

6. ANALIZA ȘI RĂSPUNSUL SISTEMELOR ÎN DOMENIUL TIMP

6.1. Introducere

În capitolul anterior s-a prezentat metoda de descriere a sistemului prin intermediul funcției de transfer.

Transformata Laplace a relației dintre mărimile de intrare și de ieșire se poate scrie, pe baza proprietăților acesteia de liniaritate și a modului de calcul a transformatei Laplace pentru derivata unei funcții:

$$\begin{aligned} a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) &= \\ &= b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_0 U(s) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Relația anterioară permite exprimarea transformatei Laplace a mărimii de ieșire:

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} U(s) \quad (6.2)$$

sau:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (6.3)$$

S-a menționat și faptul că „efectul” generat de un sistem ca răspuns al unei „cauze” se poate obține simplu în spațiul s :

$$IESIRE(s) = G(s) \cdot INTRARE(s) \quad (6.4)$$

Din relația anterioară, se observă că este necesară utilizarea transformatei Laplace a mărimii de intrare din sistem. În capitolele anterioare au fost prezentate principalele semnale standard care se utilizează pentru analiza sistemelor și care permit descrierea unui semnal de intrare complex.

Răspunsul sistemului în domeniul timp se obține în mod relativ simplu prin utilizarea transformatei Laplace inverse. Metodologia utilizării acestei transformate și anexa recomandată au fost specificate de asemenea în capitolul anterior.

În cadrul acestui capitol, se urmărește în plus prezentarea parametrilor de bază care descriu comportamentul dinamic al sistemului. Ecuația diferențială (6.1) poate fi clasificată, în funcție de ordinul cel mai mare al derivatei ($\max\{m, n\}$), în *ordinul zero*, *ordinul întâi*, *ordinul doi*, etc. Ecuația (6.1) permite astfel definirea unei noțiuni de referință în teoria sistemului: *ordinul sistemului* echivalent cu ordinul ecuației diferențiale.

Facilitatea oferită de mediul de lucru MATLAB este avută în vedere într-un capitol separat.

6.2. Răspunsul sistemului de ordinul zero

Se consideră sistemul din figura 6.1.

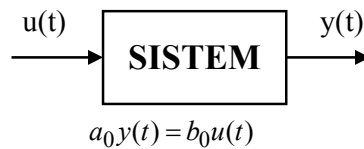


Fig. 6.1 Sistemul de ordinul zero

Descrierea dinamică a unui sistem liniar de ordinul zero este dată de ecuația:

$$a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (6.5)$$

și a cărei funcție de transfer este:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0} \quad (6.6)$$

Din ecuația anterioară se obține transformata Laplace a mărimii de ieșire și apoi transformata Laplace inversă a acesteia, adică mărimea de ieșire ca funcție de timp:

$$Y(s) = \frac{b_0}{a_0} \cdot U(s) \quad (6.7)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{b_0}{a_0} \cdot U(s)\right) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \mathcal{L}^{-1}(U(s)) = \frac{b_0}{a_0} \cdot u(t)$$

Raportul

$$S = \frac{b_0}{a_0} \left[\frac{UM_y}{UM_u} \right] \quad (6.8)$$

definiște sensibilitatea sistemului și are ca unitate de măsură raportul unității de măsură pentru mărimea de intrare și unitatea de măsură pentru mărimea de ieșire.

Ca și concluzii importante asupra comportamentului sistemului de ordinul zero se pot menționa:

- sistemul de ordinul zero nu introduce întârziere în răspuns față de mărimea de intrare;
- sistemul de ordinul zero realizează o modificare a amplitudinii mărimii de intrare.

Exemplu

Se consideră o transmisie prin roți dințate a cărei schemă cinematică este prezentată în figura 6.2.

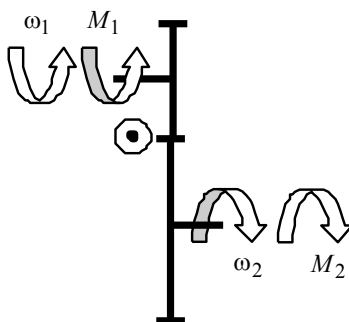


Fig. 6.2 Transmisie prin roți dințate echivalată cu un sistem de ordinul zero

Considerând mărimea de intrare și cea de ieșire ca fiind viteza unghiulară, se poate defini în mod simplu funcția de transfer ca fiind:

$$G(s) = \frac{\omega_2(s)}{\omega_1(s)} = \frac{1}{i} \quad (6.9)$$

unde i este raportul de transmitere a transmisiei.

Având în vedere relația (6.7) și (6.9) se poate determina simplu relația binecunoscută din teoria mecanismelor:

$$\omega_2(t) = \frac{1}{i} \omega_1(t) \quad (6.10)$$

Considerând că mărimea de intrare și cea de ieșire sunt momentele de torsiune transmise și că transmisia are pierderi de putere cuantificate prin randamentul mecanic η , se pot scrie relațiile care descriu modelul matematic al transmisiei și care permit determinarea unei noi forme a funcției de transfer:

$$\begin{aligned} P_2 &= \eta P_1 \\ \omega_2 M_2 &= \eta \omega_1 M_1 \\ G_1(s) &= \frac{M_2(s)}{M_1(s)} = \eta \cdot i \end{aligned} \quad (6.11)$$

Se poate obține astfel relația cunoscută:

$$M_2(t) = \eta \cdot i \cdot M_1(t) \quad (6.12)$$

6.3. Răspunsul sistemului de ordinul unu

6.3.1. Sistemul de ordinul unu

Ecuția dinamică a sistemului este de forma:

$$a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (6.13)$$

Aplicând transformata Laplace și reorganizări successive, se obține funcția de transfer a unui sistem de ordinul 1:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} = \frac{b_0/a_0}{\frac{a_1}{a_0} s + 1} = \frac{S}{\tau \cdot s + 1} \quad (6.14)$$

unde $S = \frac{b_0}{a_0}$ este *sensibilitatea sistemului*, iar $\tau = \frac{a_1}{a_0}$ [s] este *constantă de timp a sistemului*.

Mărimea de ieșire va fi:

$$Y(s) = \frac{S}{\tau \cdot s + 1} \cdot U(s) \quad (6.15)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{S}{\tau \cdot s + 1} \cdot U(s) \right\}$$

Comportamentul tranzitoriu al sistemului este descris de o serie de parametri:

- *constantă de timp* τ [s] - este definită ca timpul necesar mării de ieșire ca să atingă 63 % din valoarea mării de regim stabilizat;
- *timpul de întârziere* t_i - definit ca timpul necesar pentru ca mărimea de ieșire să atingă 50 % din valoarea de regim stabilizat;
- *timpul de creștere* t_c - definit ca timpul necesar mării de ieșire să crească de la valoarea de 10 % din valoarea de regim stabilizat până la valoarea de 90 % din aceasta.

6.3.2. Răspunsul sistemului la un impuls unitar

Transformata Laplace a mării de intrare considerate este $U(s) = 1$. Relația (6.15) devine în acest caz:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{S}{\tau \cdot s + 1} \cdot 1 \right\} = S \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1/\tau}{s + 1/\tau} \right\} = S \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6.16)$$

pentru care s-a utilizat tabela de funcții inverse Laplace, din care s-a extras:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s+a}\right\} = k \cdot e^{-at} \quad (6.17)$$

Formele de variație ale mărimilor de intrare și ieșire sunt prezentate în figura 6.3. Se evidențiază semnificația constantei de timp.

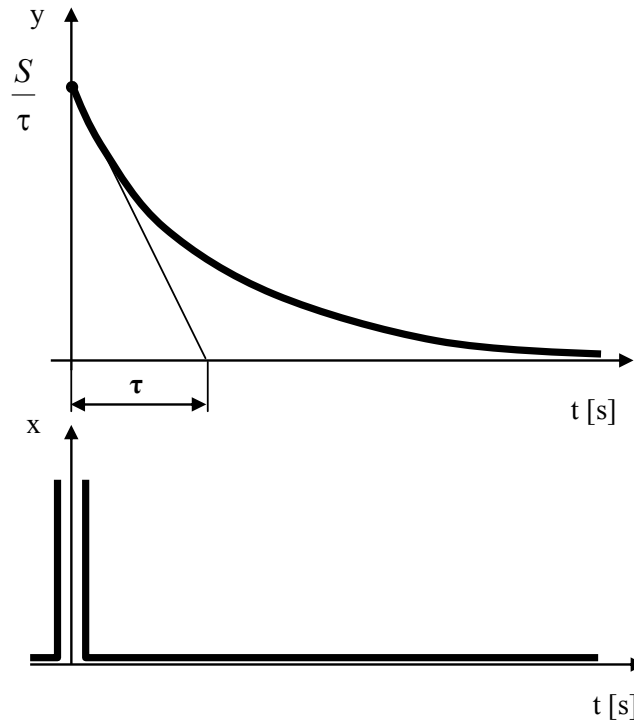


Fig. 6.3 Răspunsul sistemului de ordinul unu la un impuls unitar

6.3.2.1. Exemplu de calcul

Un sistem este echivalat cu un senzor de temperatură. Funcția de transfer a acestuia este definită prin relația:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{40 \times 10^{-6}}{10s + 1} \left[\frac{V}{0^\circ C} \right] \quad (6.18)$$

Se cere să se determine răspunsul sistemului dacă acesta este imersat – pentru un interval scurt de timp - în apă aflată la 80 °C.

Introducerea senzorului în apă pentru un interval scurt de timp este echivalată cu aplicarea la intrarea acestuia a unui semnal de tip impuls. În acest caz, semnalul de ieșire are valoarea:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = 80 \cdot G(s) \quad (6.19)$$

sau:

$$Y(s) = \frac{40 \times 10^{-6}}{10s + 1} \times 80 = \frac{32 \times 10^{-5}}{(s + 0.1)} \quad (6.20)$$

Răspunsul în timp a sistemului va fi astfel:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{32 \cdot 10^{-5}}{s + 0.1}\right) = 32 \cdot 10^{-5} e^{-0.1t} \text{ V} \quad (6.21)$$

6.3.2.2. Exemplu de calcul

Un sistem se identifică cu un circuit serie RC. Se cere să se determine răspunsul sistemului la aplicarea unui impuls de tensiune (4 V) la intrarea sistemului (fig.6.4).

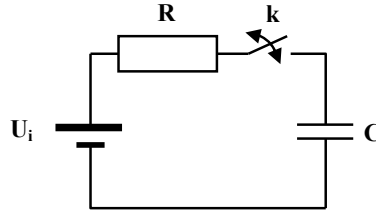


Fig. 6.4 Răspunsul circuitului serie RC la un semnal impuls

Ecuția diferențială care modelează circuitul serie se poate scrie sub forma:

$$U_i = RC \frac{dU_C}{dt} + U_C \quad (6.22)$$

pentru care se determină funcția de transfer:

$$G(s) = \frac{U_C(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \quad (6.23)$$

Răspunsul sistemului la un semnal impuls la intrare va fi:

$$U_C(s) = G(s) \cdot U_i(s) = \frac{1}{RCs + 1} \cdot 4 = \frac{4/RC}{s + 1/RC} \quad (6.24)$$

Utilizând transformarea Laplace inversă (și anexa aferentă) se determină ecuația în timp a tensiunii pe condensatorul C:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(U_C(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4/RC}{s + 1/RC}\right) = \frac{4}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (6.25)$$

6.3.2.3. Exemplu de calcul

Se consideră sistemul prezentat în figura 6.5. Masa $m = 40$ kg este în contact cu

un plan orizontal iar frecarea este vâscoasă și caracterizată de un coeficient $c = 20 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$. Sistemul se găsește sub acțiunea unui impuls cu amplitudinea 200 N și o durată de 0.01 s . Se cere să se determine răspunsul sistemului la un astfel de semnal de intrare.

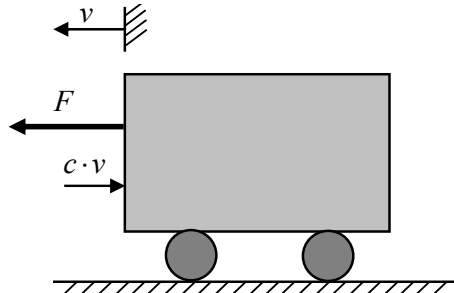


Fig. 6.5 Sistem mobil în mișcare de translație

Modelul matematic al sistemului este descris de ecuația:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} + cv = F \quad (6.26)$$

Funcția de transfer a ecuației diferențiale anterioare este:

$$G(s) = \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{sm + c} = \frac{1/c}{m/c \cdot s + 1} = \frac{S}{\tau s + 1} \quad (6.27)$$

unde constanta de timp a sistemului este $\tau = \frac{m}{c} = \frac{40}{20} = 2 \text{ s}$.

Durata acțiunii impulsului față de constanta de timp a sistemului este cu mult mai mică, astfel că semnalul de intrare se aproximează cu un impuls de arie $200 \cdot 0.01 = 2 \text{ [Ns]}$ (fig.6.6)

Semnalul de intrare se poate reprezenta matematic, astfel: $u(t) = 2\delta(t) \text{ [Ns]}$

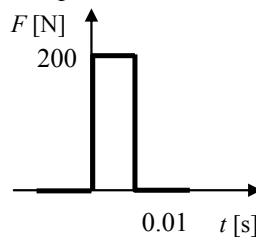


Fig. 6.6 Impulsul aplicat sistemului mobil

Pe baza relației (6.27) și a modului de exprimare a mărimii de intrare se determină răspunsul sistemului pentru un semnal de intrare de tip impuls.

$$v(t) = \frac{2}{m} \cdot e^{-c \cdot \frac{t}{m}} = 0.05 \cdot e^{-0.5t} \quad (6.28)$$

6.3.3. Răspunsul sistemului la un semnal treaptă

Pentru un semnal de tip treaptă, transformata Laplace este:

$$U(s) = \frac{H}{s} \quad (6.29)$$

unde H este valoarea semnalului ($H = 1$ definește semnalul treaptă unitară).

În acest caz, răspunsul sistemului se determină conform cu:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{S}{\tau \cdot s + 1} \cdot \frac{H}{s} \right\} = S \cdot H \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{\tau}}{s(s + \frac{1}{\tau})} \right\} = S \cdot H \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (6.30)$$

Răspunsul sistemului la un semnal treaptă este prezentat în fig. 6.4. Se observă că valoarea de regim stabilizat (valoarea staționară) este:

$$y_{st} = S \cdot H \quad (6.31)$$

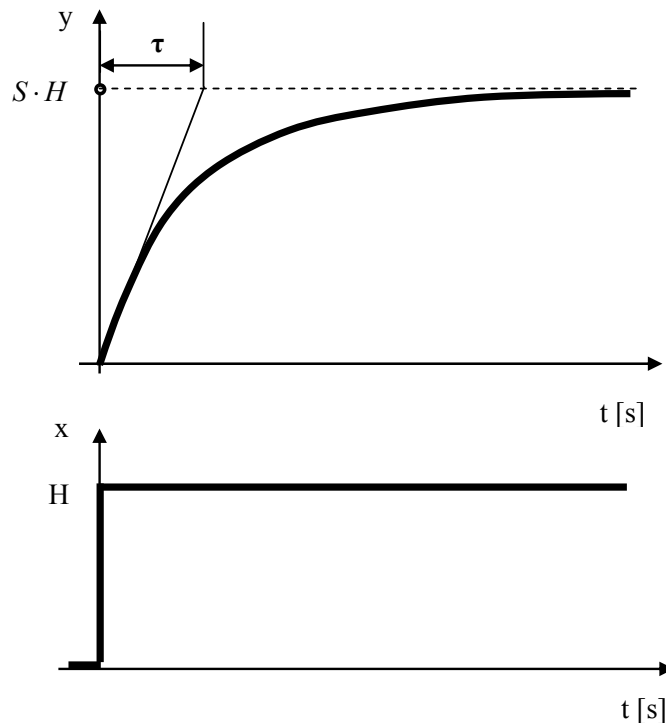


Fig. 6.7 Răspunsul indicial al sistemului de ordinul unu

Pe baza definițiilor anterioare, relația (6.30) permite calculul parametrilor sistemului:

- *Timpul de întârziere.* Valoarea de regim stabilizat ($t \rightarrow \infty$) este egală cu zero. Astfel:

$$0.5 \cdot S \cdot H = S \cdot H \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_i}{\tau}} \right) \quad (6.32)$$

sau

$$0.5 = e^{-\frac{t_i}{\tau}} \quad (6.33)$$

de unde se determină că:

$$t_i = \tau \ln 2 \quad (6.34)$$

- *Timpul de creștere.* Pe baza definiției celor două valori (10 % și 90 %) se poate calcula durata de timp necesară atingerii aceluia interval.

$$0.1 \cdot S \cdot H = S \cdot H \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_{10}}{\tau}} \right) \quad (6.35)$$

de unde se determină:

$$t_{10} = \tau \ln 10 \quad (6.36)$$

Din relația:

$$0.9 \cdot S \cdot H = S \cdot H \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_{90}}{\tau}} \right) \quad (6.37)$$

se determină:

$$t_{90} = \tau \ln 10 - \tau \ln 9 \quad (6.38)$$

astfel că:

$$t_c = t_{90} - t_{10} = \tau \ln 9 \quad (6.39)$$

- *Constanta de timp.* Răspunsul sistemului de ordinul unu, prin relația (6.30) transformată, poate fi scris și sub formă relativă:

$$y_0 = \frac{y}{SH} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6.40)$$

Având în vedere valoarea termenului exponențial $e^{-1} = 0.37$, relația (6.40) permite prezentarea răspunsului sistemului de ordinul unu la diverse momente de timp multiplu a constantei de timp a sistemului. Astfel dacă $t = \tau$, relația (6.40) devine:

$$y_0 = 1 - e^{-1} = 1 - 0.37 = 0.63 \quad (6.41)$$

Se consideră ca acceptabilă, atingerea valorii de ieșire de 95 % în zona domeniului de câmp staționar după 3 constante de timp. Valoarea acceptată de 95 % din cea de regim staționar depinde de aplicație.

Tabelul 6.1

Timpul t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	∞
Mărimea de ieșire raportată y_0	0	0.63	0.86	0.95	0.98	0.99	1

6.3.3.1. Exemplet de calcul

O sursă de tensiune se poate aplica unui sistem electric prin închiderea întrerupătorului K (fig.6.8). Se cere să se determine transformata Laplace a semnalului aplicat la intrarea sistemului. Aplicație numerică $U = 12 \text{ V}$.

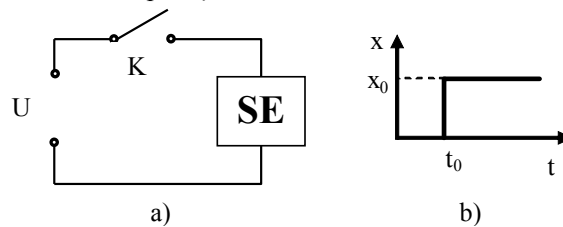


Fig. 6.8 Sistemul electric și semnalul treaptă

Închiderea întrerupătorului K la momentul $t = t_0$ este echivalentă cu aplicarea unui semnal treaptă sistemului SE:

$$x(t) = \begin{cases} = 0 & , \text{ pt. } t \leq t_0 \\ = x_0 & , \text{ pt. } t > t_0 \end{cases} \quad (6.42)$$

Având în vedere valoarea numerică și transformata Laplace pentru un semnal treaptă unitară, se poate determina transformata Laplace a semnalului aplicat la intrarea sistemului SE:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 = 12 \text{ V} \\ X(s) &= \frac{1}{s} - \text{treapta unitara} \\ X_0(s) &= \frac{12}{s} \end{aligned} \quad (6.43)$$

6.3.3.2. Exemplet de calcul

Se reconsideră circuitul serie RC din figura 6.4 pentru următoarele valori: rezistența $R = 1 \text{ M}\Omega$, capacitatea $C = 4 \mu\text{F}$, tensiunea de alimentare $U_i = 6 \text{ V}$. Se cere să se determine răspunsul sistemului la închiderea întrerupătorului K.

Închiderea întrerupătorului este echivalentă cu aplicarea semnalului treaptă pe circuitul RC. Ecuația diferențială (6.22) a permis determinarea funcției de transfer

(6.23). Se poate astfel să se determine:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = G(s) \cdot \frac{6}{s} = \frac{1}{s(RCs + 1)} = \frac{6}{s(4s + 1)} \quad (6.44)$$

Răspunsul sistemului în domeniul timp va fi:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s(4s + 1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s} - \frac{24}{4s + 1}\right) = 6 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{4}}\right) \quad (6.45)$$

6.3.3.3. Exemplu de calcul

Se reconsideră exemplul 6.3.2.1 pentru care se admite că senzorul de temperatură este imersat brusc într-un vas cu apă aflat la temperatura la 80 °C. Se cere să se determine răspunsul sistemului la această „cauză”.

Pentru sistemul considerat, „cauza” este echivalentă cu un semnal treaptă. Răspunsul sistemului se poate determina ca și în cazul anterior, prin analogie:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = G(s) \cdot \frac{80}{s} \quad (6.46)$$

sau:

$$Y(s) = \frac{40 \times 10^{-6}}{10s + 1} \times \frac{80}{s} = \frac{32 \times 10^{-4}}{s(10s + 1)} = 32 \times 10^{-4} \left(\frac{1}{s} - \frac{10}{10s + 1}\right) \quad (6.47)$$

Răspunsul în timp a sistemului va fi astfel:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(32 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{10}{10s + 1}\right)\right) = 32 \cdot 10^{-4} (1 - e^{-0.1t}) \quad (6.48)$$

6.3.3.4. Exemplu de calcul

Se consideră sistemul a cărui conexiune paralelă are la bază două subsisteme de ordinul unu cu funcțiile de transfer:

$$G_1(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} \quad (6.49)$$

$$G_2(s) = \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} \quad (6.50)$$

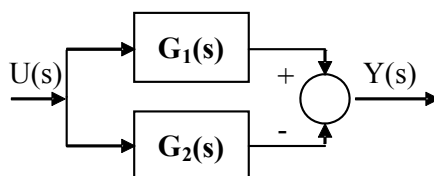


Fig. 6.9 Sistem format din două subsisteme de ordinul unu

Se cere să se determine valorile amplificărilor K_1 și K_2 astfel ca derivata în origine a semnalului de ieșire pentru un semnal de tip treaptă unitară la intrare, să fie pozitivă.

Forma Laplace a răspunsului sistemului este:

$$Y(s) = \left(\frac{K_1}{\tau_1 s + 1} - \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} \right) \cdot \frac{1}{s} \quad (6.51)$$

Transformata Laplace inversă pentru expresia anterioară va conduce la relația:

$$y(t) = K_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) - K_2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \quad (6.52)$$

Derivata semnalului anterior conduce la forma:

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left(\frac{K_1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{K_2}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)_{t=0} = \frac{K_1}{\tau_1} - \frac{K_2}{\tau_2} \quad (6.53)$$

Condiția unei valori pozitive a derivatei de ordinul întâi impune verificarea inegalității:

$$\frac{K_1}{\tau_1} > \frac{K_2}{\tau_2} \quad (6.54)$$

6.3.3.5. Exemplu de calcul

Se consideră sistemul de ordinul unu descris prin funcția de transfer:

$$G(s) = \frac{5}{s + 0.25} \left[\frac{mV}{0 C} \right] \quad (6.55)$$

Se cere să se determine parametrii care caracterizează sistemul: sensibilitatea, constanta de timp, durata de întârziere și durata de creștere.

Funcția de transfer se aduce la o formă care să permită identificarea parametrilor sensibilitate și constanta de timp (vezi relația 6.14):

$$G(s) = \frac{5}{s + \frac{1}{4}} = \frac{20}{4s + 1} \left[\frac{mV}{0 C} \right] \quad (6.56)$$

Din relația anterioară se determină prin identificare valorile:

- Sensibilitatea - $S = 20 \left[\frac{mV}{0 C} \right]$;
- Constanta de timp - $\tau = 4 \text{ s}$

Pe baza relațiilor (6.34) și (6.39) se pot determina:

- Durata de întârziere:

$$t_i = \tau \ln 2 = 4 \cdot 0.693 = 2.772 \text{ s} \quad (6.57)$$

- Durata de creștere:

$$t_c = \tau \ln 9 = 4 \cdot 2.197 \approx 8.79 \text{ s} \quad (6.58)$$

6.3.3.6. Exemplet de calcul

Se consideră sistemul prezentat în figura 6.10. Masa $m = 20000 \text{ kg}$ este în contact cu un plan orizontal, iar frecarea este vâscoasă și este caracterizată de un coeficient $c = 500 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$. Sistemul se găsește sub acțiunea unei forțe de tip treaptă cu amplitudinea:

- varianta a - 1 N
- varianta b - 2000 N .

Se cere să se determine răspunsul sistemului la un astfel de semnal de intrare.

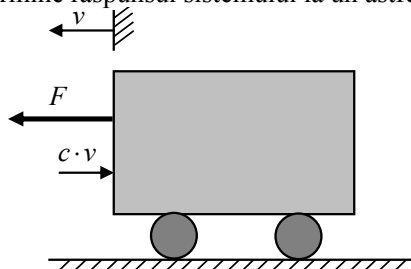


Fig. 6.10 Sistem mobil în mișcare de translație

Modelul matematic al sistemului este descris de ecuația:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} + cv = F \quad (6.59)$$

Funcția de transfer a ecuației diferențiale anterioare este:

$$G(s) = \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{sm + c} \quad (6.60)$$

Funcția de transfer a semnalului de intrare – forța $F(t)$ - are forma $F(s) = \frac{H}{s}$ sau în formă numerică pentru cele două variante:

$$F_1(s) = \frac{1}{s} \quad (6.61)$$

$$F_2(s) = \frac{2000}{s} \quad (6.62)$$

Răspunsul sistemului în domeniul timp se obține prin procedeul clasic:

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}(V(s)) = \mathcal{L}^{-1}(G(s) \cdot F(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{sm + c} \cdot \frac{H}{s}\right) = \frac{H}{c} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{m/c}}\right) \quad (6.63)$$

Pentru valorile numerice date, se obțin ecuațiile:

$$v_1(t) = 2 \cdot 10^{-3} (1 - e^{-0.25t}) \quad (6.64)$$

$$v_2(t) = 4 \cdot (1 - e^{-0.25t}) \quad (6.65)$$

Răspunsul sistemului în timp este prezentat în figurile 6.11 și respectiv 6.12. Se remarcă diferența doar prin valoarea staționară în cele două variante.

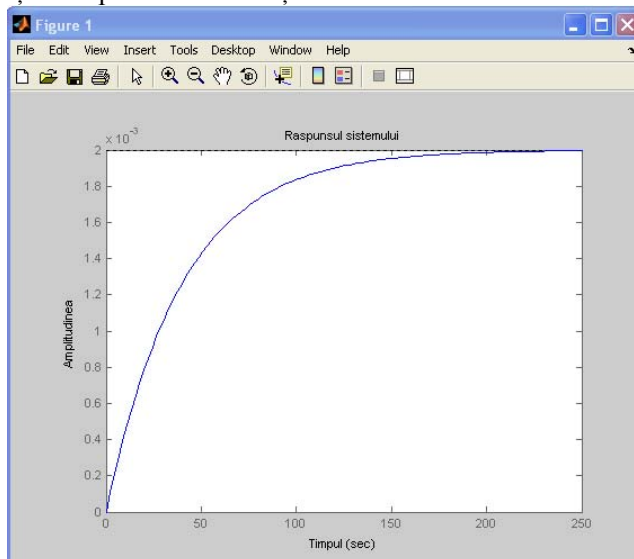


Fig. 6.11 Răspunsul sistemului (varianta a)

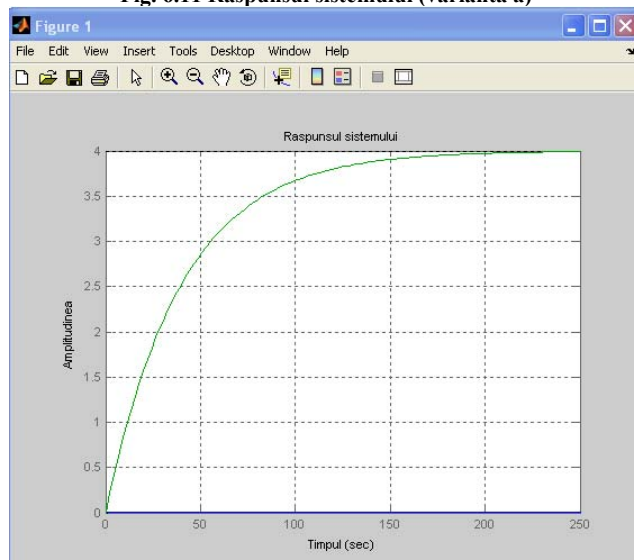


Fig. 6.12 Răspunsul sistemului (varianta b)

6.3.4. Răspunsul sistemului la un semnal rampă unitară

Transformata Laplace a funcției rampă unitară, semnalul de intrare în sistem, este:

$$U(s) = \frac{1}{s^2} \quad (6.66)$$

Răspunsul, în formă laplaceană, a unui sistem de ordinul unu la o marime de intrare din această categorie va fi:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{S}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{s^2} \quad (6.67)$$

Răspunsul în domeniul timp se determină prin aplicarea transformatei Laplace inverse (fig.6.13):

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{S}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{s^2}\right) = S \cdot \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-\tau}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{\tau}{s + \frac{1}{\tau}}\right) = \\ &= S \cdot \left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-\tau}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\tau}{s + \frac{1}{\tau}}\right) \right] = S \cdot \left[t - \tau \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \right] \end{aligned} \quad (6.68)$$

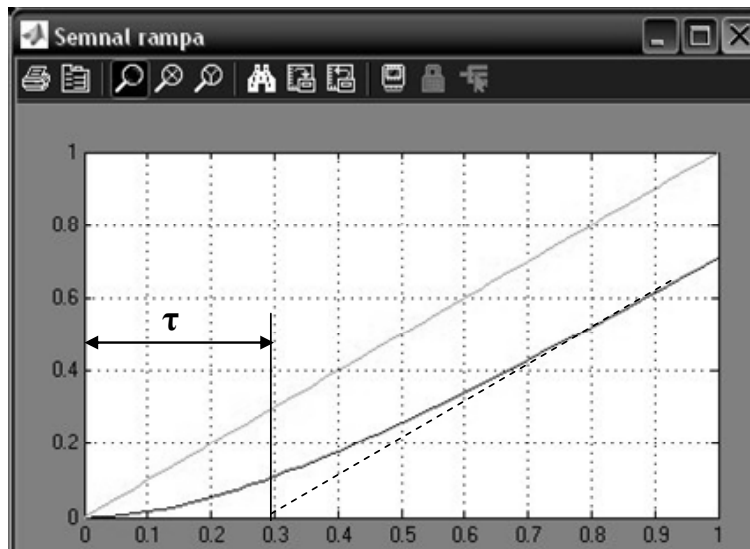


Fig. 6.13 Răspunsul sistemului de ordinul unu la un semnal rampă unitar ($S = 1$)

6.3.4.1. Exemplu de calcul

Se consideră sistemul din figura 6.14. Un element de masă m [kg] este acționat de o forță F [N]. Sistemul se găsește și sub acțiunea unei forțe rezistente de amortizare.

Coeficientul de frecare vâscoasă este c [$N \cdot s / m$]. Considerând viteza de deplasare a elementului v [m/s], se cere să se determine răspunsul sistemului la un semnal de intrare (forța de acționare) de tip rampă. Exemplu numeric: $m = 1200$ kg, $c = 40$ $N \cdot s / m$, $F(t) = 100t$.

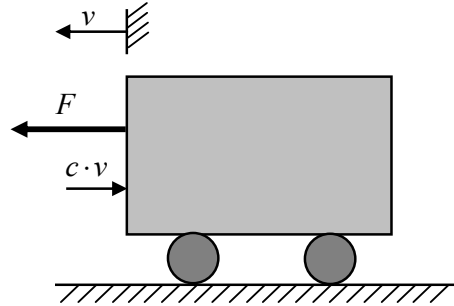


Fig. 6.14 Sistem mobil în mișcare de translație

Modelul matematic al sistemului este descris de ecuația:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} + cv = F \quad (6.69)$$

Funcția de transfer a ecuației diferențiale anterioare este:

$$G(s) = \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{sm + c} = \frac{1/c}{m/c \cdot s + 1} = \frac{S}{\tau s + 1} \quad (6.70)$$

Transformata Laplace a semnalului de intrare este:

$$F(s) = 100 \cdot \frac{1}{s^2} \quad (6.71)$$

Răspunsul sistemului în aceste condiții se poate scrie:

$$V(s) = \frac{1}{sm + c} \cdot F(s) \quad (6.72)$$

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}(V(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1/c}{m/c \cdot s + 1} \cdot \frac{100}{s^2}\right) \quad (6.73)$$

Utilizând valorile numerice, relația anterioară (6.73) devine:

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}(V(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1/40}{1200/40 \cdot s + 1} \cdot \frac{100}{s^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2.5}{s^2(30s + 1)}\right) \quad (6.74)$$

Calculul transformatei Laplace inverse impune descompunerea în fracții simple:

$$\frac{1}{s^2(30s+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{30s+1} \quad (6.75)$$

În mod simplu se determină coeficienții:

$$A=1; B=-30; C=900 \quad (6.76)$$

Astfel că relația anterioară (6.74) devine:

$$v(t) = 2.5 \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{30}{s} + \frac{900}{30s+1} \right) = -75 + 2.5t + 75e^{-\frac{t}{30}} \quad (6.77)$$

Răspunsul sistemului în domeniul timp la semnalul rampă este prezentat în figura 6.15.

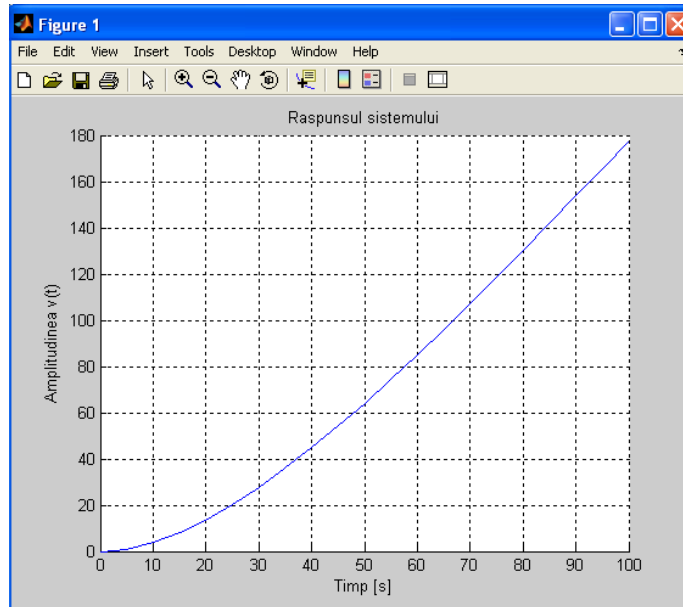


Fig. 6.15 Răspunsul sistemului la semnalul treaptă

6.4. Răspunsul sistemului de ordinul doi

6.4.1. Sistemul de ordinul doi

6.4.1.1. Ecuația diferențială și funcția de transfer a sistemului

Sistemele de ordinul doi sunt cele mai simple sisteme care prezintă în comportarea lor oscilații și depășiri ale valorii de regim staționar. Foarte multe sisteme tehnice, inclusiv din domeniul mecatronice, pot fi asimilate cu sistemele de ordinul doi.

Fiind dat un sistem de ordinul doi, este necesar să se prevadă comportarea acestuia, modul în care răspunde la diferite semnale.

Ecuția diferențială care descrie sistemul de ordinul doi este de forma:

$$a_2 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = b_0 \cdot u \quad (6.78)$$

Utilizând transformata Laplace, se poate obține funcția de transfer a sistemului:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} \quad (6.79)$$

sau răspunsul sistemului pentru semnalul de intrare:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b_0}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} \cdot U(s)\right\} \quad (6.80)$$

Funcția de transfer permite o serie de transformări, devenind:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{\frac{a_2}{a_0} \cdot s^2 + \frac{a_1}{a_0} \cdot s + 1} = \\ &= \frac{\frac{b_0}{a_0}}{\frac{1}{\frac{a_0}{a_2}} \cdot s^2 + 2 \cdot \frac{\frac{a_1}{a_0}}{2 \cdot \sqrt{a_0 \cdot a_2 \cdot \frac{a_0}{a_2}}} \cdot s + 1} = \frac{S}{\frac{1}{\omega_n^2} \cdot s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} \cdot s + 1} = \\ &= \frac{S \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2} \end{aligned} \quad (6.81)$$

unde:

- $S = \frac{b_0}{a_0}$ - este *sensibilitatea sistemului*, sau *factorul de amplificare* (determină mărimea răspunsului în starea staționară când intrarea are o variație de tip treaptă);
- $\omega_n^2 = \frac{a_0}{a_2}$ - este *pulsația naturală a sistemului* (pulsația la care ar oscila sistemul dacă nu ar exista amortizare; arată cât de repede oscilează sistemul în timpul răspunsului tranzitoriu);
- $\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 \cdot a_2}}$ - este *factorul de amortizare* (arată cât de mult oscilează sistemul până la atingerea stării staționare)

Funcția de transfer (6.81) poate fi adusă în forma standard de prezentare:

$$G(s) = \frac{S}{\frac{1}{\omega_n^2} \cdot s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} \cdot s + 1} = \frac{S}{T^2 \cdot s^2 + 2\xi T \cdot s + 1} \quad (6.82)$$

unde $T = 1/\omega_n$.

Considerând valorile particulare pentru coeficienții sistemului, se pot defini stările acestuia (fig.6.16):

- sistemul cu amortizare slabă, subatenuat $\xi < 1$ ($S = 1; a_0 = 1; a_1 = 1; a_2 = 1$ și astfel $\xi = 0.5$);
- sistemul critic amortizat, $\xi = 1$ ($S = 1; a_0 = 1; a_1 = 2; a_2 = 1$ și astfel $\xi = 1$);
- sistemul supra-amortizat, $\xi > 1$ ($S = 1; a_0 = 1; a_1 = 3; a_2 = 1$ și astfel $\xi = 1.5$);
- sistemul neamortizat $\xi = 0$ (pentru $a_1 = 0$).

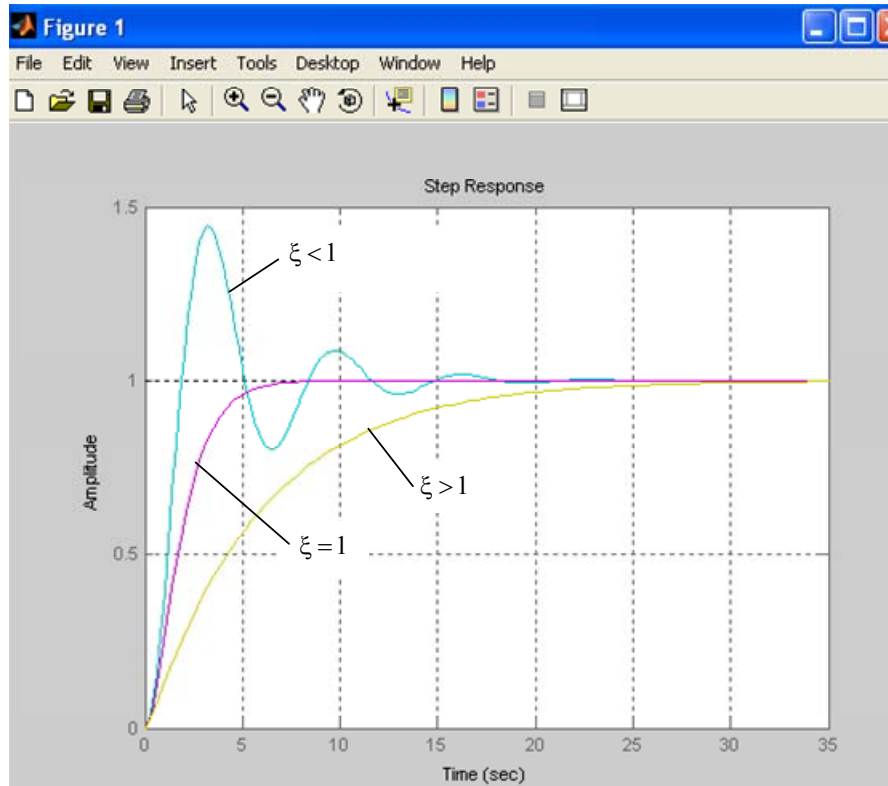


Fig. 6.16 Sistem de ordinul doi slab amortizat, critic și supra-amortizat

6.4.1.2. Exemplu de calcul

Se consideră circuitul RLC serie din figura 6.17 cu următoarele valori numerice pentru componente: $R = 100\Omega$, $L = 2H$ și $C = 20\mu F$. Se cere să se determine ecuația diferențială a sistemului, frecvența naturală a sistemului și factorul de amortizare.

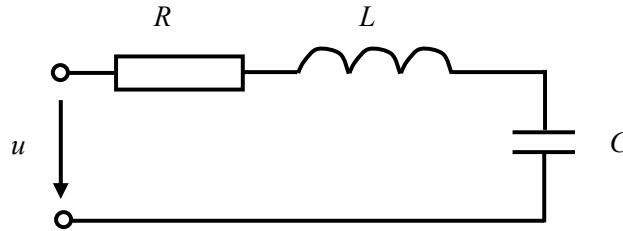


Fig. 6.17 Circuitul serie RLC

Asociind circuitului din figură curentul i și aplicând teorema lui Kirckoff pentru ochiul de rețea, se pot scrie ecuațiile care modelează circuitul analizat:

$$u = u_R + u_L + u_C \quad (6.83)$$

$$u = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt \quad (6.84)$$

Având în vedere și relația $u_C = \frac{1}{C} \int idt$, relația anterioară (6.84) se poate transforma sub forma:

$$u = RC \cdot \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C \quad (6.85)$$

Funcția de transfer a sistemului de ordinul doi rezultă din ecuația (6.85) prin aplicarea transformatei Laplace:

$$G(s) = \frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (6.86)$$

Din identificarea coeficienților pentru relațiile (6.81) și (6.86) se pot determina:

- $\omega_n^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 25 \cdot 10^3$ și astfel $\omega_n = 158.11 \text{ Hz}$;
- $\xi^2 = \frac{(RC)^2}{4 \cdot LC \cdot 1} = \frac{R^2 C}{4L} = \frac{100^2 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 2} = 25 \cdot 10^{-3}$ și astfel $\xi = 0.1581$;

6.4.1.3. Exemplu de calcul

Unul din cele mai cunoscute sisteme de ordinul doi poate fi considerat ca fiind cel al unei mase m conectate, printr-un element elastic cu constanta K și un element amortizor cu constanta de amortizare C , la elementul fix (fig.6.18). Se cere să se analizeze variantele posibile ale sistemului.

Sistemul mecanic se poate găsi în repaus sau în mișcare de regim staționar, stări numite de referință. Vibrațiile sunt mișcări alternative efectuate de sistemul mecanic în raport cu starea de referință. Acestea sunt provocate de forțe perturbatoare ale căror mărimi, direcții sau puncte de aplicații variază în timp.

Dependent de existența și natura forței perturbatoare, sistemele mecanice pot executa vibrații libere – fără forțe perturbatoare – sau vibrații forțate care sunt întreținute de o forță perturbatoare.

Mișcarea sistemului mecanic supus unor forțe exterioare este în mod obișnuit numită răspunsul sistemului.

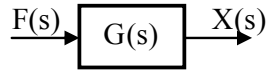


Fig. 6.18 Echivalarea sistemului și funcția de transfer a acestuia

Obținerea pe cale teoretică a răspunsului unui sistem mecanic real se realizează prin stabilirea modelului matematic care, prin intermediul unor ipoteze simplificatoare, aproximează sistemul fizic.

Un sistem mecanic vibrant are un singur grad de libertate dacă mișcarea sa se poate studia cu o singură funcție de timp, numită coordonata vibrației (mișcării).

Ecuția diferențială care descrie relația dintre mărimea de intrare în sistem – forța F – și mărimea de ieșire – deplasarea x – are forma:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + Kx = F \quad (6.87)$$

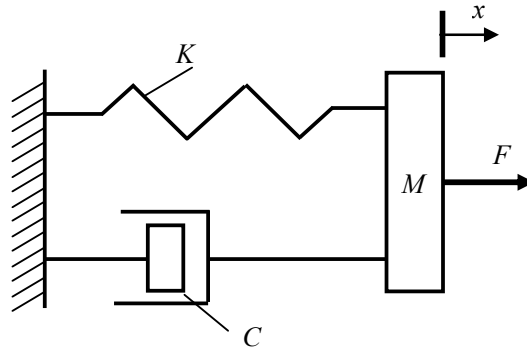


Fig. 6.19 Sistemul de ordinul doi masă – element elastic-element amortizor

a) Varianta 1

Dacă asupra sistemului vibrant nu acționează forțe perturbatoare, $F(t) = 0$, iar forțele de amortizare sunt neglijabile, vibrațiile sistemului sunt libere, neamortizate. Ele se mai numesc vibrații naturale sau proprii. Modelul mecanic al unui astfel de sistem conține doar masa m și elementul elastic K .

Legea vibrațiilor în acest caz este armonică și are forma:

$$x = A \sin \omega_n t \quad (6.88)$$

Calcul elementare asupra relației anterioare conduc succesiv la relațiile:

$$\frac{dx}{dt} = \omega_n A \cos \omega_n t \quad (6.89)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_n^2 A \sin \omega_n t = -\omega_n^2 x \quad (6.90)$$

sau

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_n^2 x = 0 \quad (6.91)$$

Ecuția diferențială care descrie modelul analizat este de forma:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \quad (6.92)$$

sau

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m} x = 0 \quad (6.93)$$

Din identificarea coeficienților pentru ecuațiile (6.91) și (6.93), se determină relația pentru pulsația proprie sau naturală a sistemului:

$$\omega_n^2 = \frac{K}{m} \quad (6.94)$$

Pulsația proprie depinde numai de caracteristicile m și K ale sistemului, fiind independentă de condițiile inițiale.

Perioada T_n și frecvența proprie f_n sunt determinate cu formulele:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = \frac{1}{f_n} \quad (6.95)$$

b) Varianta 2

Se reconsideră modelul mecanic al sistemului, cu prezența componentei de amortizare inclusă.

În acest caz, ecuația diferențială care descrie funcționarea sistemului este (6.87). Soluția ecuația diferențiale are de data aceasta o formă compusă dintr-un termen corespunzător corespunzător răspunsului tranzitoriu și un termen corespunzător mișcării forțate:

$$x = x_n + x_f \quad (6.96)$$

astfel că ecuația diferențială devine după substituție:

$$m \frac{d^2(x_n + x_f)}{dt^2} + C \frac{d(x_n + x_f)}{dt} + K(x_n + x_f) = F \quad (6.97)$$

sau corespunzător celor două regimuri:

$$m \frac{d^2x_n}{dt^2} + C \frac{dx_n}{dt} + Kx_n = 0 \quad (6.98)$$

$$m \frac{d^2 x_f}{dt^2} + C \frac{dx_f}{dt} + Kx_f = F \quad (6.99)$$

Soluția ecuației omogene (6.98) este de forma:

$$x_n = Ae^{st} \quad (6.100)$$

Pentru a obține această soluție, se scrie ecuația caracteristică și se determină rădăcinile acesteia:

$$ms^2 + Cs + K = 0 \quad (6.101)$$

$$s_{1,2} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4mK}}{2m} = -\frac{C}{2m} \pm \sqrt{\frac{K}{m} \cdot \left(\frac{C^2}{4mK}\right) - \frac{K}{m}} \quad (6.102)$$

Având în vedere că $\omega_n^2 = \frac{K}{m}$ și notând $\xi^2 = \frac{C^2}{4mK}$ (factorul de amortizare) rezultă o nouă formă a rădăcinilor ecuației:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (6.103)$$

sau

$$s_1 = -\xi\omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (6.104)$$

$$s_2 = -\xi\omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (6.105)$$

Soluția ecuației diferențiale (6.98) are forma:

$$x_n = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \quad (6.106)$$

unde constantele A și B se determină din condițiile inițiale.

Semnificația fizică a acestui rezultat depinde de valorile pe care le poate lua coeficientul de amortizare C, care determină în final natura rădăcinilor $s_{1,2}$.

Valoarea coeficientului de amortizare C care anulează discriminantul, din expresia rădăcinilor ecuației, este coeficientul de amortizare critic C_{cr} și este egal cu:

$$C_{cr} = 2\sqrt{mK} \quad (6.107)$$

Vom fi de considerat trei cazuri:

1) *Cazul 1* - $C > C_{cr}$ când rădăcinile $s_{1,2}$ sunt reale și distincte;

În acest caz, $\xi > 1$ și $\sqrt{\xi^2 - 1} < \xi$ astfel că ambele rădăcini sunt negative. Cei doi termeni exponențiali din relația (6.106) sunt descrescători. Se observă din analiza expresiei că, dacă constantele A și B sunt pozitive, expresia (6.106) scade și tinde spre zero când $t \rightarrow \infty$. Dacă constantele sunt negative, valoarea expresiei crește și tinde

spre zero. Dacă cele două constante sunt de semne contrare, expresia (6.106) se mai poate anula o singură dată și tinde spre zero. Se poate preciza astfel că, masa m se apropie încet de poziția de repaus iar *mișcarea este aperiodică*. În mod sugestiv, în sensul celor precizate anterior, în figura 6.20 se prezintă modul de variație a două exponențiale cu coeficient pozitiv și respectiv negativ. Se spune că sistemul este supra-amortizat.

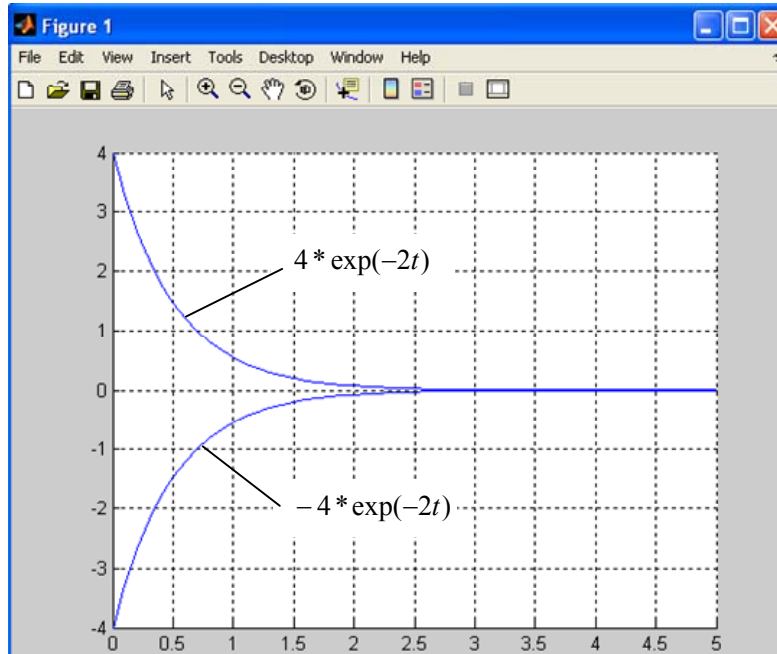


Fig. 6.20 Modul de variație a unei exponențiale cu coeficienți opuși

2) Cazul 2 - $C = C_{cr}$, când rădăcinile $s_{1,2}$ sunt reale și egale;

În acest caz rădăcinile ecuației (6.102) sunt egale:

$$s_1 = s_2 = \omega_n \quad (6.108)$$

iar soluția ecuației diferențiale are forma:

$$x_n = (At + B)e^{-\omega_n t} \quad (6.109)$$

Expresia (6.109) conține o exponențială de forma celor discutate în *cazul 1* și funcția $At \cdot e^{-\omega_n t}$ care tinde spre zero când $t \rightarrow \infty$. Reprezentarea unei funcții de acest tip este prezentată în figura 6.21. Mișcarea este aperiodică și masa m se apropie încet de poziția de repaus.

Se spune că sistemul este critic amortizat.

3) Cazul 3 - $C < C_{cr}$, când rădăcinile $s_{1,2}$ sunt complex conjugate.

În acest caz rădăcinile $s_{1,2}$ sunt complex conjugate și se exprimă sub forma:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad (6.110)$$

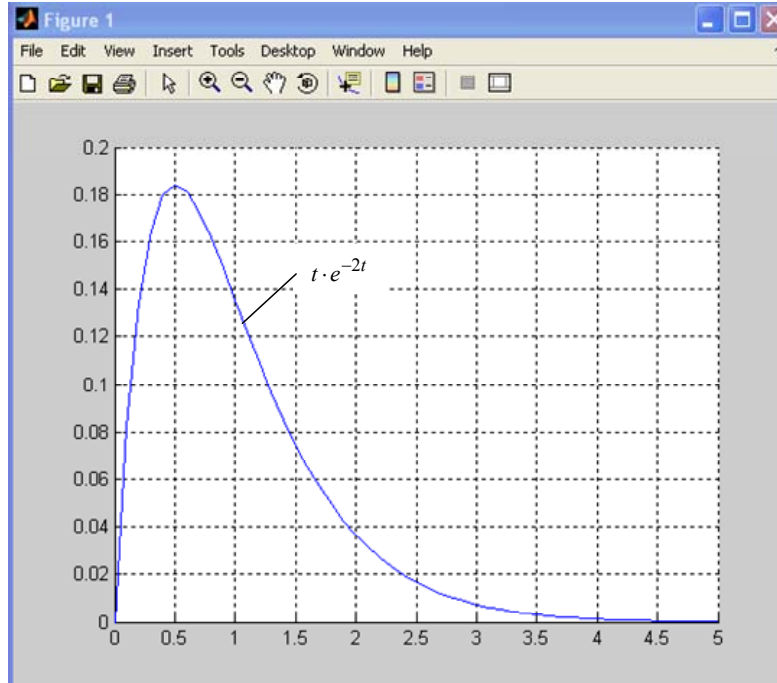


Fig. 6.21 Forma de variație a unei funcții $A \cdot t \cdot e^{-\omega_n t}$

Folosind notația – *pulsația naturală amortizată* :

$$\omega_a = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \quad (6.111)$$

rădăcinile anterioare se pot exprima sub forma:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_a \quad (6.112)$$

Soluția ecuației diferențiale în acest caz are forma:

$$x_n = Ae^{(-\xi\omega_n + j\omega_a)t} + Be^{(-\xi\omega_n - j\omega_a)t} = e^{-\xi\omega_n t} (Ae^{j\omega_a t} + Be^{-j\omega_a t}) \quad (6.113)$$

Utilizând relațiile lui Euler:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (6.114)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t \quad (6.115)$$

relația (6.113) se poate transforma și exprima sub forma:

$$x_n = e^{-\xi\omega_n t} (P \cos \omega_a t + Q \sin \omega_a t) \quad (6.116)$$

unde noile constante sunt definite sub forma: $P = A + B$ și $Q = j(A - B)$.

Pentru aceste condiții se spune că sistemul este slab amotizat.

Soluția pentru ecuația diferențială (6.99) se determină ca o soluție particulară a ecuației neomogene:

$$x_f = \frac{F}{K} \quad (6.117)$$

Soluția (6.117) se va aduna soluției x_n din fiecare caz analizat în parte, obținându-se soluția finală a ecuației diferențiale.

6.4.1.4. Exemplu de calcul

Două mase m_1 și m_2 se pot deplasa fără frecare pe o orizontală, fiind conectate printr-un element elastic cu constanta elastică K (fig.6.22). Se cere să se determine pulsația proprie a vibrațiilor relative din sistem.

Se aleg ca origini de măsurare a deplasărilor x_1 și x_2 pozițiile celor două mase când arcul este nedeformat. Sistemul are două grade de libertate. Mișcarea relativă a celor două mase se poate analiza pe baza unui singur parametru – deformația elementului elastic $x = x_1 - x_2$. În aceste condiții mișcarea are un singur grad de libertate.

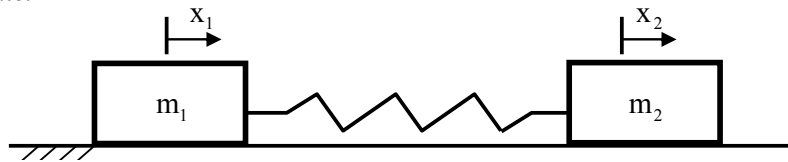


Fig. 6.22 Sistem mecanic din două mase conectate prin element elastic

Modelul matematic al sistemului este descris de ecuațiile:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + K \cdot (x_1 - x_2) = 0 \quad (6.118)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + K \cdot (x_2 - x_1) = 0 \quad (6.119)$$

Prin transformări succesive (înmulțire cu m_2 relația (6.118) și m_1 relația (6.119) și scăderea relațiilor obținute), se obține ecuația diferențială a sistemului:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + Kx = 0 \quad (6.120)$$

Din comparația relațiilor (6.87) și (6.120) se pot preciza următoarele:

- Sistemul analizat este un sistem de ordinul doi;
- Masa echivalentă a sistemului este $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$;

- Pulsația proprie a mișcării relative este $\omega_n = \sqrt{\frac{K(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$

6.4.1.5. Exemplu de calcul

Două discuri cu momentele de inerție J_1 și J_2 – față de axa de rotație - sunt montate pe un arbore cu lungimea L . Arborele are masa neglijabilă iar constanta de elasticitate torsională are valoare K (fig.6.23). Se cere să se determine pulsația proprie a sistemului.

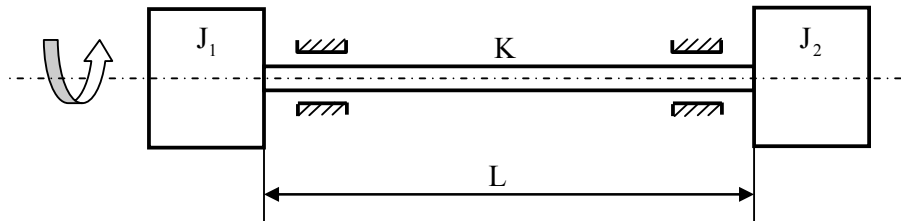


Fig. 6.23 Sistem mecanic în mișcare de rotație

Se aleg ca origini de măsurare a unghiurilor φ_1 și φ_2 pozițiile celor două mase când arcul este nedeformat. Sistemul are două grade de libertate. Mișcarea relativă a celor două mase se poate analiza pe baza unui singur parametru – deformația elementului elastic $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. În aceste condiții, mișcarea are un singur grad de libertate.

Modelul matematic al sistemului este descris de ecuațiile:

$$J_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + K \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (6.121)$$

$$J_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + K \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \quad (6.122)$$

Prin transformări succesive (înmulțire cu φ_2 relația (6.121) și φ_1 relația (6.122) și scăderea relațiilor obținute) se obține ecuația diferențială a sistemului:

$$\frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + K \varphi = 0 \quad (6.123)$$

Din comparația relațiilor (6.87) și (6.123) se pot preciza următoarele:

- sistemul analizat este un sistem de ordinul doi;
- momentul de inerție echivalent al sistemului este $\frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}$;
- pulsația proprie a mișcării relative este $\omega_n = \sqrt{\frac{K(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}}$.

6.4.2. Răspunsul sistemului la un impuls unitar

Fie ecuația diferențială ce caracterizează sistemul de ordinul doi:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{S \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2} \quad (6.124)$$

cu parametrii S , ω_n și ξ având semnificația menționată anterior.

Având în vedere că $U(s) = 1$, răspunsul sistemului la un impuls unitar (funcția pondere) se determină sub forma clasică:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2} \cdot 1\right\} \quad (6.125)$$

Analiza răspunsului sistemului depinde de natura rădăcinilor ecuației:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (6.126)$$

$$s_1 = \omega_n(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}), \quad s_2 = \omega_n(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \quad (6.127)$$

existând trei cazuri distincte (vezi și pct.6.4.1.3).

Cazul 1 – rădăcinile $s_{1,2}$ sunt reale și distincte în condiția $\xi > 1$;

Cazul 2 – rădăcinile $s_{1,2}$ sunt complex conjugate în condițiile $\xi < 1$

Cazul 3 – rădăcinile $s_{1,2}$ sunt reale și egale în condiția $\xi = 1$;

Cazul 1 - În acest caz cele două rădăcini sunt reale și distincte, s_1 și s_2 . În plus, având în vedere că $\xi > 1$ și că implicit $\sqrt{\xi^2 - 1} < 1$ rezultă că cele două rădăcini sunt negative.

Relația anterioară (6.125) devine:

$$y(t) = S\omega_n^2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}\right\} \quad (6.128)$$

Pe principiul clasic (descompunere în fracții simple, utilizarea tabelor), se poate determina răspunsul sistemului:

$$y(t) = S\omega_n^2 \left(\frac{1}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} - \frac{1}{s_1 - s_2} e^{s_2 t} \right) \quad (6.129)$$

Reprezentarea grafică a semnalului de ieșire $y(t)$ este dată în figura 6.24, pentru cazul când nici una din cele două rădăcini nu este nulă. În $t = 0$, răspunsul este nul. Există un maxim (și numai unul), iar apoi la $t \rightarrow \infty$ răspunsul tinde asimptotic la 0. Valoarea de maxim se determină din condiția anulării primei derivate:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \omega_n^2 \left(\frac{s_1}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} - \frac{s_2}{s_1 - s_2} e^{s_2 t} \right) = 0 \quad (6.130)$$

$$s_1 e^{s_1 t_{vf}} = s_2 e^{s_2 t_{vf}}$$

$$t_{vf} = -\ln \frac{s_1 / s_2}{s_1 - s_2} \quad (6.131)$$

Un astfel de sistem poate fi înlocuit cu două sisteme de ordinul unu conectate în serie.

Reprezentarea din figura 6.24 s-a considerat pentru cazul ($S=1, s_1=-1, s_2=-2$). Coordonata timp pentru atingerea valorii maxime se calculează pe baza relației (6.131) și este $t_{vf} = \ln 2 = 0.69$.

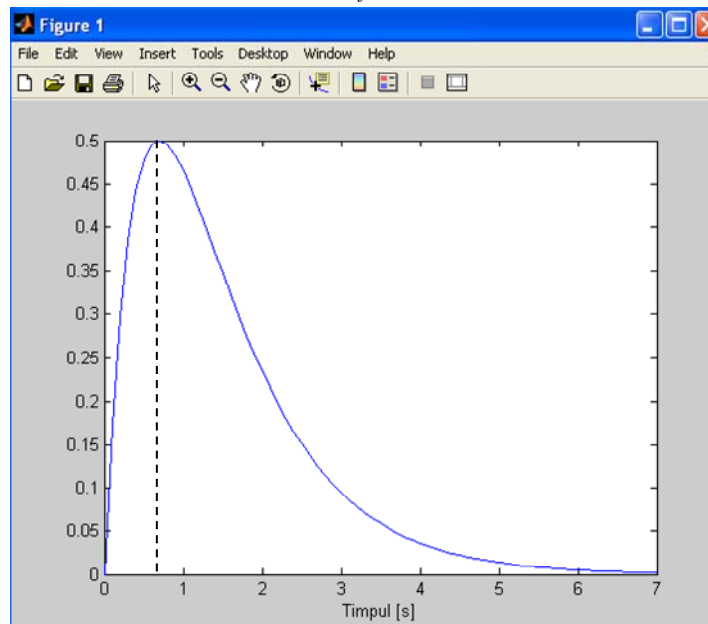


Fig. 6.24 Răspunsul sistemului de ordinul doi

Cazul 2 - cazul a două rădăcini complexe (factor de amortizare $\xi < 1$)

Utilizând tabela transformărilor Laplace (Anexa 8/cap.12) se poate determina răspunsul sistemului de ordinul doi, la un semnal impular, ca fiind de forma:

$$y(t) = A e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \phi) \quad (6.132)$$

unde constanta A și faza ϕ se determină din condițiile inițiale:

- La momentul $t = 0$ există $y(0) = A \sin \phi = 0$ astfel că se determină faza $\phi = 0$;
- Pentru determinarea constantei A examinăm derivata expresiei semnalului în momentul $t = 0$. Astfel se poate determina:

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0+} = A \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \quad (6.133)$$

În plus, aplicarea impulsului unitar nu trebuie să modifice valoarea semnalului răspuns derivativ în momentul imediat aplicării impulsului:

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0+} - \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0-} = S\omega_n^2 \quad (6.134)$$

Rezultă astfel că:

$$A\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = S\omega_n^2 \quad (6.135)$$

sau

$$A = \frac{S\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (6.136)$$

Răspunsul sistemului în acest caz este descris de funcția:

$$y(t) = \frac{S\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \cdot \sin(\omega_n(\sqrt{1-\xi^2})t) \quad (6.137)$$

Orientativ, se prezintă în figura 6.25 răspunsurile unui sistem de ordinul 2 în condițiile $\xi < 1$. S-au utilizat valorile de definire a sistemului $S=1$, $\omega_n=1$, $\xi_1=0.15$, $\xi_2=0.45$, $\xi_3=0.75$.

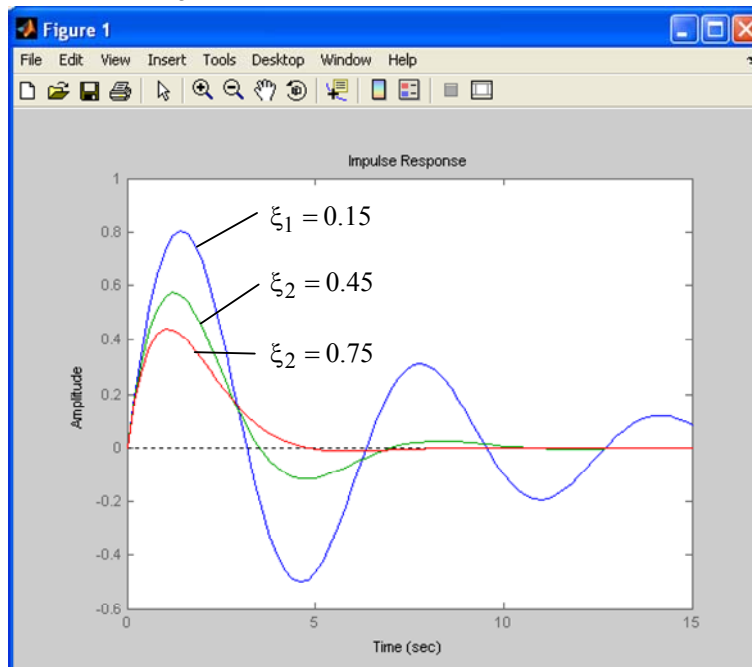


Fig. 6.25 Răspunsul sistemului de ordinul doi la semnal impuls unitar

Cazul 3 - rădăcinile $s_{1,2}$ sunt reale și egale în condiția $\xi = 1$.

În acest caz răspunsul sistemului la un impuls unitar este:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \cdot 1\right\} = S \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}\right\} = \\
 &= S\omega_n \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \omega_n}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s + \omega_n)^2}\right\} \right] = S\omega_n^2 t e^{-\omega_n t}
 \end{aligned} \quad (6.138)$$

În mod comparativ se prezintă răspunsul sistemului la un impuls unitar în variantele $\xi = 0.15$ și respectiv $\xi = 1$. Se observă că în cazul analizat ($\xi = 1$) răspunsul sistemului atinge un maxim după care tinde la zero.

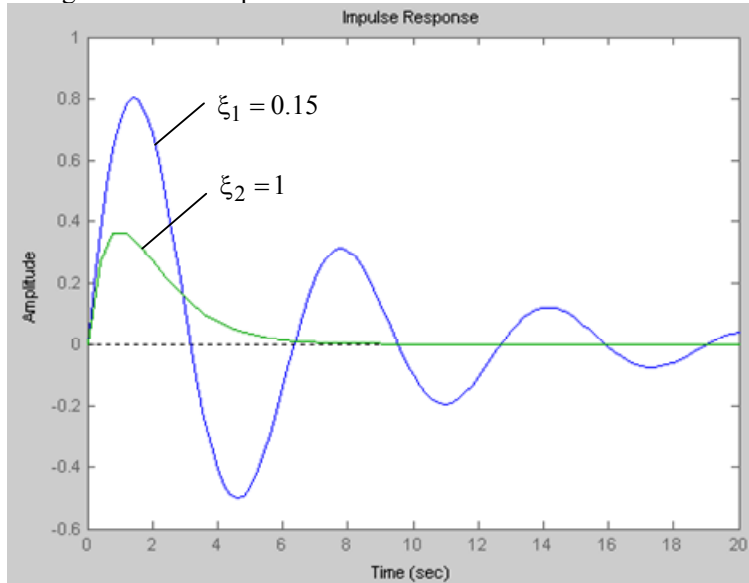


Fig. 6.26 Răspunsul sistemului la un impuls unitar ($\xi_1 = 0.15$ și $\xi_2 = 1$)

6.4.3. Răspunsul sistemului la un semnal treaptă unitară

Pentru analiza comportamentului sistemului de ordinul doi la un semnal de tip treaptă, se poate utiliza și o formă transformată a funcției de transfer (6.81):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{S\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2} = \frac{S\omega_n^2}{(s + \sigma)^2 + \omega_a^2} \quad (6.139)$$

unde $\sigma = \xi\omega_n$ este un factor de lucru și $\omega_a^2 = \omega_n^2 - \sigma^2 = \omega_n^2(1 - \xi^2)$ sau:

$$\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (6.140)$$

este pulsația amortizată a sistemului.

Răspunsul sistemului este în acest caz:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S\omega_n^2}{(s+\sigma)^2 + \omega_a^2} \cdot \frac{1}{s}\right\} \quad (6.141)$$

unde $U(s) = 1/s$ este funcția de transfer a semnalului treaptă unitară.

Relația anterioară se poate transforma prin descompunere în fracții simple:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S\omega_n^2}{(s+\sigma)^2 + \omega_a^2} \cdot \frac{1}{s}\right\} = S \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{s+2\sigma}{(s+\sigma)^2 + \omega_a^2}\right\} = \\ &= S \cdot \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2 + \omega_a^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sigma}{(s+\sigma)^2 + \omega_a^2}\right\}\right] \end{aligned} \quad (6.142)$$

Utilizând tabela pentru corespondența dintre transformata Laplace și funcția de timp, se obține pentru fiecare termen în parte din relația (6.142):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} &\rightarrow y_1(t) = 1 \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2 + \omega_a^2}\right\} &\rightarrow y_2(t) = e^{-\sigma t} \cdot \cos \omega_a t \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sigma}{(s+\sigma)^2 + \omega_a^2}\right\} &\rightarrow y_3(t) = e^{-\sigma t} \cdot \frac{\sigma}{\omega_a} \sin \omega_a t \end{aligned} \quad (6.143)$$

Răspunsul sistemului poate fi scris în acest caz:

$$y(t) = S \cdot \left(1 - e^{-\sigma t} \left(\cos \omega_a t + \frac{\sigma}{\omega_a} \sin \omega_a t\right)\right) \quad (6.144)$$

O abordare diferită a acestei analize poate să urmeze modul de abordare prezentat la pct. 6.4.1.3. Răspunsul sistemului (rel.6.81) se poate scrie sub forma:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{S\omega_n^2}{s \cdot (s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2)} \quad (6.145)$$

sau

$$Y(s) = \frac{S\omega_n^2}{s(s+s_1)(s+s_2)} \quad (6.146)$$

unde $s_{1,2}$ sunt rădăcinile formei pătratice din numitorul relației (6.145):

$$s_1 = -\xi\omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (6.147)$$

$$s_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (6.148)$$

Natura rădăcinilor, datorată valorilor coeficientului de amortizare ξ permite o analiză pertinentă a comportamentului sistemului.

- a) *Cazul 1* - $\xi > 1$. Descompunând expresia (6.146) în fracții simple și utilizând tabela de corespondență a transformatelor Laplace se poate obține răspunsul sistemului în domeniul timp:

$$\begin{aligned} y(t) &= S \cdot \left[1 - \frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1} \cdot \left(\frac{1}{s_1} \cdot e^{-s_1 t} - \frac{1}{s_2} \cdot e^{-s_2 t} \right) \right] = \\ &= S \cdot \left[1 - \frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1} \cdot \left(\tau_1 \cdot e^{-t/\tau_1} - \tau_2 \cdot e^{-t/\tau_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.149)$$

unde $\tau_1 = 1/s_1$ și $\tau_2 = 1/s_2$ sunt constante de timp ale sistemului.

Se spune că sistemul este supra-amortizat.

- b) *Cazul 2* - $\xi = 1$. În acest caz $s_1 = s_2 = -\omega_n$ și relația (6.146) se transformă în:

$$Y(s) = \frac{S\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} = S \cdot \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} \right] \quad (6.150)$$

Astfel, răspunsul în domeniul timp se exprimă sub forma:

$$y(t) = S(1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}) \quad (6.151)$$

Sistemul este critic amortizat.

- c) *Cazul 3* - $\xi < 1$. În acest caz rădăcinile $s_{1,2}$ sunt complex conjugate și au expresiile:

$$s_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \quad (6.152)$$

$$s_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \quad (6.153)$$

Descompunând în fracții simple (6.146) și aplicând transformata Laplace inversă se poate obține răspunsul în domeniul timp:

$$y(t) = S \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \sin(\omega_n(\sqrt{1 - \xi^2})t + \varphi) \right] \quad (6.154)$$

unde $\varphi = \arccos(\xi)$.

În acest caz sistemul de ordinul doi este sub-amortizat.

În figura 6.27 se prezintă răspunsul sistemului de ordinul doi utilizând drept

parametru de lucru factorul de amortizare ξ .

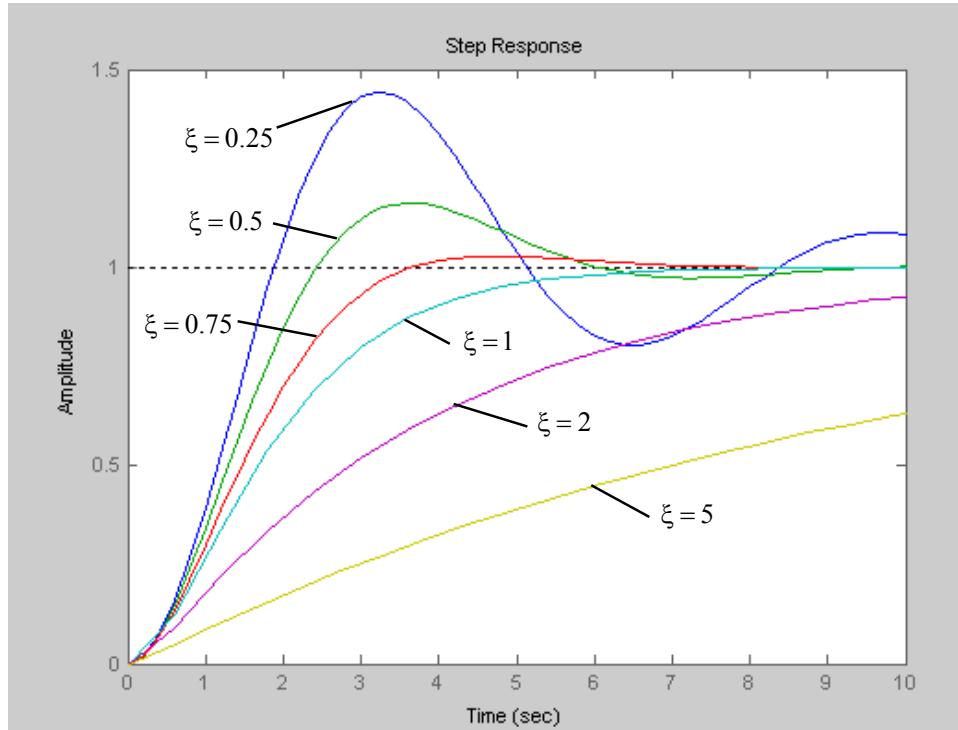


Fig. 6.27 Răspunsul sistemului de ordinul doi pentru diferite valori ale amortizării

6.4.3.1. Exemplu de calcul

Se consideră sistemul mecanic din figura 6.28 compus din roata dințată 1 și cremaliera 2. Asupra sistemului acționează forța exterioară F . Se consideră cunoscute următoarele date numerice: masa cremalierii și a elementelor conexe $m = 2 \text{ kg}$; momentul de inerție a roții dințate 1, $J = 0.01 \text{ kgm}^2$; constanta de elasticitate a conexiunii cremalieră – elemente conexe, $K = 27 \text{ N/m}$; constanta de amortizare $C = 7.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}$; raza cercului de divizare a roții dințate, $R = 0.1 \text{ m}$. Se cere să se determine:

- parametrii sistemului de ordinul doi reprezentat;
- răspunsul sistemului $x(t)$ la un semnal de tip treaptă $F = 6 \text{ N}$;
- valoarea de regim stabilizat x_s ;

Modelul matematic al sistemului analizat se poate obține prin diverse metode. Amintim dintre acestea doar două:

- 1) Izolând cele două corpuri care formează sistemul, scriind ecuația de mișcare pentru fiecare element și prelucrând ecuațiile rezultate;

- 2) Utilizând metoda energiei sistemului și considerând mișcarea redusă la cremalieră.

Considerând că frecările în cupla cinematică de rotație sunt neglijabile, că angrenarea este fără jocuri, că nu există deformații elastice și amortizare în angrenare, că momentul rezistent la arborele roții este neglijabil, se obține ecuația diferențială care descrie modelul sistemului:

$$\left(m + \frac{J}{R^2}\right) \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + C \cdot \frac{dx}{dt} + K \cdot x = F(t) \quad (6.155)$$

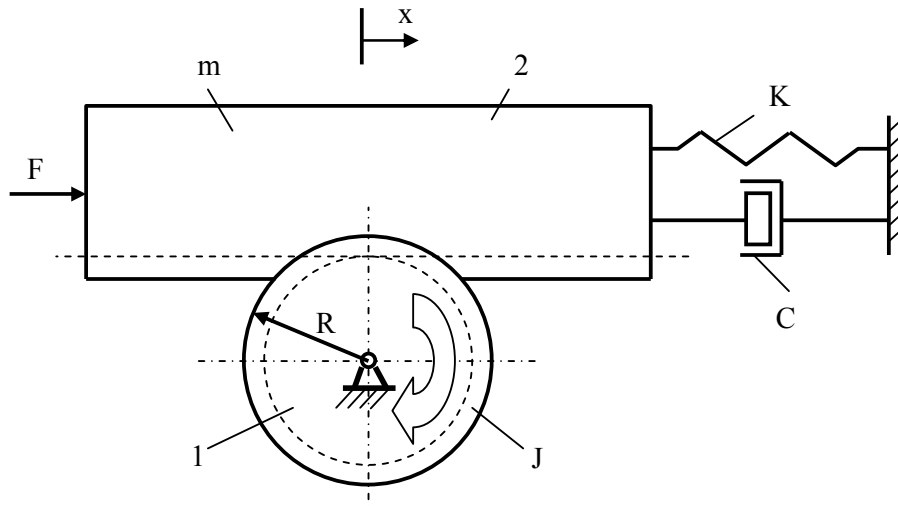


Fig. 6.28 Sistem mecanic de ordinul doi

- a) Analizând ecuația (6.155) se pot preciza următoarele:
- Sistemul analizat și descris prin ecuația (6.155) este un sistem de ordinul 2;
 - Masa echivalentă, redusă la cremalieră este:

$$m_{ech} = m + \frac{J}{R^2} = 2 + \frac{10^{-2}}{0.1^2} = 2 + 1 = 3 \text{ kg} \quad (6.156)$$

- Pulsația de rezonanță a sistemului este:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m_{ech}}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (6.157)$$

- Coeficientul de amortizare:

$$\xi = \frac{C}{2\sqrt{Km_{ech}}} = \frac{7.5}{2\sqrt{27 \cdot 3}} = \frac{7.5}{2 \cdot 9} = 0.416 \quad (6.158)$$

Rezultă că sistemul este sub-amortizat.

- Pulsația amortizată va fi:

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 3 \cdot \sqrt{1 - 0.416^2} = 3 \cdot 0.9 = 2.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (6.159)$$

Relația anterioară permite calculul frecvenței și a perioadei răspunsului sistemului:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2.7}{2 \cdot 3.14} = 0.43 \text{ Hz} \quad (6.160)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.43} = 3.33 \text{ [s]} \quad (6.161)$$

- b) pentru a determina răspunsul sistemului la un semnal de tip treaptă, se determină funcția de transfer a sistemului:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{m_{ech}s^2 + Cs + K} = \frac{1}{3s^2 + 7.5s + 27} \quad (6.162)$$

Funcția de transfer a mărimii de intrare este $F(s) = 6 \cdot \frac{1}{s}$. În aceste condiții semnalul răspuns:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3s^2 + 7.5s + 27} \cdot \frac{6}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2 + 2.5s + 9)}\right\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{9} \cdot \frac{2s + 5}{s^2 + 2.5s + 9}\right\} = \frac{2}{9} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{9} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s + 5}{s^2 + 2.5s + 9}\right\} \end{aligned} \quad (6.163)$$

$$x_1(t) = \frac{2}{9} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{2}{9} \quad (6.164)$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{9} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s + 5}{(s + 1.25)^2 + (2.7271)^2}\right\} = \frac{2}{9} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + 1.25}{(s + 1.25)^2 + (2.7271)^2}\right\} + \\ &+ \frac{2}{9} \cdot 0.4583 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2.7271}{(s + 1.25)^2 + (2.7271)^2}\right\} = \frac{2}{9} e^{-1.25t} \cdot \cos 1.25t + \\ &+ \frac{2}{9} \cdot 0.4583 \cdot \sin 1.25t = \frac{2}{9} \cdot e^{-1.25t} \cdot (\cos 1.25t + 0.4583 \cdot \sin 1.25t) = \\ &= \frac{2}{9} \cdot e^{-1.25t} \cdot \cos(1.25t - 24.622^\circ) = \frac{2}{9} e^{-1.25t} \cdot \sin(1.25t + 65.378^\circ) \end{aligned} \quad (6.165)$$

Expresiile (6.164) și (6.165) redau răspunsul sistemului de ordinul doi identic cu cel dat de expresia (6.154).

Răspunsul sistemului se poate obține și apelând la mediul Matlab (fig.6.29).

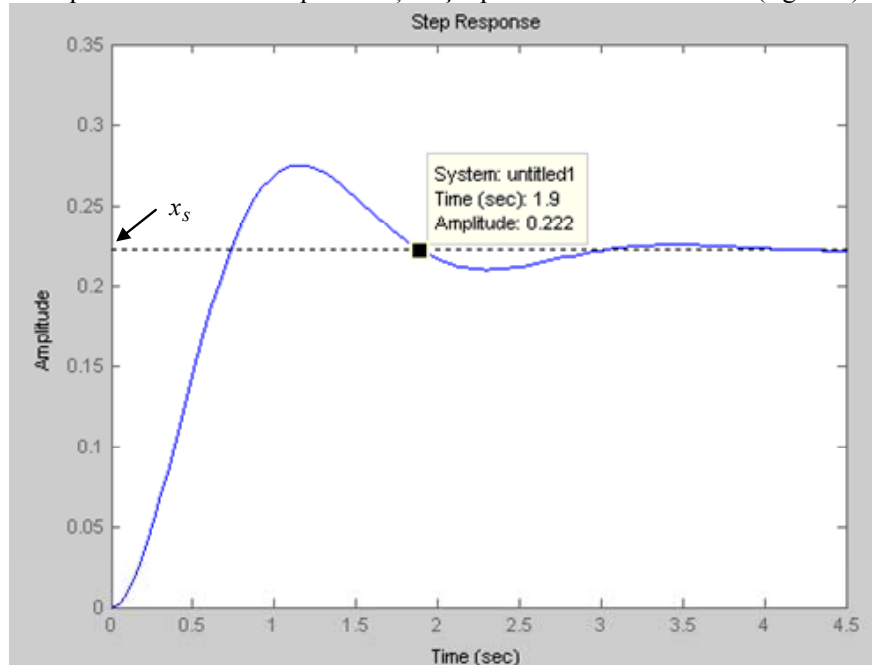


Fig. 6.29 Răspunsul sistemului de ordinul doi

- c) Valoarea de regim stabilizat se poate determina din expresia răspunsului sistemului pentru $t \rightarrow \infty$ (fig.6.29). Se determină astfel $x_s = \frac{2}{9} [mm]$

6.4.4. Răspunsul sistemului la un semnal rampă unitară

6.4.4.1. Generalități

Pentru o mărime de intrare de tip rampă:

$$u(t) = at \quad (6.166)$$

funcția de transfer este:

$$U(s) = \frac{a}{s^2} \quad (6.167)$$

Considerând funcția de transfer a sistemului scrisă sub forma:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} \quad (6.168)$$

se poate determina răspunsul sistemului de ordinul doi pentru mărimea de intrare dată, sub forma clasică:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} \cdot \frac{a}{s^2}\right\} = \\
 &= -2\xi a T \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + a \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2\xi a T^3 s + a T^2 \cdot (1 - 4\xi^2)}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}\right\} \quad (6.169)
 \end{aligned}$$

Primele două transformări inverse Laplace sunt clasice. Pentru ultimul termen al expresiei (6.169), după transformări succesive, se apelează la tabela transformată Laplace – funcție de timp (Anexa 8/cap.12):

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\beta}{(s + \alpha)^2 - \beta^2}\right\} = e^{-\alpha t} \cdot sh(\beta t) \quad (6.170)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 - \beta^2}\right\} = e^{-\alpha t} \cdot ch(\beta t) \quad (6.171)$$

În final, se obține răspunsul sistemului de forma:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= -2a\xi T + at - aT \cdot (1 - 2\xi^2) \cdot e^{-\frac{\xi}{T}t} \frac{sh\left(\frac{1}{T}\sqrt{-1 + \xi^2}t\right)}{\sqrt{-1 + \xi^2}} + \\
 &+ 2aT\xi e^{-\frac{\xi}{T}t} ch\left(\frac{1}{T}\sqrt{-1 + \xi^2}t\right) \quad (6.172)
 \end{aligned}$$

Fișierul *.m pentru reprezentarea răspunsului sistemului de ordinul doi la un semnal rampă este prezentat în figura 6.30 iar răspunsul în figura 6.31.

```

%Răspunsul sistemului de ordinul doi
%Semnal rampa unitara
num=[1];
den=[1 2 1];
den1=[1 .1 1];
den2=[1 6 1];
r=t;
t=0:0.1:10;
y=lsim(num,den,r,t)
y1=lsim(num,den1,r,t)
y2=lsim(num,den2,r,t)
grid on
hold on
plot (t,r,t,y,t,y1,t,y2)
title('Răspus-rampa unitara')
xlabel('Timp [s]')
ylabel('Amplitudine')

```

Fig. 6.30 Fișierul *.m pentru răspunsul sistemului la un semnal rampă

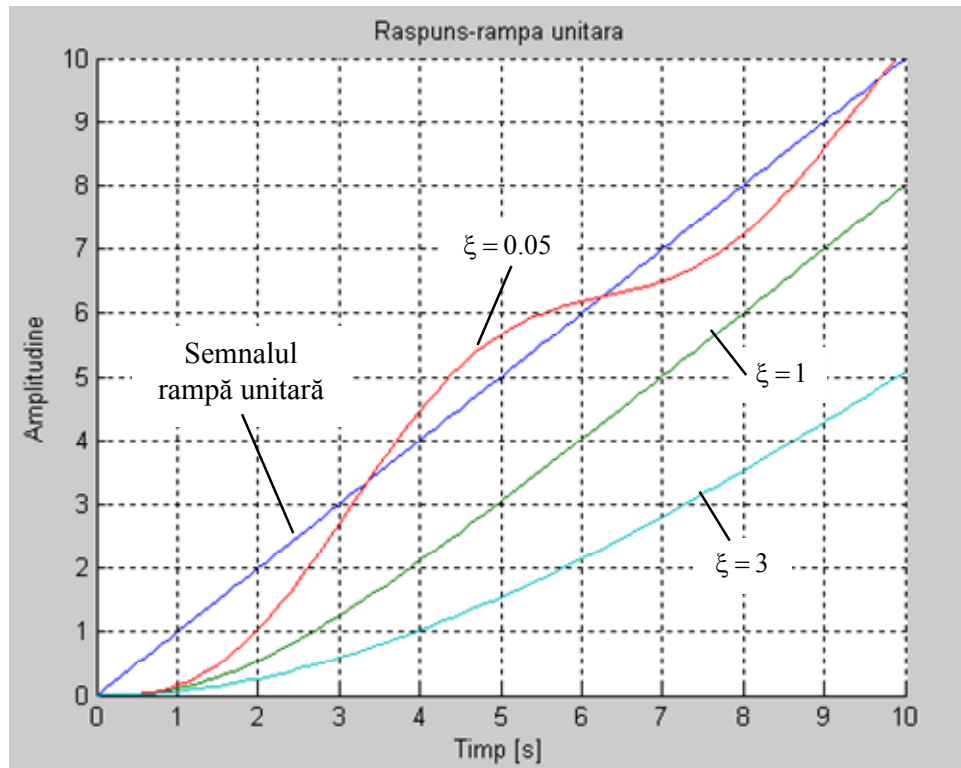


Fig. 6.31 Răspunsul sistemului de ordinul doi la semnal rampă

6.4.4.2. Exemplu de calcul

Se reconsideră sistemul prezentat în figura 6.32. Masa $m = 40$ kg este în contact cu un plan orizontal iar frecarea este vâscoasă și caracterizată de un coeficient $c = 20 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$. Sistemul se găsește sub acțiunea unei forțe $F = 20t$ aplicabilă pe durata de 10 secunde. Se cere să se determine răspunsul sistemului la un astfel de semnal de intrare.

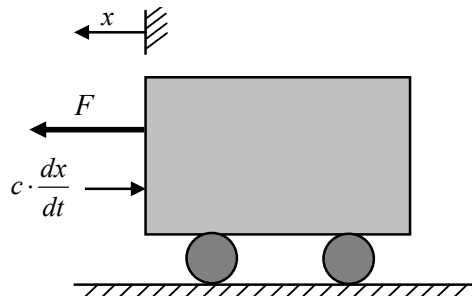


Fig. 6.32 Sistem mobil în mișcare de translație

Modelul matematic al sistemului este descris de ecuația:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} = F \quad (6.173)$$

Funcția de transfer a ecuației diferențiale anterioare este:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 m + cs} \quad (6.174)$$

Având în vedere că funcția de transfer a mărimii de intrare este:

$$F(s) = \frac{20}{s^2} \quad (6.175)$$

se obține răspunsul sistemului sub forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s)F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(sm+c)} \cdot \frac{20}{s^2}\right\} = 20 \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{m}{c^2} \cdot \frac{1}{s}\right\} + \\ &+ 20 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{c} \cdot \frac{1}{s^2}\right\} + 20 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{m}{c^2} \cdot \frac{1}{s+\frac{c}{m}}\right\} = 20 \cdot \frac{m}{c^2} \cdot \left(-1 + e^{-\frac{c}{m}t}\right) + \\ &+ 20 \cdot \frac{1}{c} \cdot t \end{aligned} \quad (6.176)$$

Forma grafică a acestui răspuns este prezentată în figura 6.33.

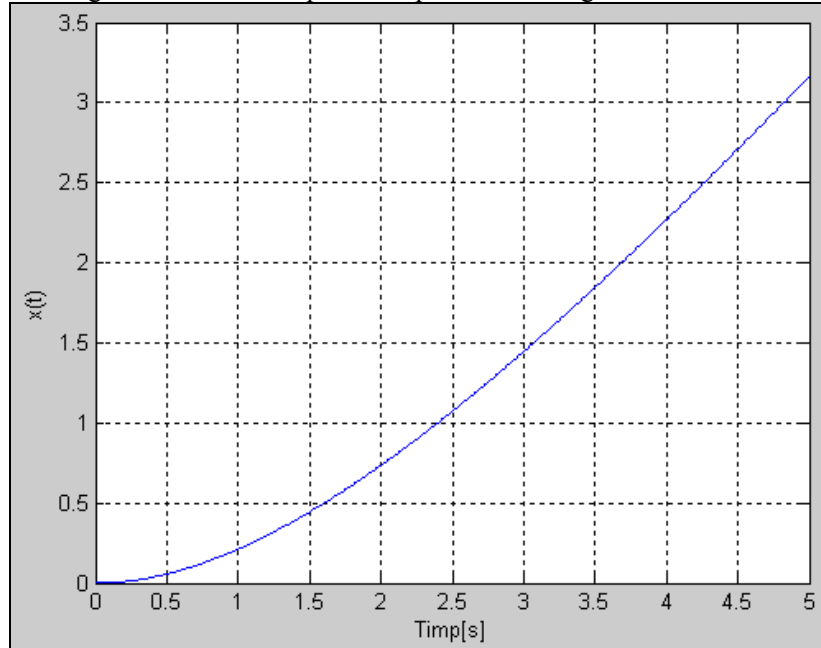


Fig. 6.33 Răspunsul sistemului

6.4.5. Performanțele și parametrul sistemului de ordinul doi

6.4.5.1. Introducere

Calitatea sistemelor automate se evaluează în primul rând din punctul de vedere al stabilității sistemelor, precum și al altor indici de calitate, cum ar fi: suprareglarea, timpul de răspuns, gradul de amortizare, perioada proprie, eroarea staționară. Calitatea se evaluează atât pentru regimul permanent, cât și pentru cel tranzitoriu.

Sistemele de ordinul doi, prin folosirea lor extinsă, impun o analiză atentă a parametrilor care definesc în final performanțele acestora.

6.4.5.2. Parametrii sistemului de ordinul doi

Răspunsul unui sistem de ordinul doi subamortizat, la un semnal de tip treaptă unitară este descris de expresia:

$$y(t) = S \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin(\omega_n(\sqrt{1-\xi^2})t + \varphi) \right] \quad (6.177)$$

În figura 6.34 este prezentată forma clasică a răspunsului sistemului de ordinul doi subamortizat pentru un semnal treaptă unitară.

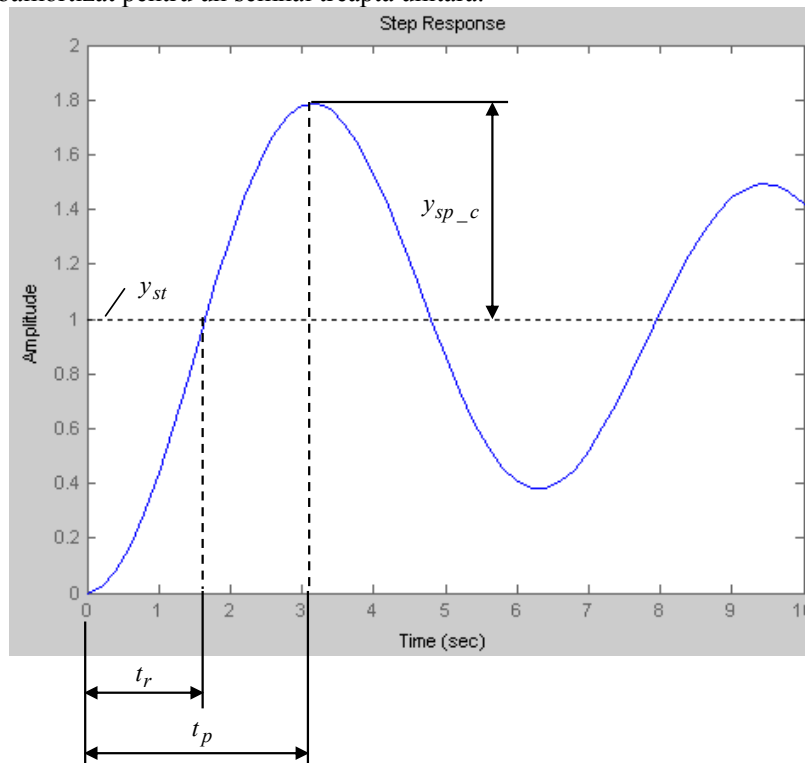


Fig. 6.34 Răspunsul unui sistem de ordinul doi și parametrul sistemului

În conexiune cu notațiile din figura 6.34 se pot defini următorii parametri:

- *timpul de creștere (rise time) t_r* - timpul necesar semnalului răspuns pentru a crește de la valoarea 0 până la valoarea de regim stabilizat y_{st} . Este dificil de a stabili o expresie analitică exactă a acestui parametru. Se consideră că acest timp corespunde realizării semnalului răspuns a unui sfert din ciclu. Astfel

$$\omega t_r = \frac{1}{2} \pi \quad (6.178)$$

Din relația anterioară, rezultă că se poate reduce acest timp prin creșterea pulsației naturale amortizate:

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (6.179)$$

Pe baza celor două relații anterioare, se poate determina o expresie pentru timpul de creștere:

$$t_r = \frac{\pi}{2\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (6.180)$$

Adeseori acest parametru se mai definește și ca durata de timp necesară semnalului răspuns pentru a crește de la 0.1 la 0.9 din valoarea de regim stabilizat (fig.6.35).

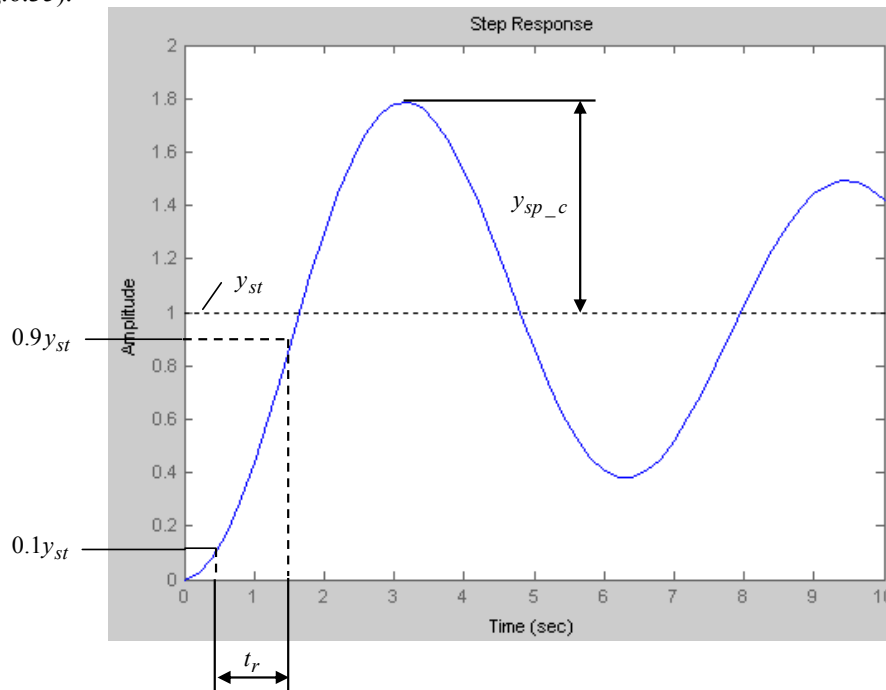


Fig. 6.35 O nouă definiție a timpului de creștere

- *timpul de suprareglare (peak time) - t_p* (fig.6.34) se definește ca timpul necesar semnalului răspuns pentru a crește de la valoare 0 la prima valoare maximă. Se poate arăta că această corespunde realizării a jumătate din ciclul de oscilație. Astfel:

$$\omega t_p = \pi \quad (6.181)$$

Având în vedere și relația (6.179), se poate obține:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (6.182)$$

- *valoarea maximă – de supracreștere (overshoot) - y_{sp_c}* (fig.6.34). Această valoare se atinge pentru momentul de timp corespunzător lui t_p . Valoarea de regim stabilizat se atinge pentru $t \rightarrow \infty$ și este egală valoric cu $y_{st} = S$ (vezi rel.6.17). În plus relația (6.17) permite să se determine, din condiția $y = 0$ pentru $t = 0$, valoarea $\sin \varphi = \sqrt{1-\xi^2}$.

$$\begin{aligned} y_{sp_c} = y(t_p) - y_{st} &= S \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t_p}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin(\omega_n (\sqrt{1-\xi^2}) t_p + \varphi) \right] - S = \\ &= S \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t_p}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin(\pi + \varphi) - 1 \right] = S \cdot e^{-\xi \omega_n t_p} = S \cdot e^{-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \end{aligned} \quad (6.183)$$

Adeseori se utilizează acest parametru sub forma procentuală prin raportarea sa la valoarea de regim stabilizat:

$$y_{sp_c} \% = \frac{y_{sp_c}}{S} * 100 = e^{-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (6.184)$$

În tabelul 6.2 sunt prezentate procentual valorile supracreșterii pentru câteva valori particulare ale coeficientului de amortizare.

Tabelul 6.2

ξ	0.2	0.4	0.6	0.8
$y_{sp_c} \%$	52.7 %	25.4 %	9.5 %	1.5 %

Sistemele de reglare automată sunt caracterizate de un proces tranzitoriu care poate fi provocat de variația mărimii de intrare sau de variația mărimii perturbatoare. În

acest al doilea mod de abordare, se poate vorbi și despre o supracreștere (suprareglare) ca fiind abaterea tranzitorie maximă de la valoarea staționară inițială, în cazul unei perturbații în treaptă [6.1].

- *raportul de amortizare* – reprezintă raportul dintre amplitudinea primelor două oscilații de același semn (fig.6.36):

$$r_a = \frac{y_{sp_c(3)}}{y_{sp_c(1)}} = \frac{S \cdot \exp\left(\frac{-3\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}{S \cdot \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} = \exp\left(\frac{-2\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \quad (6.185)$$

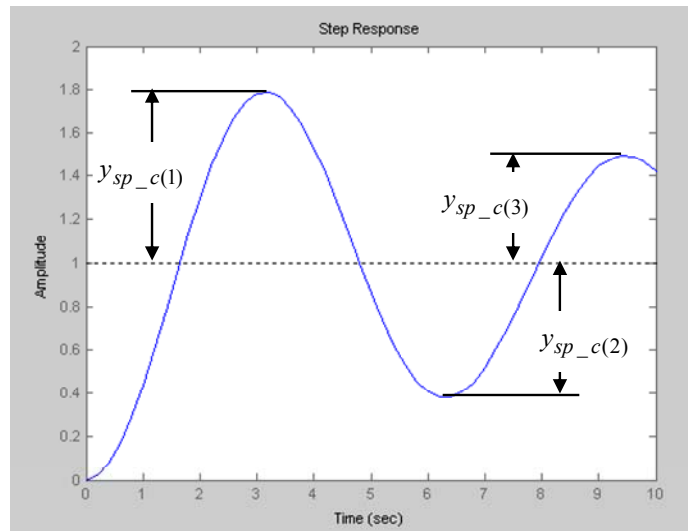


Fig. 6.36 Amplitudinile oscilațiilor succesive

- *Durata regimului tranzitoriu (settling time)* – reprezintă intervalul de timp în care componenta tranzitorie a răspunsului sistemului rămâne între limitele $\pm \Delta \%$ din valoarea staționară a mărimii de ieșire. Limitele sunt impuse practic de exigențele dorite pentru sistemul analizat (2 % ...5 %) (fig.6.37).

Se poate arăta, pornind de la relația (6.179) și aproximând $\ln 0.02 \approx -4$, că durata regimului tranzitoriu este egală cu:

- a) pentru o limită $\pm \Delta = \pm 2\%$:

$$t_t = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad (6.186)$$

- b) pentru o limită $\pm \Delta = \pm 5\%$

$$t_t = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad (6.187)$$

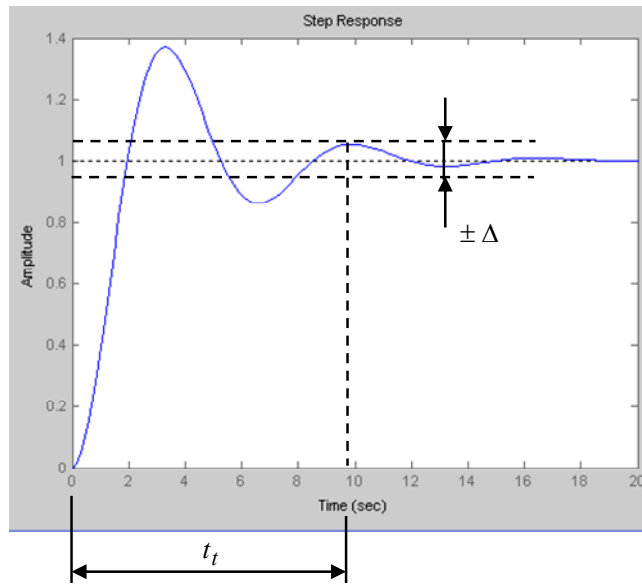


Fig. 6.37 Durata regimului tranzitoriu

- Numărul de oscilații pentru durata regimului tranzitoriu. Numărul de oscilații este dependent de limitarea impusă $\pm \Delta \%$.

Având în vedere că durata unui ciclu complet de oscilații este $t = 2\pi/\omega$, se poate determina numărul de oscilații ca fiind:

a) pentru $\pm \Delta = 2\%$

$$N_{osc} = \frac{t_t}{t} = \frac{4/\xi\omega_n}{2\pi/\omega} = \frac{2\omega}{\pi\xi\omega_n} = \frac{2\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{\pi\xi\omega_n} = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{\xi^2}-1} \quad (6.188)$$

b) pentru $\pm \Delta = 5\%$

$$N_{osc} = \frac{t_t}{t} = \frac{3/\xi\omega_n}{2\pi/\omega} = \frac{1.5\omega}{\pi\xi\omega_n} = \frac{1.5\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{\pi\xi\omega_n} = \frac{1.5}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{\xi^2}-1} \quad (6.189)$$

6.4.5.3. Exemplu de calcul

Un sistem cu reacție negativă unitară este prezentat în figura 6.38. Să se analizeze efectul modificării coeficientului K asupra performanțelor sistemului.

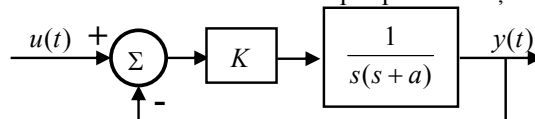


Fig. 6.38 Exemplu de calcul

Pe baza algebrei schemelor bloc, se poate determina funcția de transfer echivalentă pentru sistemul analizat:

$$G(s) = \frac{K \cdot \frac{1}{s \cdot (s+a)}}{1 + K \cdot \frac{1}{s \cdot (s+a)}} = \frac{K}{s^2 + sa + K} \quad (6.190)$$

Din analiza funcției de transfer obținute, se pot specifica următoarele:

- funcția de transfer este caracteristică sistemelor de ordinul doi;
- pulsația de rezonanță este $\omega_n = \sqrt{K}$. Creșterea valorică a coeficientului conduce la creșterea frecvență de rezonanță și respectiv scăderea coeficientului reduce nivelul frecvenței de rezonanță;
- coeficientul de amortizare are valoarea $\xi = \frac{a}{2\sqrt{K}}$. Creșterea coeficientului K reduce valoarea coeficientului de amortizare și invers;
- valoarea timpului de creștere va fi (rel. 6.180):

$$t_r = \frac{\pi}{2\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{K} \sqrt{1-\left(\frac{a}{2\sqrt{K}}\right)^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{4K-a^2}} \quad (6.191)$$

Timpul de creștere scade odată cu creșterea coeficientului K , ceea ce înseamnă o creștere a vitezei de răspuns a sistemului. Existența unei valori reale pentru timpul de creștere impune să existe inegalitatea $K > a/2$.

- valoarea de supracreștere (rel. 6.184) se poate exprima sub forma:

$$y_{sp_c} \% = \frac{y_{sp_c}}{S} \cdot 100 = e^{-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{-\frac{\pi a}{\sqrt{4K-a^2}}} \quad (6.192)$$

Creșterea amplificării conduce la creșterea procentuală a supracreșterii.

- durata regimului tranzitoriu nu depinde de amplificare:

$$t_t = \frac{4}{\xi \omega_n} = \frac{8}{a} \quad (6.193)$$

6.4.5.4. Concluzii

Pentru proiectarea unui sistem de ordinul doi performant, este necesar să se aibă în vedere următoarele:

- a) pentru a obține un răspuns rapid (timp de creștere redus) trebuie ca frecvența naturală a sistemului să fie cât mai ridicată. În figura 6.39 se prezintă comparativ răspunsurile unui sistem la un semnal treaptă unitară pentru același coeficient de amortizare $\xi = 0.25$, dar la pulsații naturale diferite.

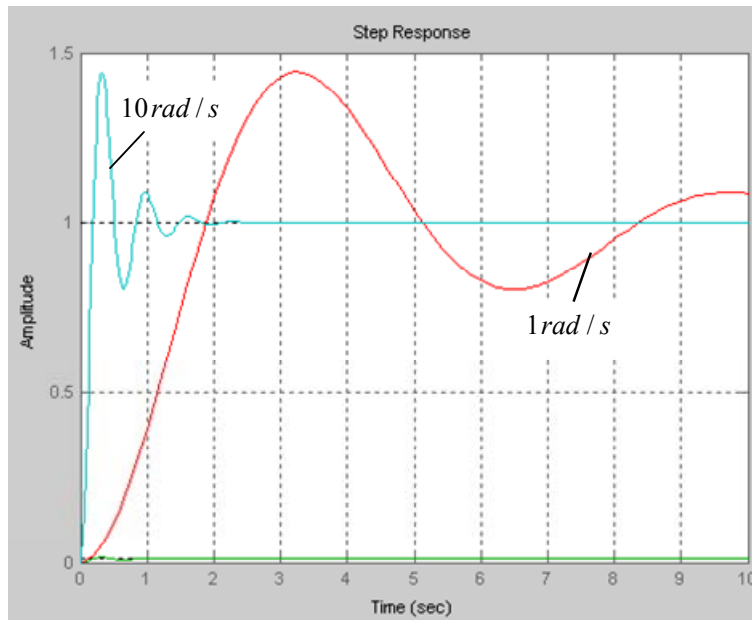


Fig. 6.39 Răspunsul sistemului la semnal de intrare de frecvențe diferite

- b) Factorul de amortizare uzual este în intervalul $[0.4, 0.8]$. Valori mai mici ale factorului de amortizare conduc la suprareglare excesivă și un număr mare de oscilații înainte ca sistemul să se stabilizeze (fig.6.39).

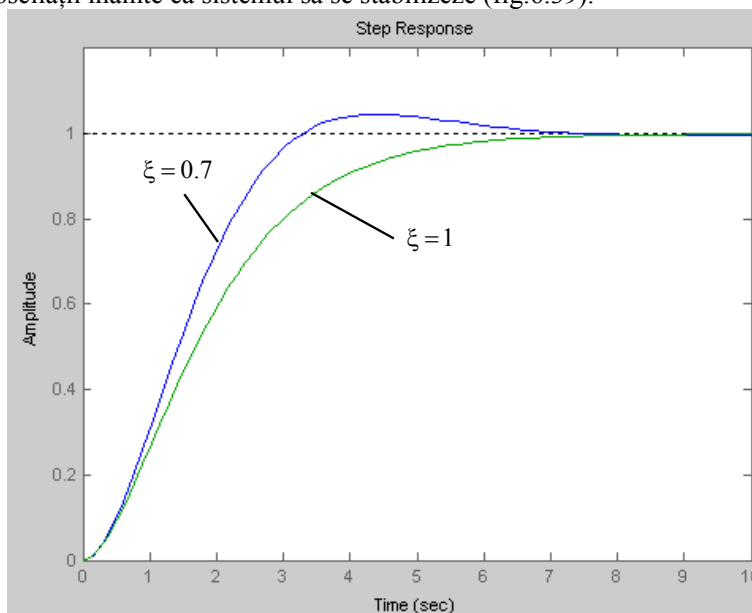


Fig. 6.40 Răspunsul sistemului de ordinul doi pentru amortizări diferite

Valori mai mari ale factorului de amortizare conduc la un sistem lent prin creșterea timpul de răspuns. În anumite cazuri în care nu se pot accepta suprareglări prea mari, este necesară utilizarea unei amortizări mai ridicate valoric. În figura 6.40 se prezintă comparativ răspunsul sistemului de ordinul doi la un semnal treaptă unitară pentru două amortizări diferite.

6.5. Bibliografie capitolul 6

- [6.1]Bolton, W., Instrumentation and Control Systems, Elsevier, 2004
- [6.2]Bolton, W., Mechatronics. Electronic control systems in mechanical and electrical engineering, Pearson Education Limited, 2003, ISBN 0 131 21633 3
- [6.3]Babuția, I., Petruescu, M., Automatizări electronice în construcția de mașini, Editura Facla, Timișoara, 1983
- [6.4]Dorf, R.C., Bishop, R.H., Modern Control Systems, Pearson Studium, ISBN 3-8273-7162-7, 2006
- [6.5] Singh, K., Agnihotri, G., System Design through Matlab, Control Toolbox and Simulink, ISBN: 1852333375 / 1-85233-337-5
- [6.6]Rowell, D., Review of first-and second –order system response, <http://web.mit.edu/2.151/www/Handouts/FirstSecondOrder.pdf>, Accesat la 21.06.2010
- [6.7]Silaș, Gh., Mecanică. Vibrații mecanice, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1968
- [6.7]***, Control System Toolbox. For use with Matlab, version 7, The MathWorks, Inc., 2006