

CONCEPTE / TEOREME MATEMATICE DE UZ PRACTIC ÎN EXERCITAREA PROFESIEI DE INGINER

1. Formula lui Taylor pentru funcții de o variabilă. Aproximarea funcțiilor prin polinoame.

Răspuns:

Fie $f: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ și $x_0 \in I, f \in C_I^{n+1}$. Are loc Formula lui Taylor

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

unde T_n este polinomul lui Taylor de ordin n , iar R_n este restul

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0),$$

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0)), \quad 0 < \theta < 1.$$

Rezultă formula de aproximare pentru x într-o vecinătate V a lui x_0 :

$$f(x) \cong T_n(x),$$

cu eroarea $\varepsilon_n = \sup_{x \in V} |R_n(x)|$.

2. Spațiile aritmetice n -dimensionale reale \mathbf{R}^n .

Răspuns:

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R} = \{ \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, n} \}.$$

\mathbf{R}^n este un spațiu vectorial peste corpul \mathbf{R} și în același timp este un spațiu metric cu metrica euclidiană $d_e(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

Spațiul \mathbf{R}^2 se identifică cu mulțimea vectorilor dintr-un plan (uneori se identifică cu mulțimea numerelor complexe \mathbf{C}), iar \mathbf{R}^3 cu mulțimea vectorilor din spațiul fizic uzual (relativ la sisteme de axe fixate). Spațiul \mathbf{R}^4 este numit spațiul timp a lui Einstein – Minkowski și este utilizat în teoria relativității. Utilitatea folosirii spațiilor \mathbf{R}^n constă în obținerea unei exprimări unitare pentru fiecare din spațiile $\mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3, \mathbf{R}^4 \dots$ și pe de altă parte în faptul că orice funcție reală de n variabile reale $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ poate fi asimilată cu o funcție $f(\bar{x})$ de o singură variabilă vectorială $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$.

3. Baze în spații liniare finit dimensionale. Coordonatele unui vector relativ la o bază.

Răspuns:

Baza într-un spațiu vectorial peste corpul \mathbf{K} este un sistem de vectori $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, liniar independenți și care generează spațiul, adică orice vector v se exprimă ca o combinație

liniară de vectorii din B : $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{K}$. Scalarii x_1, x_2, \dots, x_n se numesc coordonatele vectorului v în baza B .

4. Valori și vectori proprii ai unui operator liniar.

Răspuns:

Fie V un spațiu vectorial peste corpul \mathbf{K} și $f: V \rightarrow V$ un operator liniar. Un vector nenul $v \in V$ se numește **vector propriu** al operatorului f dacă există un scalar λ din \mathbf{K} a.î. $f(v) = \lambda v$. Scalarul λ se numește valoare proprie.

5. Noțiunea de șir numeric și de serie numerică. Aproximarea sumei unei serii numerice.

Răspuns:

Un șir numeric este o funcție $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, valoarea $f(n) = u_n$ numindu-se termenul general al șirului.

Cu termenii șirului $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ se construiește șirul cu termenul general $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Perechea formată din șirul $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ și $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ se numește serie cu termenul general u_n și se notează $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. La o serie se pun 2 probleme: determinarea naturii (convergența sau divergența) și calculul sumei sale $S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

Aproximarea sumei S a seriei convergente $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ se face prin formula $S \cong s_n$, cu eroarea de aproximare $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$.

Teoria seriilor este o combinație între studiul sumelor finite și cel al limitelor de șiruri.

6. Derivate parțiale pentru funcții de 2 variabile. Aproximarea funcției cu ajutorul diferențialei.

Răspuns:

Fie $f: A \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de variabile x și y și $(x_0, y_0) \in A$, unde A este deschisă. Derivatele parțiale ale lui f în raport cu x , respectiv y , în punctul (x_0, y_0) se definesc prin:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0},$$

dacă limitele sunt finite.

Formula de aproximare a funcției f , pentru orice pereche (x, y) dintr-o vecinătate a lui (x_0, y_0) , este

$$f(x, y) \cong f(x_0, y_0) + (df)_{(x_0, y_0)}(x - x_0, y - y_0),$$

unde

$$(df)_{(x_0, y_0)}(x - x_0, y - y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

este diferențiala funcției f în punctul (x_0, y_0) .

7. Coordonate polare, cilindrice și sferice.

Răspuns:

a). *Trecerea la coordonate polare:*

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

unde

$$\rho \in [0, \infty); \varphi \in [0, 2\pi),$$

stabilește legătura între coordonatele carteziene (x, y) ale unui punct din plan și coordonatele polare (ρ, φ) ale aceluiași punct.

b). *Trecerea la coordonate cilindrice:*

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

unde

$$\rho \in [0, \infty); \varphi \in [0, 2\pi); z \in \mathbf{R},$$

stabilește legătura între coordonatele carteziene (x, y, z) ale unui punct din spațiu și coordonatele cilindrice (ρ, φ, z) ale aceluiași punct.

c). *Trecerea la coordonatele sferice:*

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

unde

$$\rho \in [0, \infty); \varphi \in [0, 2\pi); \theta \in [0, \pi],$$

stabilește legătura între coordonatele carteziene (x, y, z) ale unui punct din spațiu și coordonatele sferice (ρ, φ, θ) ale aceluiași punct.

8. Definiția transformatei Laplace. Imaginea derivatei.

Răspuns:

Dacă f este o funcție original, transformata Laplace a lui f este:

$$(Lf)(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Imaginea derivatei

$$(Lf')(p) = p(Lf)p - f(0)$$

9. Mărimi geometrice sau fizice care se calculează cu ajutorul integralelor.

Răspuns:

Aria unui domeniu plan, volumul unui corp, masa, centrul de greutate, momentele de inerție, lucrul mecanic.

10. Derivata după o direcție a unei funcții reale. Noțiunile de gradient, divergență și rotor.

Răspuns:

Fie $f : D \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y, z)$ un câmp scalar și $\bar{s} \in \mathbf{R}^3$, $\|\bar{s}\| = 1$ un versor $\bar{a} \in D$. Numim derivata funcției f în punctul \bar{a} după direcția \bar{s} următoarea limită

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\bar{a} + t\bar{s}) - f(\bar{a})] = \frac{\partial f}{\partial \bar{s}}(\bar{a})$$

Derivata $\frac{\partial f}{\partial \bar{s}}(\bar{a})$ caracterizează viteza de variație a funcției f în punctul \bar{a} după direcția \bar{s} . Numim gradientul funcției f în punctul \bar{a} următorul vector

$$\text{grad } f(\bar{a}) = \nabla f(\bar{a}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{a})\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{a})\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{a})\bar{k}$$

unde Nabla este operatorul lui Hamilton $\nabla \cdot = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$.

Se arată că $\frac{\partial f}{\partial \bar{s}}(\bar{a}) = \bar{s} \cdot \nabla f(\bar{a})$ adică derivata câmpului scalar în \bar{a} după direcția \bar{s} este egală cu produsul scalar al gradientului cu versorul \bar{s} .

Rezultă de aici că direcția gradientului unui câmp scalar este aceea după care derivata după o direcție are valoarea maximă, adică câmpul are cea mai rapidă variație.

Fie $\vec{v} : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ un câmp vectorial pe mulțimea deschisă $U \subset \mathbf{R}^3$, $\vec{v} = (P, Q, R)$.

Divergența câmpului \vec{v} într-un punct curent din U este scalarul (numărul):

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{v}$$

Rotorul câmpului \vec{v} într-un punct curent din U este vectorul:

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k} = \nabla \times \vec{v}$$

11. Definiția logaritmului în baza dată $a > 0$, $a \neq 1$ a numărului $N > 0$.

Răspuns:

$\log_a N = x \Leftrightarrow N = a^x$. Deci $\log_a N$ este puterea la care trebuie ridicată baza pentru a obține numărul.

12. Definiția funcției parte întreagă.

Răspuns:

Partea întreagă a numărului real x , notată $[x]$, este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x :

$$x \in [k, k+1), \quad k \in \mathbf{Z} \Rightarrow [x] = k.$$

Funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = [x]$, se numește funcție parte întreagă.

13. Determinarea extremelor unei funcții de 2 variabile.

Răspuns:

Extremele funcției $u = u(x, y)$ se găsesc printre punctele staționare asociate, care sunt

$$\text{soluțiile sistemului } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

Un punct staționar este punct de minim dacă $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0$ și $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0$,

respectiv este punct de maxim dacă $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0$ și $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0$.

14. Ecuația generală a unui plan în spațiu, respectiv a unei drepte determinată de 2 puncte, în spațiu.

Răspuns:

Considerăm punctele M_1, M_2 din spațiu ale căror coordonate sunt $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Ecuațiile canonice ale dreptei determinate de M_1 și M_2 sunt :

$$D : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{y_2 - y_1}.$$

Ecuația generală a unui plan este: $a x + b y + c z + d = 0$.

15. Considerații generale privind definiția, existența și unicitatea soluțiilor ecuațiilor diferențiale.

Răspuns:

În fizică, mecanică, chimie, biologie se întâlnesc ecuații care conțin una sau mai multe funcții necunoscute împreună cu derivatele lor până la anumite ordine, ecuații ce se numesc ecuații diferențiale.

Problema integrării unei ecuații diferențiale de forma:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

este problema determinării tuturor intervalelor $I \subset \mathbf{R}$ și a tuturor funcțiilor $y : I \rightarrow \mathbf{R}$, $y \in C^n(I)$, care verifică identic această ecuație, unde $x \in I$ este variabilă independentă iar y este funcția necunoscută.

Determinarea acelor soluții care verifică unele condiții suplimentare bine precizate (numite condiții inițiale) se numește Problema lui Cauchy pentru ecuația dată. În anumite ipoteze Problema lui Cauchy are soluție unică.

16. Circulația câmpului vectorial. Lucrul mecanic al unui câmp de forțe.

Răspuns:

Dacă se consideră câmpul vectorial $\bar{v} : D \rightarrow \mathbf{R}^3$.

$$\bar{v} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$$

atunci se numește circulația câmpului vectorial \bar{v} în lungul drumului (γ) numărul real definit astfel:

$$\Gamma = \int_{(\gamma)} \bar{v} \cdot d\bar{r} = \int_{(\gamma)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

Dacă \bar{v} este un câmp de forțe, atunci circulația Γ în lungul drumului (γ) se numește *lucrul mecanic al câmpului de forțe \bar{v}* .

17. Fluxul unui câmp vectorial. Interpretare fizică.

Răspuns:

Fluxul câmpului vectorial \bar{v} prin suprafața orientată (S) este numărul real $\Phi_S(\bar{v})$ definit astfel:

$$\Phi_S(\bar{v}) = \iint_S \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma = \iint_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy.$$

Dacă \bar{v} este câmpul vitezelor particulelor unui fluid care curge, iar ρ reprezintă densitatea fluidului atunci fluxul câmpului vectorial $\bar{w} = \rho\bar{v}$ prin suprafața S , este dat de $\Phi_S(\bar{w}) = \iint_S \bar{w} \cdot \bar{n} d\sigma$ și reprezintă cantitatea de fluid ce traversează suprafața S în direcția \bar{n} în unitatea de timp.

18. Ecuația coardei vibrante.

Răspuns:

Prin coardă se înțelege un corp elastic, la care două din dimensiunile sale sunt neglijate în raport cu a treia. Admitem că, coarda execută deplasări în planul Oxy , iar vectorul deplasare $z(x, t)$ este perpendicular pe axa Ox . Sub acțiunea unei forțe perturbatoare dirijate după axa Oz de intensitate $f(x, t)$ raportată la unitatea de lungime, coarda suferă în punctul x și la momentul t deplasarea transversală $z(x, t)$ din planul fix Oxz . În cazul coardei omogene cu densitatea coardei $\rho = \rho_0 = ct$ și cu tensiunea coardei $T_0 = ct$ se obține ecuația coardei vibrante sub forma:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F(x, t), \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho_0}, \quad F = \frac{f}{\rho_0}.$$

Problema lui Cauchy pentru ecuația omogenă a coardei vibrante ($F = 0$) cu condițiile inițiale:

$$z(x, 0) = f(x) \text{ și } z'_t(x, 0) = g(x), \quad f \in C^2(\mathbb{R}), \quad g \in C^1(\mathbb{R})$$

înseamnă determinarea funcției $z(x, t) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ prin formula lui D'Alembert:

$$z_0(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(y) dy.$$

19. Ecuația căldurii.

Răspuns:

Dacă într-o regiune D din spațiu temperatura nu este constantă asistăm la fenomenul de deplasare a unui flux de căldură de la punctele cu temperatură mai înaltă către punctele cu temperatură mai scăzută, fenomen care poartă numele de propagarea căldurii. Fie $z(x, t)$ temperatura mediului în punctul x la momentul t . Dacă domeniul D este supus unui câmp de temperatură exterior cu densitatea $f(x, t)$, raportată la unitatea de volum, iar mediul este și omogen, atunci căldura specifică c , densitatea mediului ρ și coeficientul de conductibilitate termică k sunt constante. Considerând numai propagarea căldurii într-o bară omogenă, adică într-un corp la care două dintre dimensiuni sunt neglijabile în raport cu al treilea notat prin x , ecuația propagării căldurii are forma:

$$\frac{\partial z}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F(x, t), \quad a^2 = \frac{k}{c \cdot \rho}, \quad F = \frac{f}{G \rho} \quad (*)$$

Dacă bara se consideră nemărginită în ambele sensuri, deci $x \in \mathbb{R}$ și $t \geq 0$, atunci se poate pune problema lui Cauchy pentru ecuația căldurii, care constă în determinarea funcției $z(x, t)$, care verifică ecuația omogenă (*) ($F = 0$) și verifică condiția inițială:

$$z(x, t)|_{t=0} = f(x).$$

Soluția este dată de formula lui Poisson pentru ecuația căldurii

$$z_0(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi \cdot t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy, \quad t > 0.$$

20. Formule integrale în teoria câmpurilor (Green, Gauss – Ostrogradski, Stokes)

Răspuns:

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu în raport cu axele de coordonate (un domeniu compact elementar) având ca frontieră curba γ netedă pe porțiuni, iar P și Q funcții de clasă C^1 pe un domeniu deschis din \mathbb{R}^2 , care-l conține pe D . Atunci are loc formula lui Green-Riemann:

$$\oint_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} [x, y] - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy$$

unde sensul de parcurs pe γ este sensul pozitiv (sensul discret).

Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un domeniu compact elementar (simplu în raport cu axele de coordonate) și $\bar{v}: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3, \bar{v}(x, y, z) = P(x, z, y)\bar{i} + Q(x, z, y)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$ un câmp vectorial de clasă $C^1(\Omega)$. Atunci fluxul câmpului vectorial \bar{v} prin suprafața $S_e = Fr(\Omega)$, după normala exterioară \bar{n} , este egal cu integrala triplă a divergenței câmpului vectorial pe Ω , adică avem formula lui Gauss-Ostrogradski:

$$\int_{S_e} \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} \text{div } \bar{v} dx dy dz.$$

Fie S o suprafață netedă de clasă C^2 bordată de curba netedă închisă C orientată coerent de versorul \bar{n} al normalei la suprafața S . Dacă $\bar{v} = (P, Q, R)$ este un câmp vectorial de clasă C^1 pe o mulțime deschisă din \mathbf{R}^3 , care conține S , atunci circulația câmpului vectorial \bar{v} pe curba C este egală cu fluxul rotorului \bar{v} prin suprafața S , adică avem formula lui Stokes:

$$\oint_C \bar{v} \cdot d\bar{r} = \iint_S \text{rot } \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma$$

unde, $\bar{n} = \cos \alpha \cdot \bar{i} + \cos \beta \cdot \bar{j} + \cos \gamma \cdot \bar{k}$ versorul normalei la suprafață.