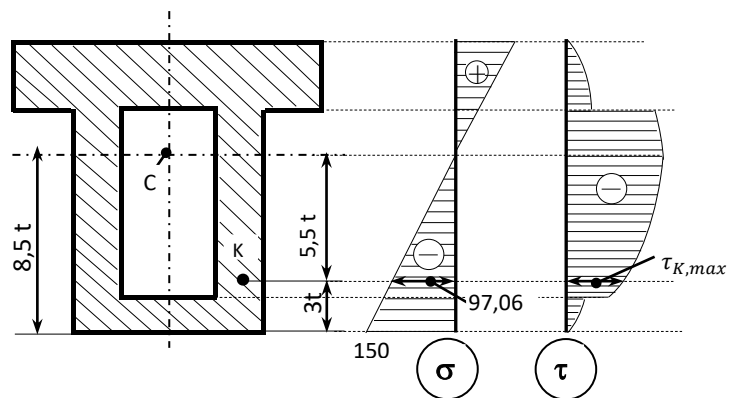
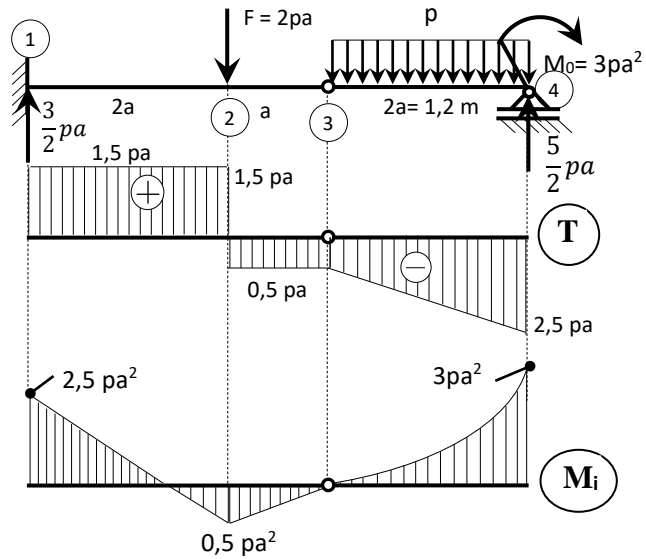
$$W_{z,min} = \frac{2255,6(6) t^4}{8,5 t} = 265,37 t^3;$$

$$t_{nec} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 6 \cdot 600^2}{265,37 \cdot 150}} = 5,46 \text{ mm}$$

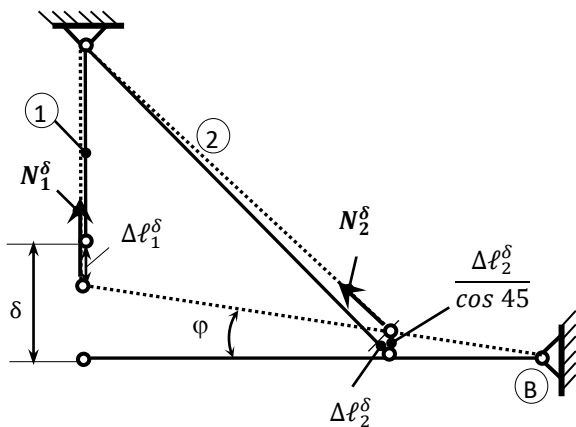
$$y_K = 5,5 t; \sigma_{K,(4)} = -97,06 \text{ MPa}$$

$$b_K = 4 t; S_{z,K} = 144 t^3;$$

$$\tau_{K,(4),max} = -4,82 \text{ MPa}$$

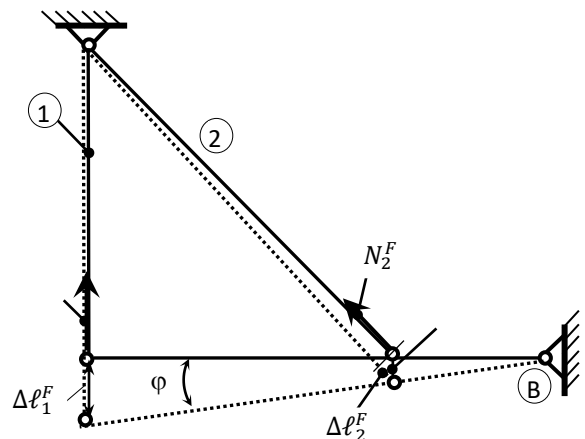


(2)



Bara (1):

$$\ell_1 = \ell; A_1 = 2 \cdot \pi \cdot 100; E_1 A_1 = 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot (2d)^2}{4} = 2 EA$$



Bara (2):

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \sqrt{2} \ell; A_{2,ol} = 3 \cdot \pi \cdot 100; A_{2,cu} = \pi \cdot 100; E_2 A_2 = 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{3\pi \cdot d^2}{4} + 1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \\ &= 3 EA + \frac{1}{2} EA = \frac{7}{2} EA \end{aligned}$$

Condiția de echilibru:

$$\left(\sum M\right)_B = 0 \Rightarrow N_1^\delta \cdot 3 - N_2^\delta \cdot \cos 45^\circ \cdot 1 = 0 \Rightarrow N_1^\delta = \frac{N_2^\delta}{3\sqrt{2}}$$

Condiția de deformare:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\delta - \Delta \ell_1^\delta}{3} = \frac{\Delta \ell_2^\delta / \cos 45^\circ}{1} \Leftrightarrow \delta - \Delta \ell_1^\delta = 3 \cdot \frac{\Delta \ell_2^\delta}{\sqrt{2}} \cdot 2 \Leftrightarrow \delta = 3\sqrt{2} \Delta \ell_2^\delta + \Delta \ell_1^\delta \Leftrightarrow$$

$$\delta = 3\sqrt{2} \frac{N_2^\delta \cdot \ell \sqrt{2}}{7EA} + \frac{N_1^\delta \cdot \ell}{2EA} = \frac{12}{7} \cdot \frac{N_2^\delta \cdot \ell}{EA} + \frac{N_2^\delta \cdot \ell}{6\sqrt{2}EA} \Leftrightarrow N_2^\delta \cdot \frac{\ell}{EA} \left(\frac{12}{7} + \frac{1}{6\sqrt{2}} \right) = \delta \Rightarrow$$

$$N_2^\delta = \frac{\delta \cdot EA}{1,832 \cdot \ell} = 6859 \text{ N}; N_1^\delta = 1617 \text{ N}; N_{2,ol}^\delta = N_2^\delta \cdot \frac{3}{7/2} = 5879 \text{ N}; N_{2,cu}^\delta = N_2^\delta \cdot \frac{0,5}{3,5} = 980 \text{ N}$$

$$\sigma_1^\delta = \frac{1617}{2 \cdot \pi \cdot 100} = 2,57 \text{ MPa}; \sigma_{2,ol}^\delta = -6,24 \text{ MPa}; \sigma_{2,cu}^\delta = -3,12 \text{ MPa}$$

b)

$$\left(\sum M\right)_B = 0 \Rightarrow N_1^F \cdot 3 - N_2^F \cdot \cos 45^\circ \cdot 1 = F \cdot 2; \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta \ell_1^F}{3} = \frac{\Delta \ell_2^F / \cos 45^\circ}{1} \Rightarrow$$

$$\frac{N_1^F \cdot \ell}{2EA} = 3\sqrt{2} \cdot \frac{N_2^F \cdot \ell \sqrt{2}}{7EA} \Leftrightarrow N_1^F = \frac{24}{7} N_2^F \Rightarrow \frac{24}{7} \cdot 3 \cdot N_2^F + \frac{\sqrt{2}}{2} N_2^F = 2F \Rightarrow N_2^F = \frac{2}{10,993} F = 0,182 F$$

$$N_2^F = 7277 \text{ N}; N_1^F = 0,6238 F = 24951 \text{ N} > 0; N_{2,ol}^F = N_2^F \cdot \frac{3}{3,5} = 6237,4 \text{ N} > 0; N_{2,cu}^F = N_2^F \cdot \frac{0,5}{3,5} = 1039,6 \text{ N} > 0; N_1 = N_1^\delta + N_1^F = 26568 \text{ N} \Rightarrow \sigma_1 = 42,28 \text{ MPa};$$

$$N_{2,ol} = 358,4 \text{ N} \Rightarrow \sigma_{2,ol} = 0,38 \text{ MPa}; N_{2,cu} = 59,6 \text{ N} \Rightarrow \sigma_{2,cu} = 0,19 \text{ MPa}$$

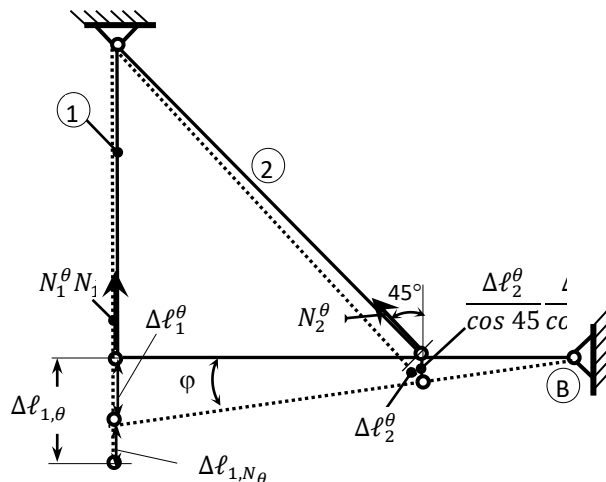
c)

$$\left(\sum M\right)_B = 0 \Rightarrow N_1^\theta \cdot 3 = N_2^\theta \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1;$$

$$\Rightarrow N_1^\theta = \frac{N_2^\theta}{3\sqrt{2}};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta \ell_{1,\theta} - \Delta \ell_{1,N_\theta}}{3} = \frac{\Delta \ell_2^\theta}{\cos 45^\circ \cdot 1}$$

$$\ell_1 \alpha \cdot \Delta \theta - \frac{N_1^\theta \cdot \ell}{2EA} = 3\sqrt{2} \cdot \frac{N_2^\theta \ell \sqrt{2}}{3,5EA} \Rightarrow$$



$$\alpha \cdot \Delta\theta = \frac{N_1^\theta}{2EA} + \frac{12}{7} \cdot \frac{N_2^\theta}{EA} = \frac{N_2^\theta}{EA} \left(\frac{1}{6\sqrt{2}} + \frac{12}{7} \right) \Rightarrow N_2^\theta = \frac{EA \cdot \alpha \cdot \Delta\theta}{1,832} = 12346 \text{ N}; N_1^\theta = 2910 \text{ N};$$

$$N_{2,Ol}^\theta = 10582,3 \text{ N}; N_{2,Cu}^\theta = 1763,7 \text{ N}; \Rightarrow N_1 = 23658 \text{ N}; N_{2,Ol} = 10941; N_{2,Cu} = 1823 \text{ N};$$

(3)

Secțiunea periculoasă:

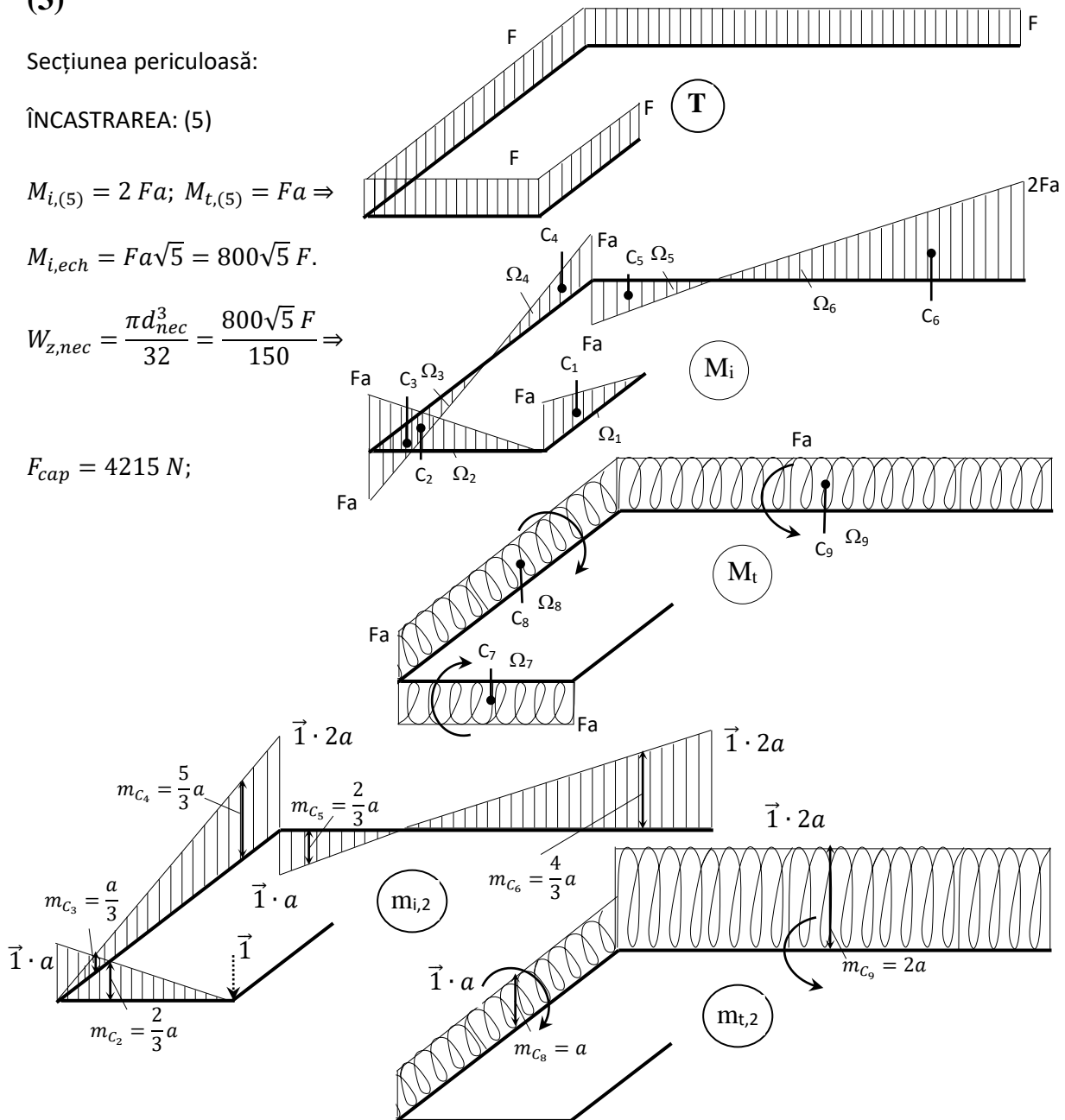
ÎNCASTRAREA: (5)

$$M_{i,(5)} = 2Fa; M_{t,(5)} = Fa \Rightarrow$$

$$M_{i,ech} = Fa\sqrt{5} = 800\sqrt{5} F.$$

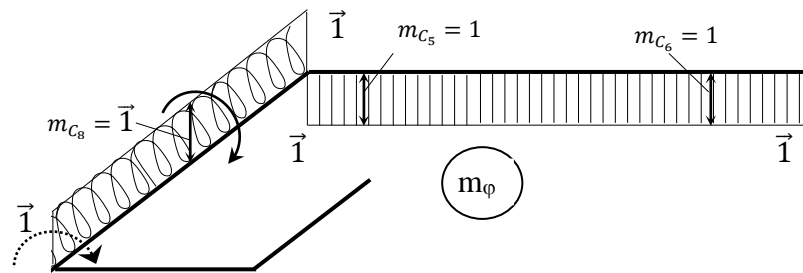
$$W_{z,nec} = \frac{\pi d_{nec}^3}{32} = \frac{800\sqrt{5} F}{150} \Rightarrow$$

$$F_{cap} = 4215 \text{ N};$$



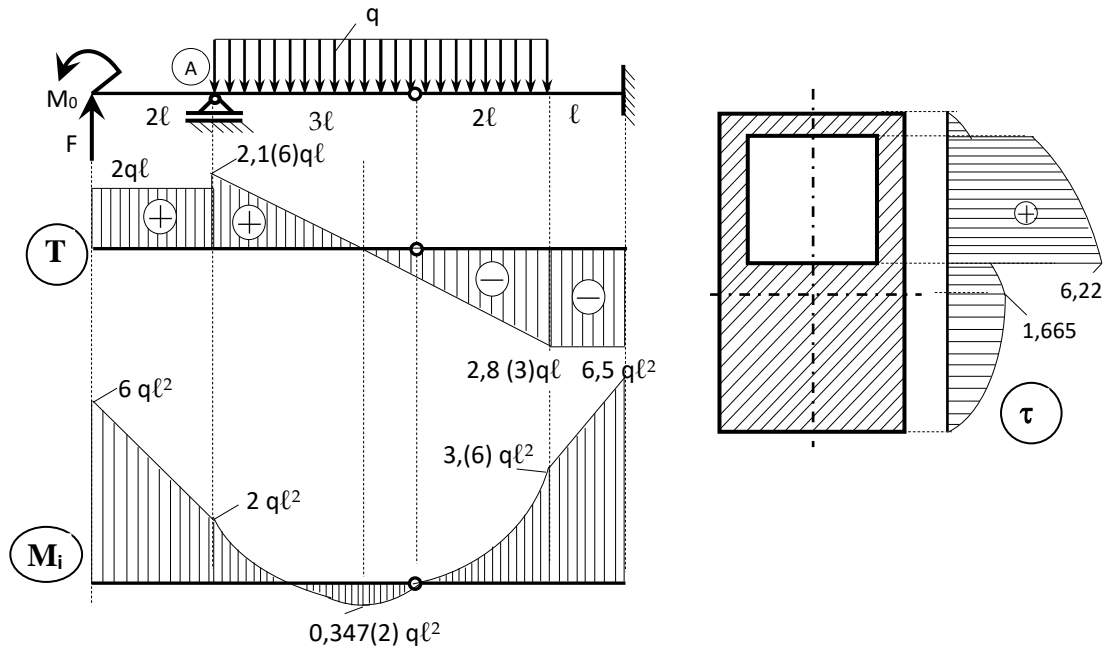
$$\delta_{v,(2)} = \frac{1}{EI} (\Omega_2 \cdot m_{c_2} - \Omega_3 \cdot m_{c_3} + \Omega_4 \cdot m_{c_4} + \Omega_5 \cdot m_{c_5} + \Omega_6 \cdot m_{c_6}) + \frac{1}{GI_p} (\Omega_8 \cdot m_{c_8} + \Omega_9 \cdot m_{c_9})$$

$$= \frac{Fa^3}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} \right) + \frac{Fa^3}{0,8EI} (2 + 3 \cdot 2) = 14 \frac{Fa^3}{EI}.$$



$$\varphi_{(3)} = \frac{1}{EI} (\Omega_5 \cdot m_{c_5} - \Omega_6 \cdot m_{c_6}) + \frac{1}{GI_p} \Omega_8 \cdot m_{c_8} = \frac{Fa^2}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 - 2 \cdot 1 \right) + \frac{Fa^2}{0,8 EI} 2 \cdot 1 = \frac{Fa^2}{EI}$$

2016



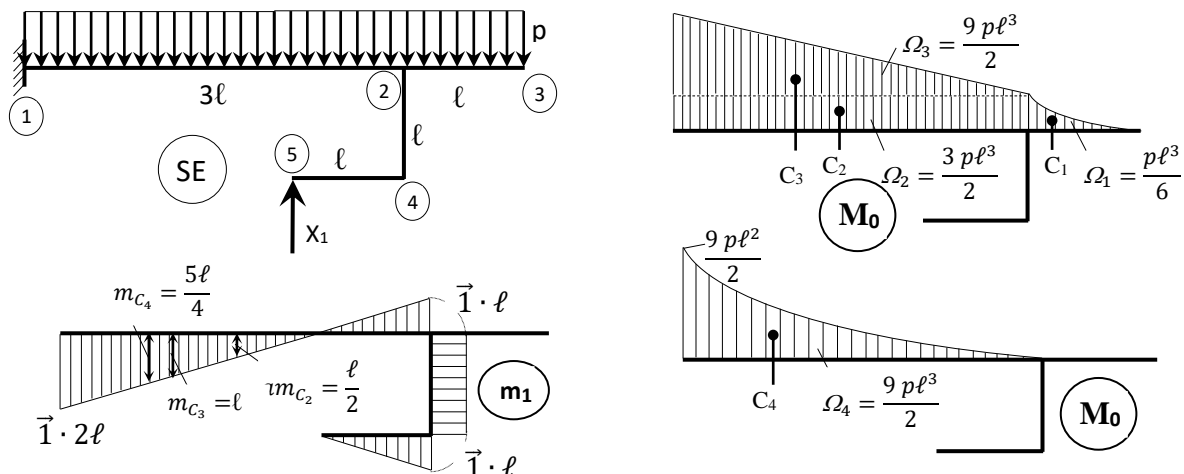
$$\left(\sum M\right)_{(2)}^{st} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{1}{6}ql = 0,1(6)ql; \quad \sum V \equiv 0 \Rightarrow V_4 = \frac{17}{6}ql = 2,8(3)ql;$$

$$y_c = 2,79 a; \quad I_z = 77,741 a^4; \quad W_{z,min} = \frac{77,741 a^4}{4,21 a} = 18,466 a^3; \quad a_{nec} = \sqrt[3]{\frac{6,5 \cdot 4 \cdot 200^2}{18,466 \cdot 150}} = 7,214 \text{ mm} \cong 7,22 \text{ mm}$$

$$S_{z,max} = \frac{2,79^2}{2} \cdot 4 a^3 = 15,5682 a^3; \quad S_{z,2-2} = 4 \cdot 3,5 \cdot 2,46 a^3 - 9 \cdot 2,21 a^3 = 14,55 a^3$$

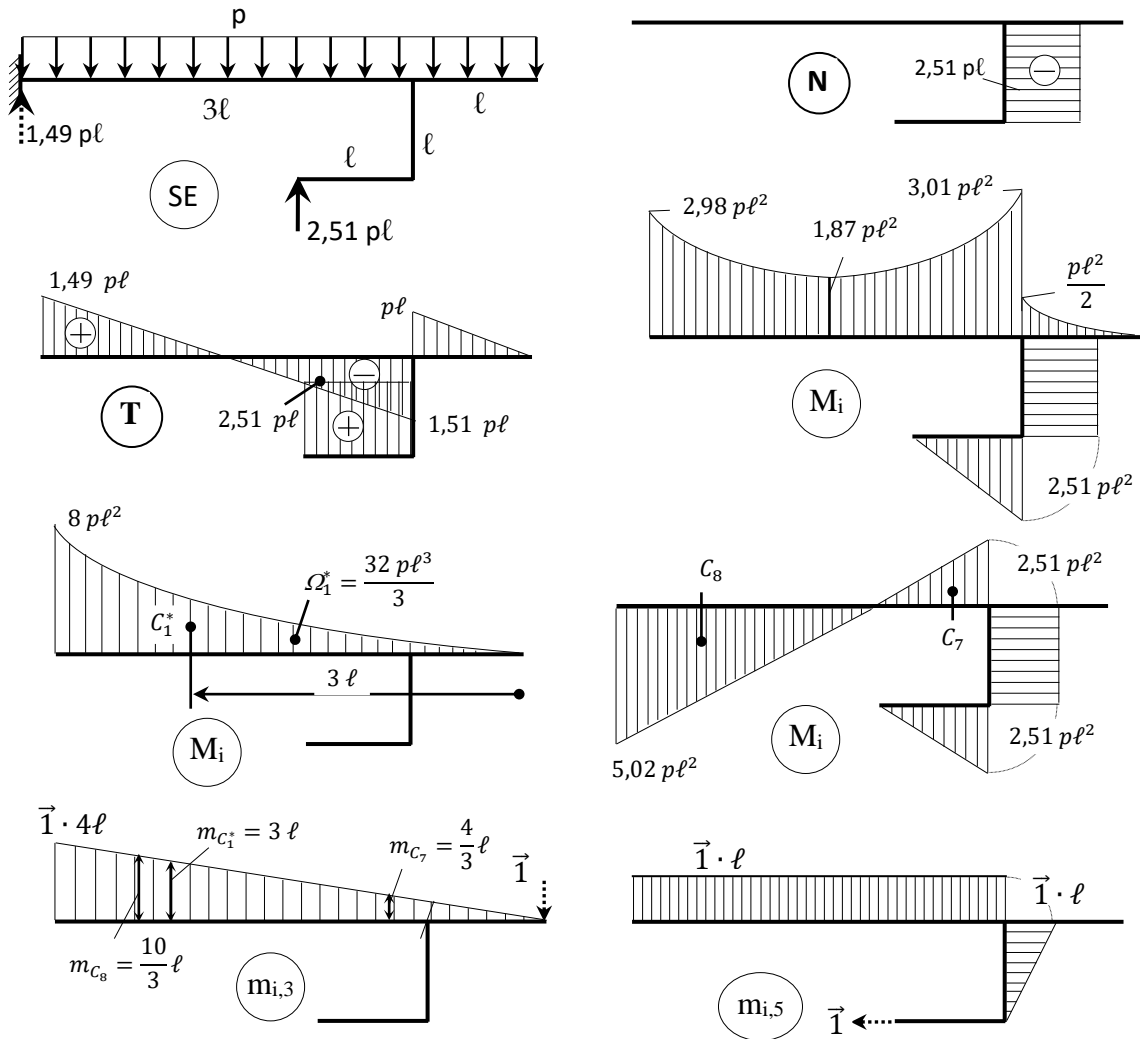
$$\tau_{(A),max} = \frac{2,1(6) \cdot 4 \cdot 200 \cdot 14,55 a^3}{a \cdot 77,741 a^4} = 6,22 \text{ MPa}$$

Problema 2)



$$\Delta_{10} + \delta_{11}X_1 = 0; \Rightarrow X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}}; EI \Delta_{10} = -\left(\frac{3 p \ell^3}{2} \frac{1}{2} \ell + \frac{9 p \ell^3}{2} \ell + \frac{9 p \ell^3}{2} \frac{5}{4} \ell\right) = -10,875 p \ell^4;$$

$$EI \delta_{11} = 2 \frac{\ell^2}{2} \frac{2}{3} \ell + \ell^2 \cdot \ell + 2 \ell^2 \frac{4}{3} \ell = 4,3(3) \ell^3 \Rightarrow X_1 = 2,51 p \ell$$

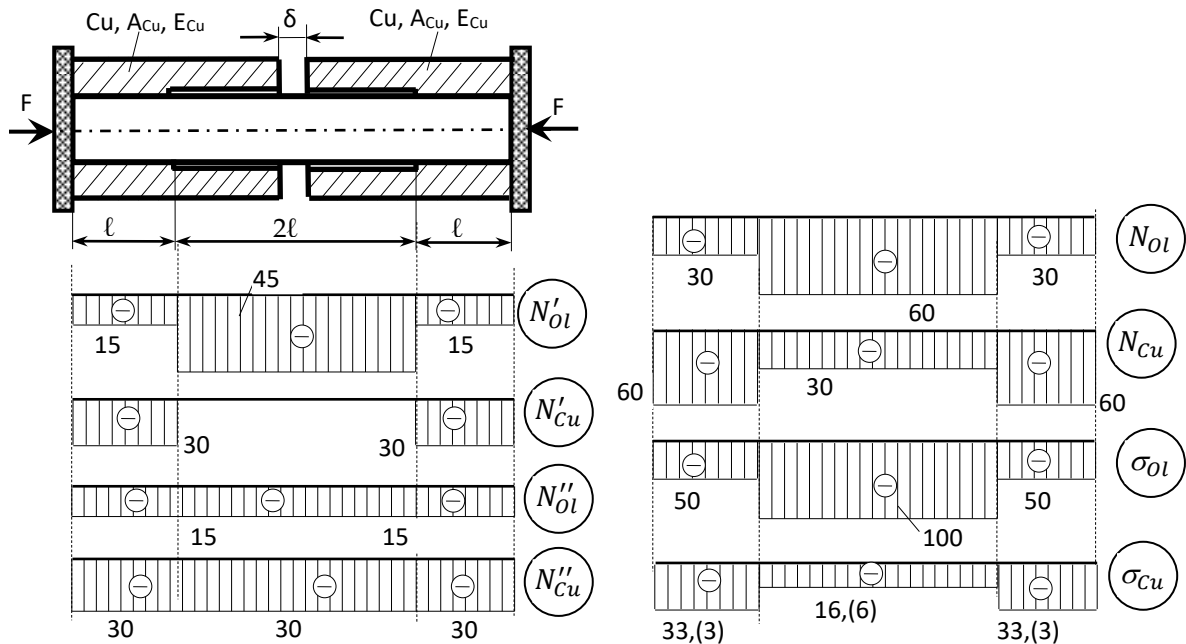


$$EI \cdot \delta_{3,v} = \frac{32 p \ell^3}{3} \cdot 3 \ell + \frac{1}{2} \ell^2 \cdot 2,51 p \ell \cdot \frac{4}{3} \ell - 2 \ell^2 \cdot 2,51 p \ell \cdot \frac{10}{3} \ell = 16,94 p \ell^4 \Rightarrow \delta_{3,v} = 16,94 \frac{p \ell^4}{EI}$$

$$EI \cdot \delta_{5,h} = \ell^2 \cdot 2,51 p \ell \cdot \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} \ell^2 \cdot 2,51 p \ell \cdot \ell - 2 \ell^2 \cdot 2,51 p \ell \cdot \ell + 2 \cdot \frac{9 p \ell^3}{2} \cdot \ell + \frac{3 p \ell^3}{2} \cdot \ell \Rightarrow$$

$$\delta_{5,h} = 7,99 \frac{p \ell^4}{EI}$$

III) Se dau: $\ell = 0,5 \text{ m}$; $\delta = 0,5 \text{ mm}$; $A_{Cu} = 3 \cdot A_{Ol}$; $E_{Ol} = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$; $\alpha_{Ol} = 12 \cdot 10^{-6} [1/^\circ\text{C}]$; $A_{Ol} = 600 \text{ mm}^2$; $E_{Cu} = \frac{2}{3} E_{Ol}$; $\alpha_{Cu} = \frac{3}{2} \alpha_{Ol}$. Se cer:



$$a) F_{nec} = ?; E_{Ol}A_{Ol} = EA; E_{Cu}A_{Cu} = \frac{2E}{3} \cdot 3A = 2EA; \sum EA = 3EA;$$

$$\frac{F \cdot 2\ell}{\sum EA} + \frac{F \cdot 2\ell}{EA} = \delta \Leftrightarrow \frac{F \cdot \ell}{EA} \left(\frac{2}{3} + 2 \right) = \delta \Rightarrow F_{nec} = \frac{\delta \cdot 3EA}{8\ell} = \frac{0,5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 600}{8 \cdot 500} = 45 \text{ kN};$$

După anularea jocului forțele axiale din cele două materiale sunt:

$$N'_{Ol} + N'_{Cu} = 45; \Delta \ell'_{Cu} = \Delta \ell'_{Ol} \Rightarrow N'_{Ol} = 45 \frac{EA}{\sum EA} = \frac{45}{3} = 15 \text{ kN}$$

b) $F'' = 45 \text{ kN}$ este preluat de ambele materiale, de la început, în proporția dată de rigiditatea fiecărui material. Prin însumare rezultă eforturile finale prezentate în diagramele (N_{Ol}) și (N_{Cu}).

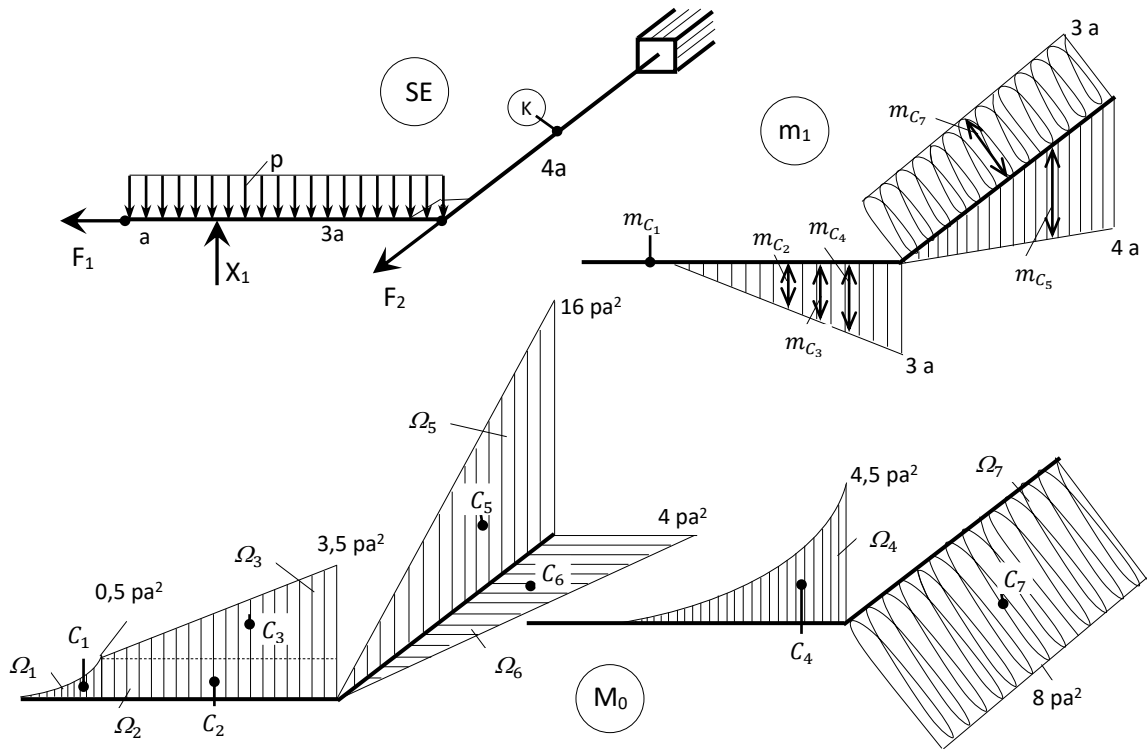
Tensiunile din fiecare material, pe fiecare tronson, sunt arătate în diagramele (σ_{Ol}) și (σ_{Cu}), în MPa.

c) Tensiunea maximă de compresiune în oțel este: $\sigma_{Ol} = -100 \text{ MPa}$.

Pentru ca tensiunea din oțel să se anuleze, este necesar să micșorăm temperatura barei din oțel.

$$\sigma_{\theta, Ol} = E \cdot \alpha \cdot \Delta \theta = -100 \Rightarrow \Delta \theta = \frac{-100 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^5 \cdot 12} = -41,6(6)^\circ.$$

IV.

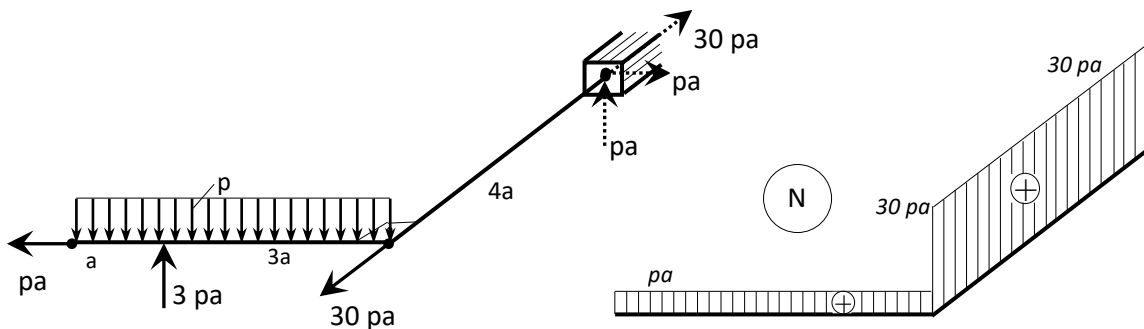


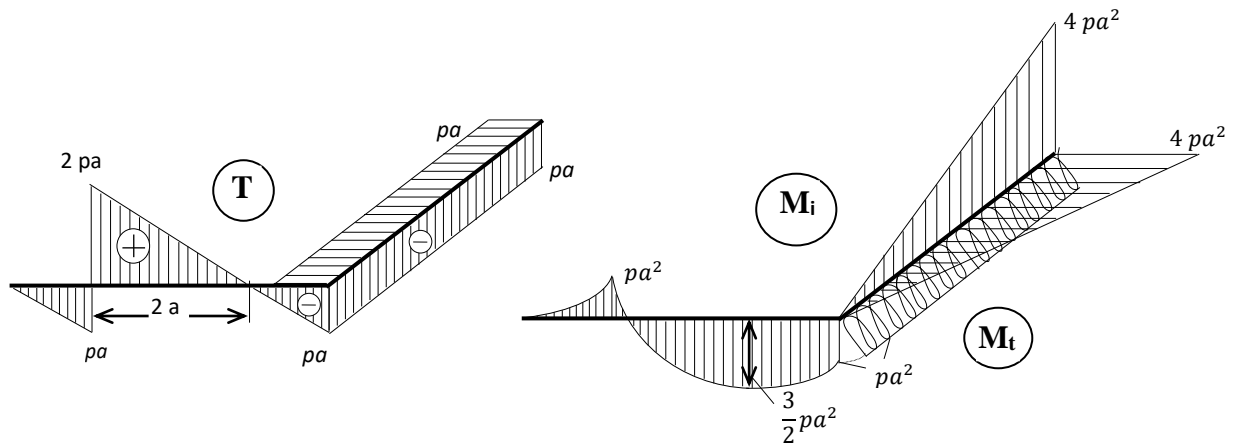
$$\Omega_1 = \frac{pa^3}{6}; \Omega_2 = \frac{3}{2}pa^3; \Omega_3 = \frac{9}{2}pa^3; \Omega_4 = \frac{9}{2}pa^3; \Omega_5 = 32pa^3; \Omega_6 = 8pa^3; \Omega_7 = 32pa^3;$$

$$\Omega_8 = \frac{9}{2}a^2; \Omega_9 = 8a^2; \Omega_{10} = 12a^2; m_{C_1} = 0; m_{C_2} = \frac{3}{2}a; m_{C_3} = 2a; m_{C_4} = \frac{9}{4}a; m_{C_5} = \frac{8}{3}a; m_{C_6} = 0; m_{C_7} = 3a; m_{C_8} = 2a; m_{C_9} = \frac{8}{3}a; m_{C_{10}} = 3a;$$

$$\Delta_{10} = -\frac{pa^4}{EI} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{2} \cdot 2 + \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{4} + 32 \cdot \frac{8}{3} + 1,25 \cdot 32 \cdot 3 \right) = -226,708(3) \frac{pa^4}{EI};$$

$$\delta_{11} = \frac{a^3}{EI} \left(\frac{9}{2} \cdot 2 + 8 \cdot \frac{8}{3} + 1,25 \cdot 12 \cdot 3 \right) = 75, (3) \frac{a^3}{EI}; \Rightarrow X_1 = 3,01 pa \cong 3 pa;$$





Secțiunea periculoasă: ÎNCASTRAREA, în care: $N = +30 pa$; $M_{i,rez} = 4\sqrt{2} pa^2$; $M_t = pa^2$.

Tensiunile: $\sigma_N = 1,4921 p$; $\sigma_{M_{i,rez}} = 7,0337 p$; $\Rightarrow \sigma_t = 8,5258 p$; $\tau_{max} = 0,6217 p$; \Rightarrow

$$\sigma_{ech,(3)} = 8,616 p \equiv \sigma_a \Rightarrow p_{cap} = 18,57 \frac{N}{mm};$$

$$\Delta\varphi_K = \frac{18,57 \cdot 250^2 \cdot 2 \cdot 250 \cdot 32}{8 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 80^4} = 0,0018 \text{ rad} = 0,103^\circ.$$

Formule pentru calculul la ÎNTINDERE

Efortul: Forța axială "N" \Rightarrow - Tensiuni normale σ ;
- Deformații specifice liniare ε .

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_a \equiv \text{CONDIȚIA DE REZISTENȚĂ la întindere, } \sigma > 0 \Leftrightarrow N > 0$$

Între tensiuni și deformații este valabilă legea lui HOOKE:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E$$

, unde E = modulul de elasticitate al materialului, (constantă cunoscută).

Deformațiile se calculează cu:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}, \text{ unde: } \Delta \ell = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot A},$$

relație care se aplică pe intervalul de lungime L pe care nu se modifică nici N, și nici rigiditatea la sollicitarea axială EA;

Deformația totală se obține prin însumarea deformațiilor calculate pe fiecare interval unde se păstrează constante eforturile și rigiditățile:

$$\Delta \ell = \sum (\Delta \ell_k)$$

Variația de temperatură determină o variație a lungimii:

$$\Delta \ell_\theta = \ell \cdot \alpha \cdot \Delta \theta,$$

unde: α = coeficient de dilatare termică liniară

$\Delta \theta$ = variația de temperatură

Dacă dilatarea este permisă, (în sistemele static determinate) \Rightarrow NU APAR EFORTURI și implicit nici tensiuni suplimentare;

Dacă dilatarea este împiedicată, (nu este posibilă \Leftrightarrow Sistem static nedeterminat) \Rightarrow APAR eforturi suplimentare:

$$N_\theta = E \cdot A \cdot \alpha \cdot \Delta \theta$$

și respectiv tensiuni suplimentare:

$$\sigma_\theta = E \cdot \alpha \cdot \Delta \theta$$

Obs. 1. Tensiunea suplimentară datorată variației de temperatură nu depinde de aria secțiunii transversale;

2. Dacă temperatura crește, $\Delta \theta > 0 \Rightarrow$ apar $N_\theta < 0$ și $\sigma_\theta < 0$, (bara sollicitată la compresiune);

3. Dacă temperatura scade, $\Delta \theta < 0 \Rightarrow$ apar $N_\theta > 0$ și $\sigma_\theta > 0$, (bara sollicitată la întindere).

Dacă secțiunea unei bare este neomogenă, de exemplu compusă din două materiale cu rigiditățile: $E_1 A_1$ și respectiv $E_2 A_2$, atunci fiecare material va prelua o fracțiune din efortul total proporțională cu rigiditatea materialului respectiv:

$$N = N_1 + N_2$$

$$\text{și } N_1 = N \frac{E_1 A_1}{\sum E_i A_i} \quad \text{respectiv} \quad N_2 = N \frac{E_2 A_2}{\sum E_i A_i}$$

Tensiunile din cele două materiale vor fi:

$$\sigma_1 = N \frac{E_1}{\sum E_i A_i} \quad \text{și} \quad \sigma_2 = N \frac{E_2}{\sum E_i A_i}$$

Formule pentru calculul la ÎNCOVOIERE

Efortul: Moment de încovoiere “ M_i ” \Rightarrow - Tensiuni normale σ , cu variație liniară;
- Deformații specifice liniare ε , cu aceeași variație.

$$\sigma = \frac{M_{i,\max}}{W_{z,\min}} \leq \sigma_a \equiv \text{CONDIȚIA DE REZISTENȚĂ la încovoiere,}$$

Tensiunea normală din punctul K al secțiunii (*) se calculează cu:

$$\sigma_K^{(*)} = \frac{M_i^{(*)}}{I_z} \cdot y_K$$

, semnul tensiunii depinde de poziția punctului K în raport cu fibrele întinse de către momentul M_i din secțiunea (*).

Tensiunea tangențială din punctul K al secțiunii (*) se calculează cu:

$$\tau_K^{(*)} = \frac{T^{(*)} \cdot S_{z,K}}{b_K \cdot I_z}$$

, unde:

- $T^{(*)}$ este forța tăietoare din secțiunea (*);
- $S_{z,K}$ este momentul static la nivelul punctului K;
- b_K este grosimea materialului în dreptul punctului K;
- I_z este momentul de inerție în raport cu axa de încovoiere.

Tensiunile principale din punctul K se calculează cu:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_K}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_K^2 + 4\tau_K^2}$$

Direcțiile principale, în raport cu care se obțin tensiunile principale, se calculează cu:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2\tau_K}{\sigma_K}\right); \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$$

Dacă materialul are comportare diferită la întindere și compresiune, (\exists atât $\sigma_{a,t}$ cât și $\sigma_{a,c}$) atunci se aplică ambele condiții de rezistență:

$$\sigma_{\max t} = \frac{M_i}{W_z} \leq \sigma_{a,t} \quad \text{și} \quad \sigma_{\max c} = \frac{M_i}{W_z} \leq \sigma_{a,c}$$

Obs. 1. Dacă tensiunea maximă efectivă ($\sigma_{\text{ef,MAX}} = \frac{M_{i,\text{MAX}}}{W_{z,\min}}$) corespunde fibrelor întinse, atunci nu se mai fac calcule și pentru compresiune;

2. Așezarea economică a unei secțiuni este cea pentru care tensiunea maximă efectivă – $\sigma_{\text{ef,MAX}}$ – corespunde fibrelor comprimate; pentru acest caz se aplică ambele condiții de rezistență:

$$\sigma_{\text{ef,MAX}} = \frac{M_{i,\text{MAX}}}{W_{z,\min}} \leq \sigma_{ac} \quad \text{și} \quad \sigma_{\max t} = \max\left(\frac{M_{i,\text{MAX}}}{W_{z,\max}} \text{ și } \frac{M_{i,\max}^*}{W_{z,\min}}\right) \leq \sigma_{a,t},$$

Unde $M_{i,\max}^*$ reprezintă un moment care întinde fibrele cu modul de rezistență minim și are o valoare apropiată de cea maximă absolută $M_{i,\text{MAX}}$, dacă există pe diagrama (M_i).

Formule pentru calculul la RĂSUCIRE

Efortul: Moment de torsiune “ M_t ” \Rightarrow Tensiuni tangențiale τ , cu variație liniară pe rază
Deformații specifice unghiulare γ , cu aceeași variație

Tensiunea tangențială din punctul K al secțiunii (*) se calculează cu:

$$\tau_K^* = \frac{M_t^*}{I_p} \cdot r_K$$

, unde r_K reprezintă distanța de la centrul secțiunii la punctul K, (raza punctului K).
Deformațiile unghiulare:

$$\begin{aligned} - \text{ totală: } \Delta\varphi_{1-2} &= \frac{M_{t,1-2} \cdot \ell_{1-2}}{G \cdot I_{p,1-2}} \\ - \text{ rotirea specifică: } \theta_{1-2} &= \frac{\Delta\varphi_{1-2}}{\ell_{1-2}} = \frac{M_{t,1-2}}{G \cdot I_{p,1-2}} \end{aligned}$$

Calculul de rezistență:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{t,\max}}{W_p} \leq \tau_a \equiv \text{CONDIȚIA DE REZISTENȚĂ la răsucire,}$$

$$\theta_{\max} = \frac{M_{t,\max}}{G \cdot I_p} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 1000 \leq \theta_a \equiv \text{CONDIȚIA DE RIGIDITATE la răsucire.}$$

Unitatea de măsură pentru θ_{\max} este [$^{\circ}/m$].

Caracteristicile geometrice : momentul de inerție polar I_p , și respectiv modulul de rezistență polar W_p :

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}, \quad W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}, \quad - \text{ pentru secțiuni circulare pline cu diametrul } d;$$

$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right], \quad W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right],$$

- pentru secțiuni inelare cu diametrul exterior D și interior d .

Între putere, moment de torsiune, viteză unghiulară și turație există relațiile:

$$M_t = \frac{P}{\omega}; \quad M_t = 9,55 \frac{P}{n}; \quad M_t = 7,022 \frac{P}{n}$$

Cu aceste relații M_t se obține în [kN·m], dacă puterea P se introduce în [kW], pentru primele două relații și respectiv în [CP], pentru ultima relație (7,022).

Obs. 1. În condițiile de rezistență și de rigiditate M_t se introduce în [N·mm], rigiditatea $G \cdot I_p$ în [N·mm²], (G în MPa și I_p în mm⁴).

2. Un arbore cu secțiune neomogenă ($\sum G I_p = G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2}$) va prelua un moment de torsiune astfel încât fiecare material să preia o fracțiune proporțională cu rigiditatea sa:

$$M_t = M_{t1} + M_{t2}, \text{ unde: } M_{t1} = M_t \cdot \frac{G_1 I_{p1}}{\sum_1^2 G_1 I_{p1}} \quad \text{și} \quad M_{t2} = M_t \cdot \frac{G_2 I_{p2}}{\sum_1^2 G_1 I_{p1}}$$

Formule pentru SOLICITĂRI COMPUSE II

Dacă în centrul secțiunii celei mai solicitate:

∅: $N \neq 0$, $M_i \neq 0$ și $M_t \neq 0$ atunci pentru $M_t \neq 0 \Rightarrow \tau_{\max}$ care se calculează cu: $\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p}$

Starea de tensiune este evaluată cu:

În relația de mai sus: $\sigma_{ech(3)} = \sqrt{\sigma_t^2 + 4 \cdot \tau_{\max}^2} \leq \sigma_a$

$$\sigma_t = \sigma_N + \sigma_{M_{i,rez}}$$

Unde $M_{i,rez}$ este valoarea maximă a momentului de încovoiere, calculată cu:

$$M_{i,rez} = \sqrt{M_{i,V}^2 + M_{i,H}^2}$$

Iar tensiunea:

$$\sigma_{M_{i,rez}} = \frac{M_{i,rez}}{W_z}$$

Dacă în centrul secțiunii periculoase există doar $M_{i,rez} \neq 0$ și $M_t \neq 0$, atunci se va calcula un moment $M_{i,ech(3)}$, cu:

$$M_{i,ech(3)} = \sqrt{M_{i,rez}^2 + M_t^2}$$

După calculul lui $M_{i,ech(3)}$, se va calcula:

$$\sigma_{ech(3)} = \frac{M_{i,ech(3)}}{W_z}$$

Modulele de rezistență, pentru o secțiune circulară, se calculează cu:

$$W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \quad W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$$

Pentru o secțiune inelară:

$$W_z = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] \quad W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]$$

Pentru arc:

-tensiunea:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} + \frac{4}{3} \frac{T}{A} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \left(1 + \frac{d}{3R} \right);$$

- săgeata:

$$f = \frac{64 \cdot F \cdot R^3 \cdot n}{G \cdot d^4}$$

Obs.

1) Pentru problemele de dimensionare, de regulă, se neglijează tensiunea normală (σ_N) dată de forța axială. După dimensionare se recalculază tensiunea $\sigma_{ech(3)}$ cu relația (1) luând în considerare și σ_N .

2) Dacă lungimile barei sunt exprimate în funcție de diametrul secțiunii, (20d de exemplu), atunci dimensionarea este posibilă luând în considerare de la început și influența forței axiale N.

Sisteme static nedeterminate solicitate la încovoiere.

Ridicarea nedeterminării presupune rezolvarea sistemului de ecuații canonice în raport cu X_i :

$$\Delta_i = \Delta_{i0} + \delta_{i1} \cdot X_1 + \delta_{i2} \cdot X_2 + \dots + \delta_{in} \cdot X_n = 0$$

Coefficienții Δ_{i0} și δ_{ij} se determină cu una din metodele energetice pentru calculul deplasărilor: metoda forței unitare, regula de integrare Vereșceaghin sau metoda Castigliano.

Primele două metode presupun:

1. – se încarcă sistemul SB, pe rând, cu câte o sarcină unitară aplicată în secțiunea și pe direcția fiecărui X_i , și se scriu legile de variație m_i , (sau se trasează diagramele (i), $i=1 \dots n$);
2. – se încarcă sistemul SB cu sarcinile exterioare și se scriu legile de variație M_i^0 , (sau se trasează diagrama (0));
3. – se calculează coeficienții Δ_{i0} , δ_{ij} , (se va tine cont ca $\delta_{ij} = \delta_{ji}$).

La utilizarea metodei Mohr-Maxwell coeficienții se calculează cu expresiile:

$$\delta_{ij} = \sum_k \int_0^{\ell_k} m_i \cdot m_j \frac{dx}{E_k \cdot I_k}; \quad \Delta_{i0} = \sum_k \int_0^{\ell_k} m_i \cdot M_i^0 \frac{dx}{E_k \cdot I_k}$$

care se integrează direct, sau cu regula lui Vereșceaghin. În expresiile de mai sus k reprezintă intervalul pe care nu se modifică nici una din legile variației ale momentelor, (m_i , m_j , M_i^0), și nici rigiditatea, $E_k I_k$.

Regula de integrare a lui Vereșceaghin se poate utiliza în cazul sistemelor compuse din bare drepte, coeficienții calculându-se în acest caz cu:

$$\delta_{ij} = \sum_k \frac{1}{E_k \cdot I_k} \Omega_k \cdot m_{c_k}; \quad \Delta_{i0} = \sum_k \frac{1}{E_k \cdot I_k} \Omega_k \cdot m_{c_k}$$

în care: Ω_k sunt suprafețe luate din diagramele de moment (i) sau (j), pentru δ_{ij} , respectiv din (0), pentru Δ_{i0} ; m_{c_k} sunt ordonatele centrelor C_k , ale fiecărei Ω_k , luate din diagramele de momente (j) sau (i), pentru δ_{ij} , respectiv din (i), pentru Δ_{i0} .

Pentru trasarea diagramelor de eforturi se poate proceda în două moduri:

a) se recalculează reacțiunile, (pentru sistemul SB încărcat cu sarcinile exterioare și cu mărimile X_i deja calculate), se scriu legile de variație ale efortului căutat, (M_i , T, N, etc.), pe fiecare bară și se trasează apoi diagrama corespunzătoare.

b) în cazul utilizării metodei Mohr-Maxwell, diagrama (M_i) se obține prin suprapunerea peste diagrama (0), a diagramelor (i), amplificate cu valorile găsite pentru fiecare X_i :

$$M_i(x) = M_i^0(x) + X_1 \cdot m_{i,1}(x) + X_2 \cdot m_{i,2}(x) + \dots + X_n \cdot m_{i,n}(x)$$

unde: - $M_i(x)$ = momentul încovoietor dintr-o secțiune oarecare x ;
 - $M_i^0(x)$ = momentul încovoietor produs pe SB de către încărcările exterioare;
 - $m_{i,1}, m_{i,2}, \dots, m_{i,n}$ = momente încovoietoare produse în aceeași secțiune (x) de încărcările cu câte o sarcină unitară aplicată în secțiunea și pe direcția fiecărui X_i .

Calculul deplasării unui punct al sistemului static nedeterminat, după rezolvarea nedeterminării se poate face cu:

$$\Delta = \sum_k \int_0^{\ell_k} \frac{Nn}{E_k A_k} dx + \sum_k \int_0^{\ell_k} \frac{M_i m_i}{E_k I_k} dx + \sum_k \int_0^{\ell_k} \frac{M_t m_t}{G_k I_t} dx$$

unde: - N, M_i, M_t = eforturile din sistemul static nedeterminat ;
 - n, m_i, m_t = eforturile determinate, în sistemul (SB), de o sarcină unitară aplicată în secțiunea și pe direcția deplasării căutate.

Observații:

Gradul de nedeterminare se reduce în cazul existenței simetriei geometrice și a simetriei încărcării. Astfel:

- pentru un **sistem simetric cu încărcare simetrică**, se cunoaște că eforturile antisimetrice, (T și M_t), sunt nule în secțiunile cuprinse în planul de simetrie și deci în cazul unui sistem plan gradul de nedeterminare scade cu 1, ($T = 0$);

- pentru un **sistem simetric cu încărcare antisimetrică**, eforturile simetrice, (N și M_i), **sunt nule** în secțiunile din planul de simetrie și deci gradul de nedeterminare scade, pentru un sistem plan, cu 2;

- Pentru un sistem cu **simetrie în raport cu un punct și antisimetrie a încărcării** în secțiunea punctului există doar moment diferit de zero ($M_i \neq 0$)

- Pentru un sistem cu **simetrie în raport cu un punct și cu simetrie a încărcării** în secțiunea punctului momentul este nul ($M_i = 0$)

Metoda eforturilor pentru solicitări axiale

Aplicarea acestei metode presupune aceleași etape ca și-n cazul sistemelor solificate la încovoiere. Particularitățile constau în:

1) – calculul coeficienților din sistemul ecuațiilor canonice se face cu:

$$\Delta_{i0} = \sum_k \frac{1}{EA_k} \int_0^{\ell_k} N_k^0 \cdot n_{k,i} \cdot dx \quad (1)$$

$$\varphi_{ij} = \sum_k \frac{1}{EA_k} \int_0^{\ell_k} n_{r,i} \cdot n_{k,j} \cdot dx \quad (2)$$

unde: - N_k^0 = efortul axial din bara k, care apar la încărcarea sistemului SB cu forțele exterioare;

- $n_{k,i}, n_{k,j}$ = eforturile axiale din bara k, care apar la încărcarea sistemului SB cu câte o forță unitară aplicată, pe SB, în secțiunea și pe direcția lui X_i , respectiv X_j .

2) Pentru un sistem supus unei variații de temperatură, $\Delta\theta$, față de cea de montaj, ecuațiile canonice sunt:

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \cdot X_j + \Delta_{i0}^{\theta} = 0; \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

unde δ_{ij} sunt calculați cu relația (2), iar Δ_{i0}^θ reprezintă deplasarea după direcția lui X_i , produsă pe SB de variația de temperatură, și se calculează cu:

$$\Delta_{i0}^\theta = \sum_k \frac{1}{EA_k} \int_0^{\ell_k} n_{k,i} \cdot \alpha \cdot \Delta\theta \cdot dx$$

, unde α = coeficientul de dilatare termică liniară; k = numărul de identificare al barei.

3) Pentru un sistem cu inexactități de execuție, w_i , (“defecte de montaj”), eforturile produse prin montarea forțată se determină cu:

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \cdot X_j = w_i + \sum_c n_{c,i} \cdot w_c; \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

unde: w_i = inexactitatea de execuție după direcția lui X_i ; $n_{c,i}$ = forța axială pe direcția inexactității w_c , produsă de pe SB de încărcarea $X_i=1$.

INTEGRALE uzuale:

$f(x)$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi) d\varphi$	$\int_0^{\pi} f(\varphi) d\varphi$	$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(\varphi) d\varphi$	$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi$	$\int_0^{\varphi} f(\varphi) d\varphi$
$\sin \varphi$	1	2	1	0	$-\cos \varphi$
$\cos \varphi$	1	0	-1	0	$\sin \varphi$
$\sin^2 \varphi$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{\sin(2\varphi)}{2} \right)$
$\cos^2 \varphi$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{\sin(2\varphi)}{2} \right)$
$\sin \varphi \cdot \cos \varphi$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sin^2 \varphi}{2}$
$1 - \cos \varphi$	$\frac{\pi}{2} - 1$	π	$\frac{3\pi}{2} + 1$	2π	$\varphi - \sin \varphi$
$(1 - \cos \varphi)^2$	$\frac{3\pi}{4} - 2$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4} + 2$	3π	$\frac{3}{2}\varphi - 2\sin \varphi - \frac{\sin(2\varphi)}{4}$
$(1 - \cos \varphi) \cdot \sin \varphi$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$-\cos \varphi - \frac{\sin^2 \varphi}{2}$
$(1 - \cos \varphi) \cdot \cos \varphi$	$1 - \frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4} - 1$	$-\pi$	$\sin \varphi - \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4}$