# 5. TRANSFORMATA LAPLACE ŞI ALGEBRA SCHEMELOR BLOC

## 5.1. Transformata Laplace

Denumirea “*transformata Laplace*” este atribuită în onoarea matematicianului şi astronomului Pierre-Simon Laplace, care a utilizat această transformare în lucrarea sa despre teoria probabilităţilor.

Aplicabilitatea transformatei Laplace este extinsă în diverse domenii: matematică, fizică, optică, inginerie electrică, automatică, prelucrarea semnalelor, mecatronică.

În ramura matematicii numită analiză funcţională, transformata Laplace, este un operator liniar asupra unei funcţii *f(t),* numită funcţie original, de argument real $t, (t \geq 0)$. Acest operator transformă originalul într-o altă funcţie *F(s)* de argument complex *s*, numită funcţie imagine.

Transformarea Laplace este o metodă care se utilizează pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, ecuaţii ce caracterizează numeroase aplicaţii din sistemele mecanice şi electrice. În esenţă, metoda transformă ecuaţiile diferenţiale în ecuaţii algebrice, prin introducerea unei noi variabile, $s$ de tip complex.

Se consideră o funcţie $f(t)$ în care $t$ este variabila timp, şi $f(t) = 0$ pentru $t < 0$. Dacă funcţia $f(t)$ satisface următoarele condiţii:

$$\int_0^\infty \left| f(t)e^{-\alpha t} \right| dt < \infty \qquad \textbf{(5.1)}$$

pentru orice $\alpha \in R, 0 < \alpha < \infty$ atunci transformata Laplace a funcţiei $f(t)$ există, este unică şi este definită prin integrala:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = F(s) \qquad \textbf{( 5.2)}$$

$\mathcal{L}$ este operatorul Laplace, iar $s$ este o variabilă complexă, de forma $s=\sigma+j\omega$.

Când se foloseşte expresia "transformarea Laplace", se înţelege implicit transformata Laplace unilaterală. Transformata Laplace poate fi definită şi ca transformare Laplace bilaterală, prin extinderea limitelor de integrare de-a lungul întregii axe reale. Dacă se face asta, atunci transformata Laplace unilaterală devine doar caz particular al transformatei bilaterale.

Transformata Laplace bilaterală este definită astfel:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt=F(s) \qquad (5.3)$$

Dacă se cere o soluţie în timp, funcţiei de *s* îi este aplicată o transformare inversă pentru a obţine funcţia corespunzătoare în timp. Această operaţie este denumită determinarea originalului pe baza imaginii Laplace. Originalul $f(t)$ se va obţine prin *transformata Laplace inversă* dată de următoare integrală complexă şi cunoscută sub diverse nume (integrala Bromwich, integrala Fourier-Mellin sau formula inversă a lui Mellin):

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s)e^{st}ds \qquad (5.4)$$

Această transformare este bijectivă în majoritatea cazurilor practice iar perechile corespunzătoare *f(t)* şi *F(s)* sunt grupate în tabele de transformare Laplace. În concordanţă cu cele specificate anterior se poate spune că între cele două domenii, timp şi complex, există o relaţie de reciprocă:

$$f(t)\Leftrightarrow F(s) \qquad (5.5)$$

Adeseori transformata Laplace este interpretată ca o transformare din domeniul timp (intrările şi ieşirile sunt funcţii de timp) în domeniul complex.

Această transformare integrală are un număr de proprietăţi care o fac utilă în analiza liniară a sistemelor dinamice.

## 5.2. Proprietăţile transformatei Laplace

### *5.2.1. Proprietatea de liniaritate*

Dacă sunt date funcţiile $f_1(t), f_2(t),...., f_n(t)$ cu transformatele Laplace echivalente $F_1(s), F_2(s),....F_n(s)$ şi $c_1, c_2,...c_n$ sunt constante atunci *proprietatea de liniaritate* se defineşte prin relaţia de echivalenţă:

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + .... + c_n f_n(t) \Leftrightarrow c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) + ... + c_n F_n(s) \quad (5.6)$$

Se poate demonstra uşor echivalenţa anterioară prin aplicarea transformatei Laplace:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + .... + c_n f_n(t)\} = \int_{t_0}^{\infty} [c_1 f_1(t) + .... + c_n f_n(t)] \cdot e^{-st} dt = \\
&= \int_{t_0}^{\infty} c_1 f_1(t) \cdot e^{-st} dt + \int_{t_0}^{\infty} c_2 f_2(t) \cdot e^{-st} dt + ... \int_{t_0}^{\infty} c_n f_n(t) \cdot e^{-st} dt = \\
&= c_1 \int_{t_0}^{\infty} f_1(t) \cdot e^{-st} dt + c_2 \int_{t_0}^{\infty} f_2(t) \cdot e^{-st} dt + ... + c_n \int_{t_0}^{\infty} f_n(t) \cdot e^{-st} dt = \\
&= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) + ... + c_n F_n(s)
\end{aligned} \quad (5.7)$$

#### *5.2.2. Proprietatea de asemănare (scalare)*

Fiind dată funcţia *f(t)*, transformata Laplace echivalentă *F(s)* şi parametrul α, proprietatea de scalare se exprimă prin:

$$f(\alpha t) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad (5.8)$$

Se poate demonstra uşor echivalenţa anterioară pornind de la relaţia de definiţie:

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \int_{0}^{\infty} f(\alpha t) e^{-st} dt \quad (5.9)$$

şi introducând notaţiile: $\alpha t = v$; $t = \frac{v}{\alpha}$; $dt = \frac{1}{\alpha} dv$. Se obţine în final:

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} \int_{0}^{\infty} f(v) e^{-\frac{s}{\alpha} v} dv = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad (5.10)$$

#### *5.2.3. Proprietatea deplasării transformatei*

Fiind dată funcţia *f(t)*, transformata Laplace echivalentă *F(s)* şi parametrul *a*, proprietatea de scalare se exprimă prin:

$$e^{at} f(t) \Leftrightarrow F(s - a) \quad (5.11)$$

Considerând datele de intrare şi relaţia de definiţie pentru transformata Laplace, se poate scrie:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}=\int_0^{\infty} f(t)e^{at}e^{-st}dt=\int_0^{\infty} f(t)e^{-(s-a)t}dt=F(s-a) \qquad (5.12)$$

### *5.2.4. Translaţia în timp*

Dacă *F(s)* reprezintă transformata Laplace a funcţiei original *f(t)*, atunci:

$$f(t)u(t-a) \Leftrightarrow e^{-as}F(s) \qquad (5.13)$$

Translaţia în domeniul timp corespunde înmulţirii cu $e^{-as}$ în domeniul frecvenţei complexe. Funcţia $f(t)u(t-a)$ este prezentată în figura 5.1.

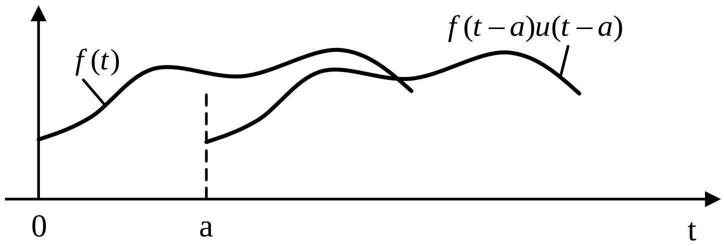



**Fig. 5.1 Translaţia în timp**

### *5.2.5. Teorema valorii finale şi teorema valorii iniţiale*

Teorema valorii finale şi teorema valorii iniţiale sunt importante în teoria sistemelor automate, permiţând determinarea valorii funcţiei de timp la momentele $t=0$ şi $t\to\infty$ direct din transformatele Laplace, fără a utiliza transformarea inversă.

Conform teoremei valorii iniţiale:

$$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s) \qquad (5.14)$$

Conform teoremei valorii finale:

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s) \qquad (5.15)$$

### *5.2.6. Teorema celei de a doua variabile independente*

Dacă $F(s,a)$ reprezintă transformata Laplace a lui $f(t,a)$, atunci există următoarea relaţie:

$$\mathcal{L}\left\{\lim_{a\to a_0} f(t,a)\right\}=\lim_{a\to a_0} F(s,a) \qquad (5.16)$$

Ca o aplicaţie a acestei teoreme, se consideră transformata Laplace (conform Tabelului 5.1):

$$\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}\sin\omega t\right\}=\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2} \tag{5.17}$$

Aplicând teorema anunţată, se calculează limita atunci când parametrul α tinde la zero şi se va obţine o altă transformată Laplace:

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{5.18}$$

În mod similar cu trecerea la limită (rel.5.16) sunt permise şi:

- Diferenţierea în raport cu un parametru $a$:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}\,f(t,a)}{\mathrm{d}a}\right\}=\frac{\mathrm{d}F(s,a)}{\mathrm{d}a} \tag{5.19}$$

- Integrarea în raport cu variabila independentă $a$:

$$\mathcal{L}\left\{\int_{a_1}^{a_2} f(t,a)\,\mathrm{d}a\right\}=\int_{a_1}^{a_2}F(s,a)\,\mathrm{d}a \tag{5.20}$$

## 5.3. Transformatele Laplace ale unor funcţii şi operaţii

Dacă se aplică integrala (5.2) unor funcţii diferite se poate ajunge la tabela de transformate Laplace (tabelul 5.1) conţinând funcţia original şi funcţia imagine.

Pentru exemplificare, se consideră calculul transformatei Laplace pentru câteva dintre funcţiile elementare.

Se consideră *funcţia treaptă unitară* (fig.5.2) defintă prin relaţia:

$$u(t)=\begin{cases}0, \; pentru \;\; t<0;\\ 1, \; pentru \;\; t>0;\end{cases} \tag{5.21}$$

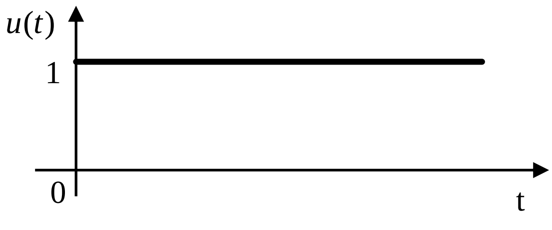



**Fig. 5.2 Funcţia treaptă unitară**

Relaţia de definiţie a transformatei Laplace (rel.5.2) devine în acest caz:

$$\mathcal{L}\{u_0(t)\} = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{-e^{-st}}{s}\right|_0^\infty = 0 - \left(-\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s} \tag{5.22}$$

**Tabelul 5.1**

| NR. CRT. | FUNCŢIA DE TIMP *f(t)* | TRANSFORMATA LAPLACE ***F(s)*** |
|---|---|---|
| 1 | $f(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0, & pentru\, t \neq 0 \\ \infty, & pentru\, t = 0 \end{cases}$ | $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ |
| 2 | $f(t) = \begin{cases} = 0 & t < 0 \\ = 1 & t \geq 0 \end{cases}$ | $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ |
| 3 | $f(t) = \begin{cases} = 0 & t < 0 \\ = Ct & t \geq 0 \end{cases}$ | $\mathcal{L}\{Ct\} = \frac{C}{s^2}$ |
| 4 | $f(t) = \begin{cases} 0 & pentru\, t < 0 \\ Ct^2 & pentru\, t \geq 0 \end{cases}$ | $\mathcal{L}\{Ct^2\} = \frac{2C}{s^3}$ |
| 5 | $f(t) = \begin{cases} 0 & pentru\, t < 0 \\ Ct^n & pentru\, t \geq 0 \end{cases}$ | $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| 6 | $f(t) = \begin{cases} 0, & pentru\, t < 0 \\ e^{-\alpha t}, & pentru\, t \geq 0 \end{cases}$ | $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{s + \alpha}$ |
| 7 | $f(t) = \cos \omega t$ | $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ |
| 8 | $f(t) = e^{-at} \sin \omega t$ | $\mathcal{L}\{e^{-at} \sin \omega t\} = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$ |
| 9 | $f(t) = e^{-at} \cos \omega t$ | $\mathcal{L}\{e^{-at} \cos \omega t\} = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$ |
| 10 | $f(t) = t^n$ | $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ |

Se consideră funcţia original $f(t) = \sin \omega t$, pentru care se urmăreşte determinarea transformatei Laplace.

Considerând relaţiile lui Euler, se arată că funcţia original se poate scrie şi sub forma exponenţială:

$$f(t) = \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \tag{5.23}$$

Pe baza relaţiei anterioare, integrala de definiţie a transformatei Laplace devine:

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}=\int_0^\infty \frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2j}\left[\int_0^\infty e^{-(s-j\omega)t}\,\mathrm{d}t-\int_0^\infty e^{-(s+j\omega)t}\,\mathrm{d}t\right]=$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\left.\frac{-e^{-(s-j\omega)t}}{(s-j\omega)}\right|_0^\infty-\left.\frac{-e^{-(s+j\omega)t}}{(s+j\omega)}\right|_0^\infty\right]=\frac{1}{2j}\left[\left(0-\frac{-1}{s-j\omega}\right)-\left(0-\frac{-1}{s+j\omega}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right)=\frac{1}{2j}\cdot\frac{2j\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

**( 5.24)**

În figura 5.3 se prezintă *funcţia puls* şi modul de echivalare pe baza funcţiei treaptă.

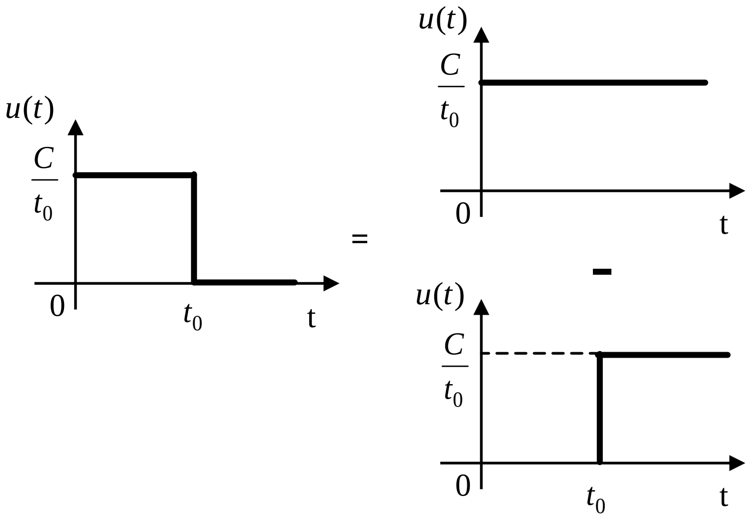



**Fig. 5.3 Funcţia puls**

*Funcţia puls* se poate defini matematic prin relaţia:

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{C}{t_0}\ pentru\ \ 0<t<t_0\\ 0\ \ pentru\qquad t>t_0\end{cases}$$ **( 5.25)**

unde $C$ este o constantă $C\in R$.

Conform cu cele prezentate anterior, funcţia anterioară se poate defini şi prin diferenţa funcţiilor treaptă (fig.5.3):

$$f(t) = \frac{C}{t_0}\left[u(t) - u(t - t_0)\right] \tag{5.26}$$

Transformata Laplace va fi în aceste condiţii:

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}\left\{\frac{C}{t_0}\left[u(t) - u(t-t_0)\right]\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{C}{t_0}u(t)\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{C}{t_0}u(t-t_0)\right\} = \\ &= \frac{C}{t_0}\left[\mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t-t_0)\}\right] = \frac{C}{st_0}\left(1 - e^{-st_0}\right)\end{aligned} \tag{5.27}$$

*Funcţia impuls* se poate defini pe baza funcţiei puls (rel.5.25) prin relaţia:

$$f(t) = \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{C}{\varepsilon} & pentru\ 0 < t < \varepsilon \\ 0 & pentru\ \ t \geq \varepsilon \end{cases} \tag{5.28}$$

Pentru această funcţie, transformata Laplace este dată prin relaţia:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^\infty \delta(t) \cdot e^{-st}\, \mathrm{d}t = 1 \tag{5.29}$$

## 5.4. Funcţia de transfer

Teoria sistemelor utilizează în construcţia modelelor matematice relaţia dintre mărimile de intrare şi de ieşire pentru un sistem liniar invariant în timp, relaţie care se numeşte *funcţie de transfer a sistemului.*

Fie sistemul având următoarea ecuaţie diferenţială ca relaţie între mărimile de intrare *u(t)* şi de ieşire *y(t),* unde $y^{(k)}(t)$ este derivata de ordinul *k* a mărimii de ieşire *y(t),* iar $u^{(i)}(t)$ este derivata de ordinul *i* a mărimii de intrare, *u(t):*

$$\begin{aligned}&a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = \\ &\qquad = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + ..b_0 u(t)\end{aligned} \tag{5.30}$$


**Fig. 5.4 Sistemul şi mărimea de intrare şi ieşire**

$$y^{(k)}(t) = \frac{d^k y}{dt^k} \quad k = 1,2,\ldots,n \tag{5.31}$$

$$u^{(i)}(t) = \frac{d^i u}{dt^i} \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (5.32)$$

Se presupune condiţiile iniţiale, adică valorile în $t = 0$ pentru toate funcţiile, inclusiv derivatele lor, ca fiind nule:

$$y^{(k)}(t) = 0 \;\; \forall k < n \qquad (5.33)$$

$$u^{(i)}(t) = 0 \;\; \forall i < m \qquad (5.34)$$

Transformata Laplace a relaţiei dintre mărimile de intrare şi de ieşire se poate scrie, pe baza proprietăţilor acesteia de liniaritate şi a modului de calcul al transformatei Laplace pentru derivata unei funcţii:

$$\begin{aligned} &a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \ldots + a_0 Y(s) = \\ &\qquad = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + ..b_0 U(s) \end{aligned} \qquad (5.35)$$

Relaţia anterioară permite exprimarea transformatei Laplace a mărimii de ieşire:

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ..b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ..a_0} U(s) \qquad (5.36)$$

sau:

$$Y(s) = G(s)U(s) \qquad (5.37)$$

Funcţia *G(s)* este *funcţia de transfer* a sistemului şi se prezintă ca o funcţie raţională de *s*. Prin introducerea noţiunii de funcţie de transfer, schema-bloc a sistemului devine mai concretă (fig.5.3):

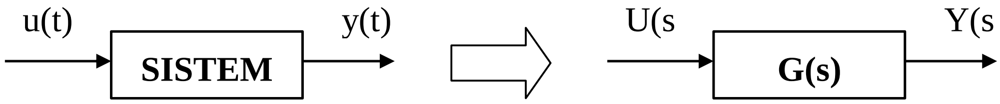



**Fig. 5.5 Schema bloc a unui sistem, cu evidenţierea funcţiei de transfer**

## 5.5. Algebra schemelor bloc

### *5.5.1. Principii ale algebrei schemelor bloc*

Funcţia de transfer $G(s)$ reprezintă o proprietate a elementului / sistemului dat. Combinarea mai multor sisteme într-*un singur bloc* rezultant poate fi extinsă. Rearanjarea schemelor bloc in vederea simplificării, este denumită „algebra schemelor bloc”. În figurile 5.6 – 5.13 sunt reprezentate cele mai importante identităţi ale algebrei schemelor bloc, care sunt utilizate în simplificarea sistemelor.

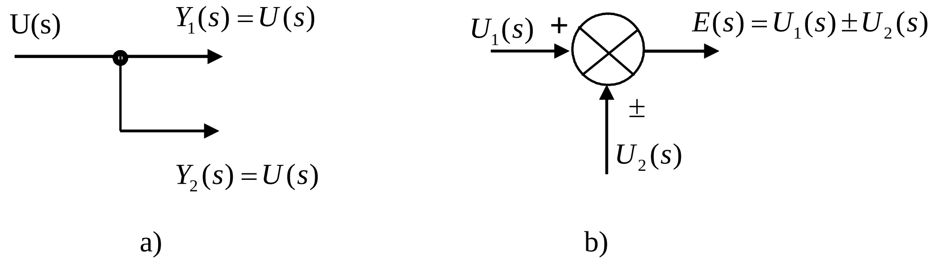



**Fig. 5.6 Funcţia de transfer pentru: a- un nod; b – un sumator**

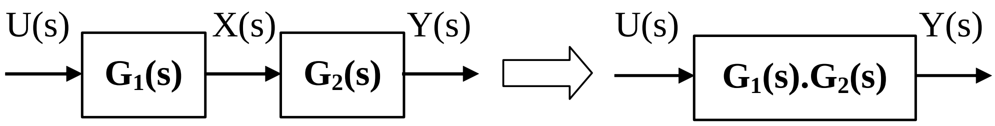



**Fig. 5.7 Funcţia de transfer a unei serii de subsisteme**

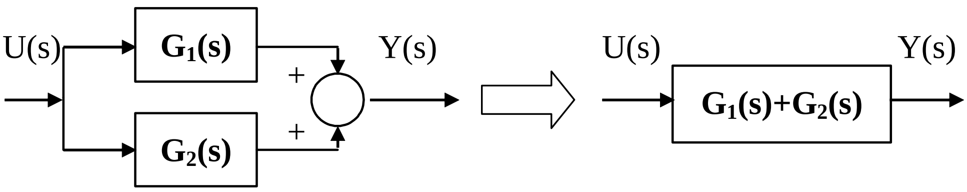



**Fig. 5.8 Funcţia de transfer a unei conexiuni de subsisteme în paralel**

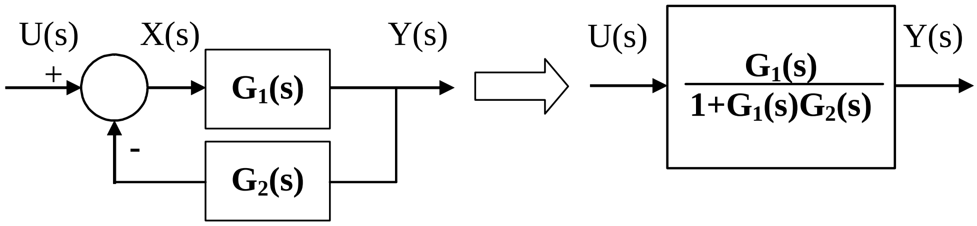



**Fig. 5.9 Funcţia de transfer a conexiunii cu reacţie negativă**

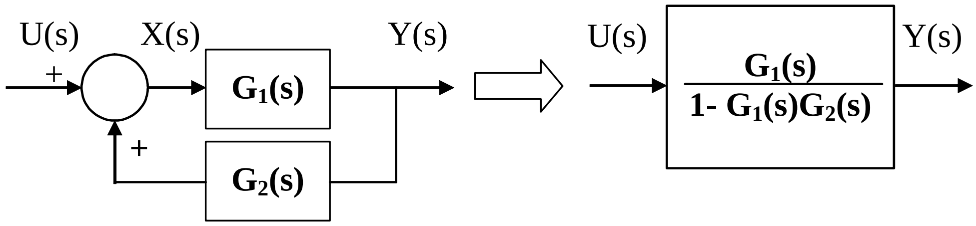



**Fig. 5.10 Funcţia de transfer a conexiunii cu reacţie pozitivă**

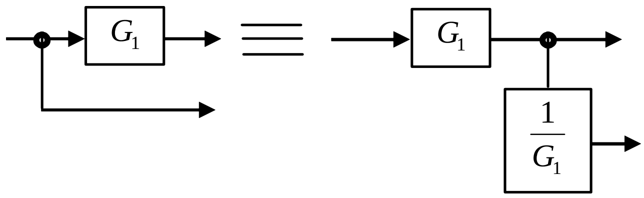



**Fig. 5.11 Modificarea punctului de ramificaţie**

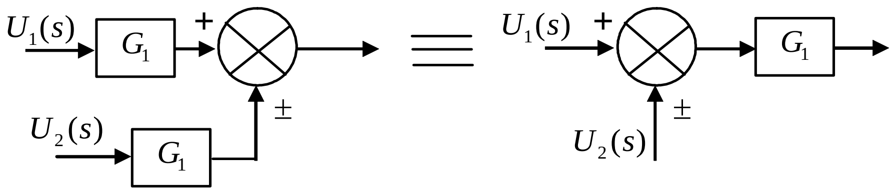



**Fig. 5.12 Modificarea poziţiei unui bloc faţă de sumator**

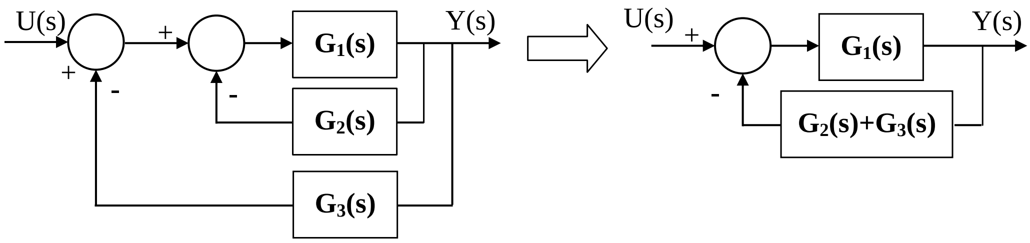



**Fig. 5.13 Identitate în algebra schemelor bloc**

În cazul sistemelor cu mai multe intrări (MISO – multiple input / single output), se poate determina răspunsul sistemului utilizând *principiul superpoziţiei*: *răspunsul sistemului pentru intrări multiple simultane este suma răspunsurilor individuale pentru fiecare intrare aplicată separat* .

Utilizând tehnicile de simplificare a schemelor bloc, se poate reduce sistemul analizat la un singur element cu o funcţie de transfer echivalentă.

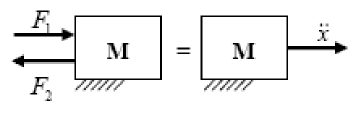
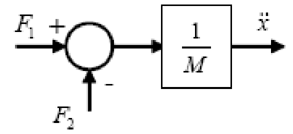
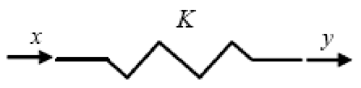
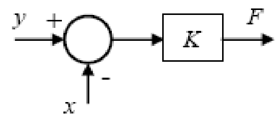
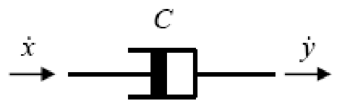
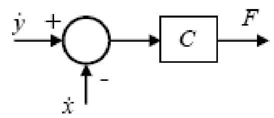
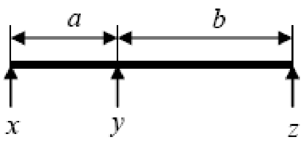
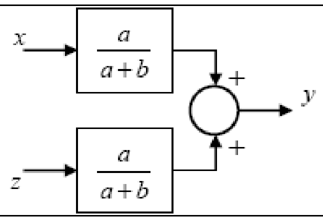
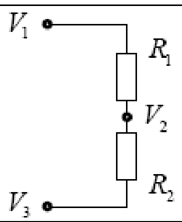
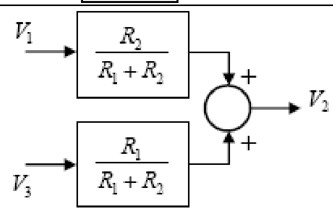
Dacă se dispune de imaginea Laplace a unui sistem, prin funcţia $F(s)$, se poate determina funcţia originală, $f(t)$ cu ajutorul inversei transformatei Laplace:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) \tag{5.38}$$

În numeroase cazuri, este mai uşor să se exprime inversa transformatei Laplace a unei funcţii în raport cu cea a unor funcţii simple, elementare, pentru care aceasta este cunoscută. Modul de aplicare este specific teoriei sistemelor.

În sensul celor prezentate anterior, sistem – model matematic – scheme bloc, se prezintă în tabelul 5.2 câteva exemplificări sugestive privind acest paralelism.

**Tabelul 5.2**

| Model grafic | Model matematic | Modelul diagramei bloc |
|---|---|---|
|   | $\sum F_i = M \cdot \ddot{x}$ <br> $\ddot{x} = \frac{1}{M} \sum F_i$ |   |
|   | $F = K \cdot (y - x)$ |   |
|   | $F = C \cdot (\dot{y} - \dot{x})$ |   |
|   | $y = \frac{b}{a+b} \cdot x + \frac{a}{a+b} \cdot z$ |   |
|   | $V_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot V_1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot V_3$ |   |

### *5.5.2. Exemple de calcul*

a) Se consideră sistemul cu schema prezentată în figura 8.39. Se cere să se determine ieşirea sistemului în condiţiile unei intrări $U(s)$ şi a unei perturbaţii externe $D(s)$.

Aplicând principiul superpoziţiei, ieşirea sistemului se determină ca fiind:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) \tag{5.39}$$

corespunzător cazurilor:

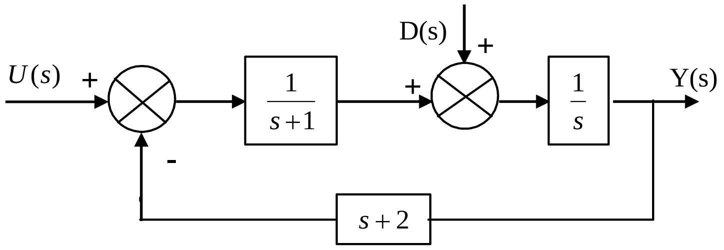



**Fig. 5.14 Sistem cu perturbaţie de intrare**

- Perturbaţie zero (fig.5.15)

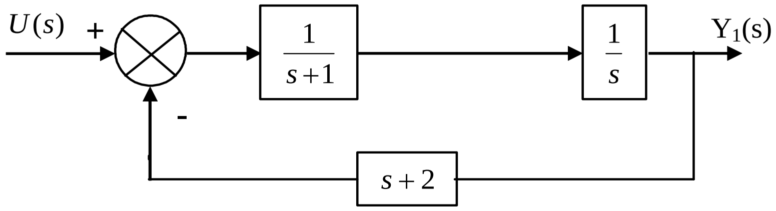



**Fig. 5.15 Sistemul cu perturbaţie zero**

Aplicând tehnicile de simplificare, se poate determina ieşirea sistemului:

$$Y_1(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \cdot U(s) \tag{5.40}$$

- Intrare zero (fig.5.16)

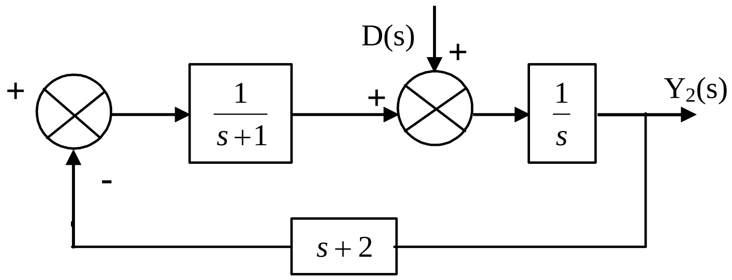



**Fig. 5.16 Sistemul cu intrare egală cu zero**

Utilizând aceleaşi tehnici de simplificare se poate determina ieşirea sistemului:

$$Y_2(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 2} \cdot D(s) \tag{5.41}$$

Având în vedere relaţiile (5.40) şi (5.41), se poate determina ieşirea sistemului în condiţiile celor două intrări simultane:

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}\cdot U(s)+\frac{s+1}{s^2+2s+2}\cdot D(s) \tag{5.42}$$

b) Să se reducă sistemul, din figura 5.17 la un singur element, utilizând tehnicile de simplificare a algebrei schemelor bloc.

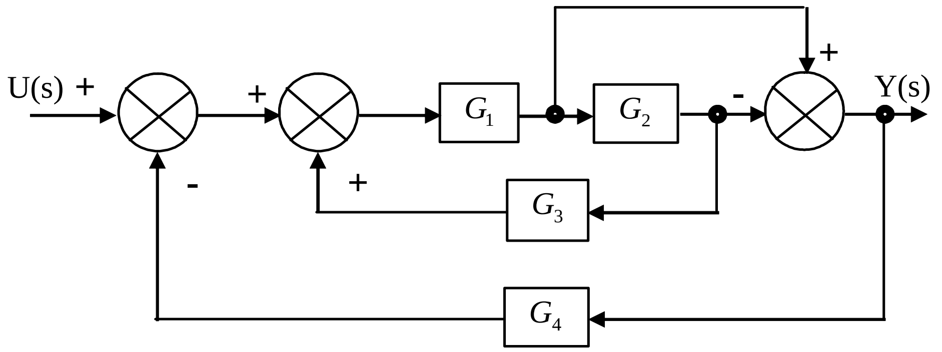



**Fig. 5.17 Schema bloc complexă a sistemului**

Procedura aplicată rezultă din figurile următoare. Fiecare pas are alocată o figură. Se indică de fiecare dată funcţia de transfer în blocul echivalent rezultant.

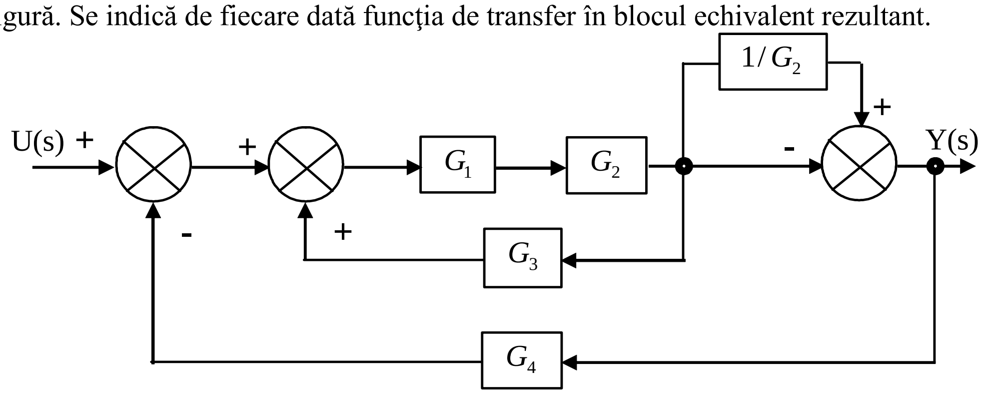



**Fig. 5.18 Modificarea poziţiei punctului de ramificaţie**

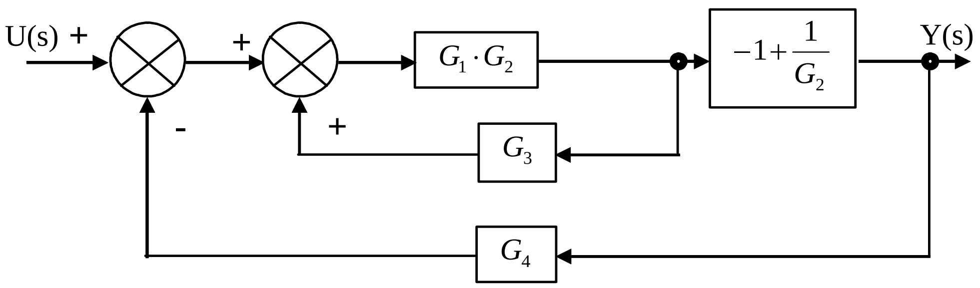



**Fig. 5.19 Eliminarea buclei de alimentare directă şi simplificarea elementelor în serie**

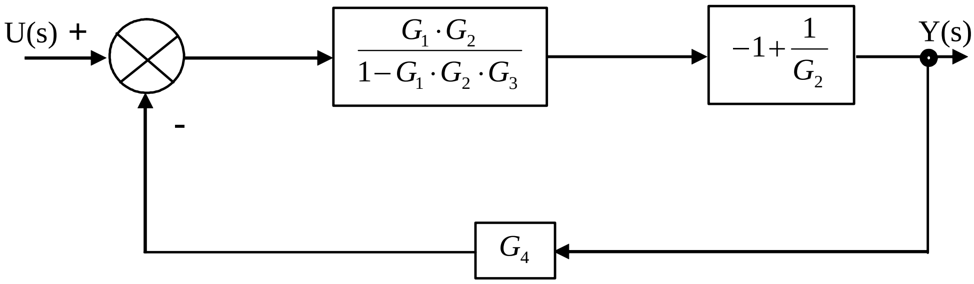



**Fig. 5.20 Simplificarea buclei de reacţie pozitivă**

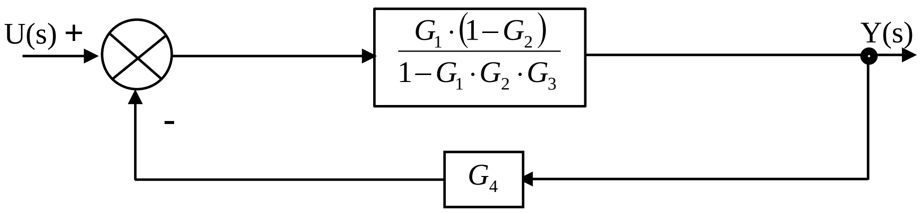



**Fig. 5.21 Simplificarea elementelor în serie pe calea directă**

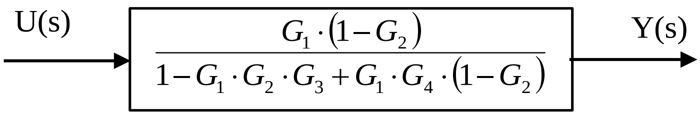



**Fig. 5.22 Simplificarea buclei de reacţie negativă**

## 5.6. Transformata Laplace inversă

### *5.6.1. Principii de calcul*

Determinarea soluţiilor dependente de timp pentru ecuaţiile diferenţiale transformate necesită aplicarea transformatei Laplace inverse $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$.

Funcţia imagine *F(s)* se poate prezenta sub una din formele:

- expresia liniară a unei combinaţii de funcţii polinomiale:

$$F(s) = Z_1(s) + Z_2(s) + .... + Z_n(s) \tag{5.43}$$

În acest caz transformata Laplace inversă va fi:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{Z_1(s) + Z_2(s) + ....Z_n(s)\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{Z_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{Z_2(s)\} + ... + \mathcal{L}^{-1}\{Z_n(s)\} \end{aligned} \tag{5.44}$$

Originalul corespunzător fiecărui termen din relaţia (5.44) se poate determina pe baza tabelului 5.1 (vezi şi Anexa 8 /cap.12) Soluţia în timp *f(t)* se calculează prin însumarea originalelor fiecărui termen din expresia (5.44).

- o funcţie raţională în *s*:

$$F(s)=\frac{Q(s)}{P(s)}=K(s)+\frac{N(s)}{P(s)} \tag{5.45}$$

În acest caz transformata Laplace inversă va fi:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{K(s)+\frac{N(s)}{P(s)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\{K(s)\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{N(s)}{P(s)}\right\} \tag{5.46}$$

Prima transformată $\mathcal{L}^{-1}\{K(s)\}$ se calculează în conformitate cu relaţia (5.44).

Pentru calculul celei de-a doua transformate se are în vedere că cele două funcţii care o definesc au o formă polinomială:

$$N(s)=b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+...+b_1 s+b_0 \tag{5.47}$$

$$P(s)=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+...+a_1 s+a_0 \tag{5.48}$$

cu $m<n$.

Principiul de calcul se bazează pe descompunerea funcţiei raţionale într-o sumă de funcţii raţionale prin cunoaşterea rădăcinilor ecuaţiei polinomiale $P(s)=0$. În acest sens se pot evidenţia mai multe cazuri.

**a) $P(s)=0$ are numai rădăcini reale distincte.**

În acest caz se poate scrie:

$$\frac{N(s)}{P(s)}=\frac{N(s)}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+..+a_1 s+a_0}=\frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)} \tag{5.49}$$

unde $p_1\neq p_2\neq ....\neq p_n$.

În aceste condiţii relaţia anterioară se poate scrie:

$$\frac{N(s)}{P(s)}=\frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)....(s+p_n)}=\frac{k_1}{s+p_1}+\frac{k_2}{s+p_2}+....\frac{k_n}{s+p_n} \tag{5.50}$$

pentru care trebuie determinaţi coeficienţii $k_i$ :

$$k_i=(s+r_i)\frac{N(s)}{P(s)}\bigg|_{s=-r_i} \tag{5.51}$$

Procedura rămâne neschimbată chiar dacă una din rădăcini se află în origine.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{N(s)}{P(s)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{s+p_1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_2}{s+p_2}\right\}+...+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_n}{s+p_n}\right\}= \tag{5.52}$$
$$=k_1e^{-p_1t}+k_2e^{-p_2t}+....+k_ne^{-p_nt}$$

**b)** $P(s)=0$ **are rădăcini reale multiple.**

În acest caz se poate scrie:

$$\frac{N(s)}{P(s)}=\frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2).....(s+p_{n-r})(s+p_{n-r+1})^r} \tag{5.53}$$

unde $n-r$ sunt rădăcini reale distincte şi una are gradul de multiplicitate $r$. Expresia anterioară se poate descompune într-o sumă de fracţii parţiale:

$$Y(s)=\frac{N(s)}{P(s)}=\frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_{n-r})(s+p_{n-r+1})^r}=$$
$$=\frac{k_1}{s+p_1}+\frac{k_2}{s+p_2}+....\frac{k_{n-r}}{s+p_{n-r}}+\frac{A_1}{(s+p_{n-r+1})}+\frac{A_2}{(s+p_{n-r+1})^2}+ \tag{5.54}$$
$$+....+\frac{A_r}{(s+p_{n-r+1})^r}$$

Coeficienţii $k_1,k_2,...,k_{n-r}$ se determină prin procedeul prezentat anterior la punctul *a*. Restul coeficienţilor $A_1,A_2,...A_r$ se determină prin relaţiile:

$$A_r=\left[(s+p_{n-r+1})^rY(s)\right]_{s=-p_{n-r+1}}$$
$$A_{r-1}=\frac{d}{ds}\left[(s+p_{n-r+1})^rY(s)\right]_{s=-p_{n-r+1}}$$
$$A_{r-2}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+p_{n-r+1})^rY(s)\right]_{s=-p_{n-r+1}} \tag{5.55}$$
$$.....$$
$$.....$$
$$A_1=\frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left[(s+p_{n-r+1})^rY(s)\right]_{s=-p_{n-r+1}}$$

Originalul corespunzător fiecărui termen din relaţia (5.54) se poate determina pe baza tabelului 5.1. Soluţia în timp *f(t)* se calculează prin însumarea originalelor fiecărui termen din expresia (5.54).

**c)** $P(s)=0$ **are rădăcini complexe.**

$P(s)$ este un polinom cu coeficienţi reali. În aceste condiţii ecuaţia polinomială are atât rădăcina $s=a+jb$ cât şi rădăcina conjugată $s=a-jb$ şi astfel polinomul poate fi scris:

$$P(s) = (s^2 - 2as + b^2)\prod_{i=3}^{n}(s + p_i) \qquad (5.56)$$

unde $p_i$ sunt rădăcini reale.

În acest caz expresia raţională se poate scrie:

$$\frac{N(s)}{P(s)} = \frac{k_1 s + k_2}{s^2 - 2as + b^2} + \sum_{i=3}^{n} \frac{k_i}{s + p_i} \qquad (5.57)$$

Coeficienţii $k_i$ (i = 3,4, …n) se determină pe principiul prezentat anterior (§ 1.6, pct.a). Pentru determinarea celorlalţi doi coeficienţi $k_1$ şi $k_2$ se impun transformări asupra expresiei (5.57) şi identificarea celor doi coeficienţi din sistemul de ecuaţii rezultat.

Soluţia în timp $f(t)$ se determină pe principiul clasic utilizând tabelul 5.1:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1 s + k_2}{s^2 - 2as + s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{i=3}^{n} \frac{k_i}{s + p_i}\right\} \qquad (5.58)$$

### *5.6.2. Exemple de calcul*

#### 5.6.2.1. Exemplul 1

Se consideră funcţia de transfer:

$$Y(s) = \frac{2s + 3}{(s+1)(s+2)(s-3)} \qquad (5.59)$$

şi se cere descompunerea în fracţii simple şi calculul funcţiei dependente de timp $y(t)$.

Funcţia de transfer se poate descompune în fracţii simple:

$$Y(s) = \frac{2s + 3}{(s+1)(s+2)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3} \qquad (5.60)$$

Coeficienţii *A*, *B*, *C* se determină în conformitate cu cele prezentate la (§ 1.6, pct.a):

$$A = Y(s)\cdot(s+1)\Big|_{s=-1} = \left.\frac{2s+3}{(s+2)(s-3)}\right|_{s=-1} = \frac{-2+3}{1\cdot(-4)} = -\frac{1}{4} \qquad (5.61)$$

$$B = Y(s)\cdot(s+2)\Big|_{s=-2} = \left.\frac{2s+3}{(s+1)(s-3)}\right|_{s=-2} = \frac{-4+3}{(-1)\cdot(-5)} = \frac{-1}{5} \qquad (5.62)$$

$$C = Y(s)\cdot(s-3)\Big|_{s=3} = \left.\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=3} = \frac{2\cdot 3+3}{4\cdot 5} = \frac{9}{20} \tag{5.63}$$

În acest caz:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{4}}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{5}}{s+2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{9}{20}}{s-3}\right\} =$$
$$= -\frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{9}{20}e^{3t} \tag{5.64}$$

### 5.6.2.2. Exemplul 2

Pentru funcţia de transfer:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)} \tag{5.65}$$

se cere să se determine funcţia de timp $y(t)$.

Funcţia de transfer se descompune în fracţii simple :

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)^3} \tag{5.66}$$

Coeficienţii se calculează în conformitate cu cele precizate (§ 1.6, pct.b):

$$k_1 = sY(s)\Big|_{s=0} = \left.\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} \tag{5.67}$$

$$k_2 = (s+2)Y(s)\Big|_{s=-2} = \left.\frac{1}{s(s+1)^3}\right|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)\cdot(-1)} = \frac{1}{2} \tag{5.68}$$

$$A_3 = (s+1)^3 Y(s)\Big|_{s=-1} = \left.\frac{1}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{1}{(-1)\cdot 1} = -1 \tag{5.69}$$

$$A_2 = \frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 Y(s)\right]_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s(s+2)}\right]\Bigg|_{s=-1} =$$
$$= -\left.\frac{2s+2}{[s(s+2)]^2}\right|_{s=-1} = 0 \tag{5.70}$$

$$A_1=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3Y(s)\right]_{s=-1}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{s(s+2)}\right]\Bigg|_{s=-1}=$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{[s(s+2)]^2}+\frac{8(s+1)^2}{[s(s+2)]^3}\right]\Bigg|_{s=-1}=\frac{1}{2}\cdot\left[-\frac{2}{1}+0\right]=-1 \quad \textbf{(5.71)}$$

Expresia funcţiei de transfer va fi:

$$Y(s)=\frac{1}{2s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^3} \quad \textbf{(5.72)}$$

iar funcţia de timp în mod corespunzător:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{s}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{s+2}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{-t}-\frac{1}{2}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{-t}-\frac{1}{2}t^2e^{-t} \quad \textbf{(5.73)}$$

#### 5.6.2.3. Exemplul 3

Se consideră funcţia de transfer

$$Y(s)=\frac{2}{(s+1)\left(s^2+3s+9\right)} \quad \textbf{(5.74)}$$

şi se cere să se determine funcţia de timp $y(t)$.

Funcţia de transfer se descompune în fracţii simple :

$$Y(s)=\frac{2}{(s+1)\left(s^2+3s+9\right)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+3s+9} \quad \textbf{(5.75)}$$

Coeficientul $A$ se determină ca fiind :

$$A=(s+1)Y(s)\big|_{s=-1}=\frac{2}{s^2+3s+9}\Bigg|_{s=-1}=\frac{2}{1-3+9}=\frac{2}{7} \quad \textbf{(5.76)}$$

Coeficienţii $B$, $C$ se determină din identificarea:

$$(\frac{2}{7}+B)s^2+(\frac{6}{7}+B+C)s+\frac{18}{7}+C=2 \quad \textbf{(5.77)}$$

echivalentă sistemului:

$$\begin{cases} \frac{2}{7} + B = 0 \\ \frac{6}{7} + B + C = 0 \\ \frac{18}{7} + C = 2 \end{cases} \quad \textbf{(5.78)}$$

Din sistemul (5.78) se obţin coeficienţii: $B = -\frac{2}{7}$; $C = -\frac{4}{7}$.

În final, se obţine:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{2}{7}}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{2}{7}s - \frac{4}{7}}{s^2+3s+9}\right\} = \frac{2}{7}e^{-t} - \frac{2}{7}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}}\right\} =$$

$$= \frac{2}{7}e^{-t} - \frac{2}{7}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+\frac{3}{2}) + \frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\} = \frac{2}{7}e^{-t} - \frac{2}{7}e^{-\frac{3}{2}t}\cdot\left(\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{3\sqrt{3}}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right)$$

### 5.6.2.4. Exemplul 4

Se consideră funcţia de transfer

$$Y(s) = \frac{1}{s\left(s^2+3s+2\right)} \quad \textbf{(5.79)}$$

şi se cere să se determine funcţia de timp $y(t)$.

Funcţia de transfer se descompune în fracţii simple:

$$Y(s) = \frac{1}{s\left(s^2+3s+2\right)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} \quad \textbf{(5.80)}$$

La fel ca în exemplele anterioare, se determină coeficienţii:

$$A = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot\left(\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right)\right] = \frac{1}{2} \quad \textbf{(5.81)}$$

$$B = \lim_{s\to -1}\left[(s+1)\cdot\left(\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right)\right] = -1 \quad \textbf{(5.82)}$$

$$C = \lim_{s \to -2}\left[(s+2)\cdot\left(\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right)\right] = \frac{1}{2} \tag{5.83}$$

În final, se poate obţine:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+3s+2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}\right] =$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}\right) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}\cdot e^{-2t} \tag{5.84}$$

Forma de variaţie în timp a funcţiei $y(t)$ se poate obţine apelând la mediul Matlab (fig.5.23). Graficul este prezentat în figura 5.24

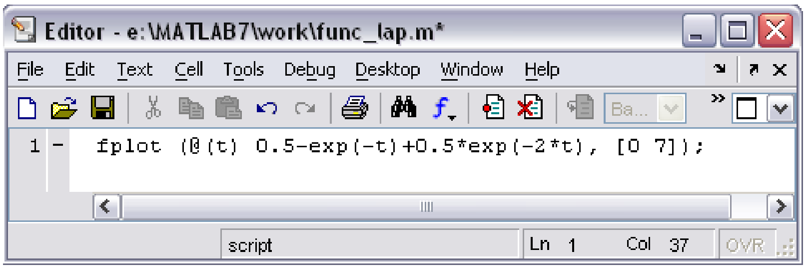



**Fig. 5.23 Fişier pentru reprezentarea funcţiei $y(t)$**

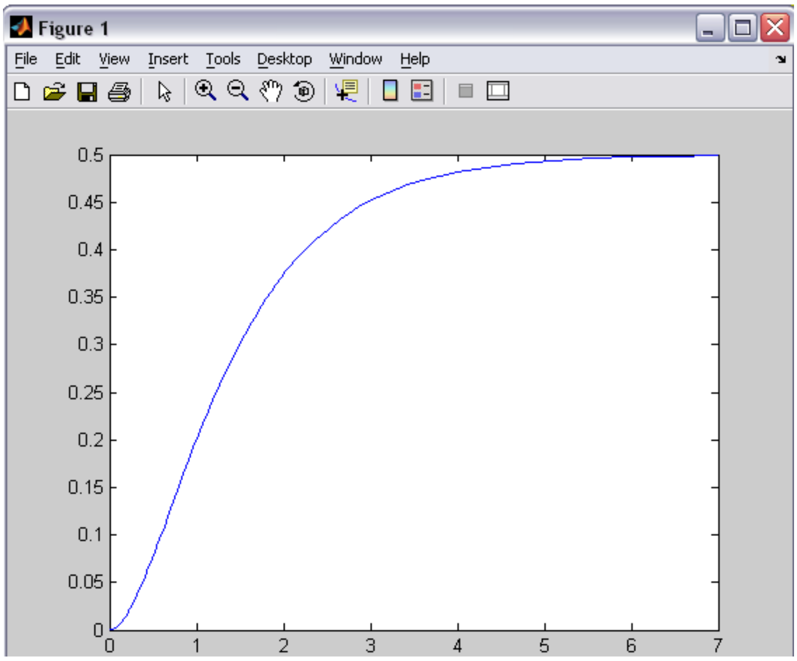



**Fig. 5.24 Graficul funcţiei $y(t)$**

## 5.7. Matlab şi algebra schemelor bloc

### *5.7.1. Funcţii de comandă*

Mediul Matlab / Control System Toolbox facilitează operaţii din algebra schemelor bloc [5.10].

Comanda **feedback** permite conectarea a două modele liniare într-o conexiune cu reacţie. Sintaxa utilizată este:

**sys = feedback (sys1,sys2)**

**sys_f = feedback (tf(num_1,den_1), tf(num_2, den_2))**

iar rezultatul este funcţia de transfer a sistemului în conexiune cu reacţie.

În mod implicit sintaxa prezentată presupune reacţia negativă. Dacă se doreşte indicarea tipului de reacţie (negativă sau pozitivă) se impune modificarea sintaxei:

**sys = feedback (sys1,sys2,-1)**

**sys = feedback (sys1,sys2,+1)**

În figura 5.25 se prezintă fişierul *control_2.m* care permite conectarea a două modele liniare într-o conexiune cu reacţie.

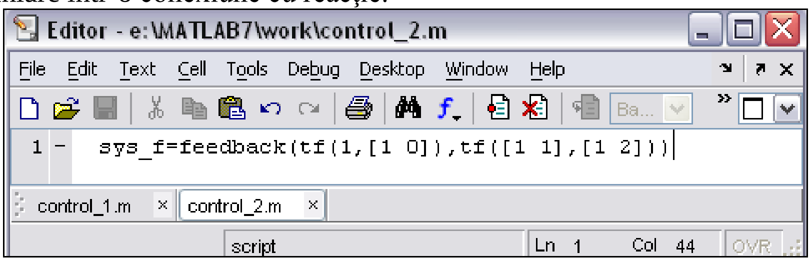



**Fig.5.25 Fişier *m pentru calculul unei conexiuni cu reacţie**

```
Transfer function:
    s + 2
-------------
s^2 + 3 s + 1
```

**Fig.5.26 Funcţia de transfer echivalentă rezultată din calcul**

Conectarea în paralel a două sisteme (fig.5.27) şi returnarea funcţiei de transfer a sistemului echivalent este facilitată de funcţia Matlab **parallel.**

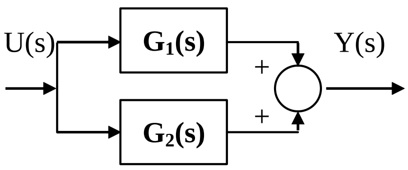
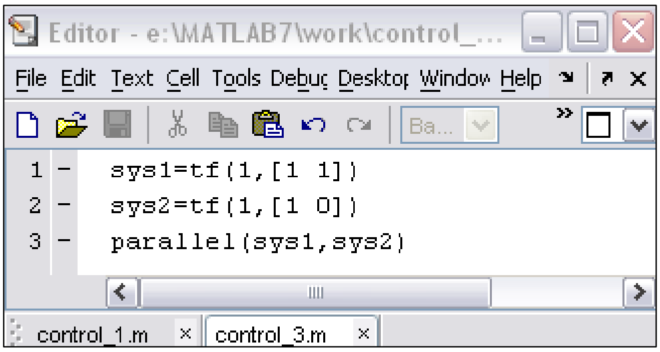



**Fig. 5.27 Conectarea în paralel a două sisteme**

Fişierul *control_.m* evidenţiază sintaxa utilizată într-un exemplu concret iar rezultatul obţinut este prezentat în figura 5.28.




```
Transfer function:
  1
-----
s + 1


Transfer function:
1
-
s


Transfer function:
2 s + 1
-------
s^2 + s
```

**Fig.5.28 Calculul unei conexiuni paralele**

Conectarea în serie a două sisteme (fig.5.29) şi returnarea funcţiei de transfer a sistemului echivalent este facilitată de funcţia Matlab **series.**

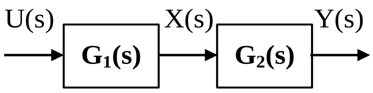
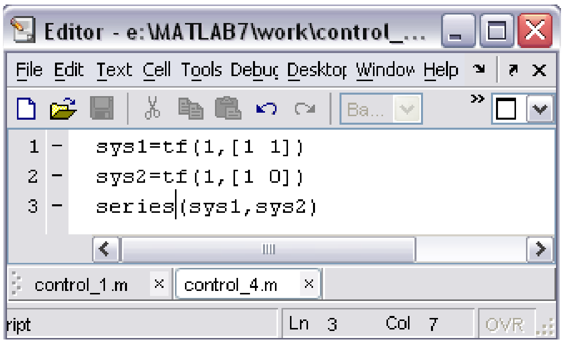



**Fig.5.29 Sisteme în conexiune serie**

Fişierul **.m* (fig.5.30a) evidenţiază sintaxa utilizată într-un exemplu concret şi rezultatul obţinut este prezentat în figura 5.30b.




```
Transfer function:
    1
-------
s^2 + s
```

a) b)

**Fig.5.30 Fişierul *m şi rezultatul calculului**

### *5.7.2. Exemplu de calcul*

Un sistem este compus din două elemente, conectate în serie, cu funcţiile de transfer:

$$G_1(s) = \frac{1}{500s^2} \tag{5.85}$$

$$G_1(s) = \frac{s+1}{s^2+1} \tag{5.86}$$

Se cere să se determine utilizând funcţia Matlab echivalenţa sistemului.

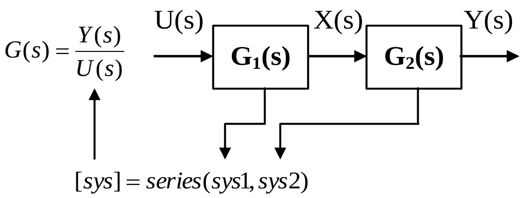



**Fig.5.31 Funcţia series**

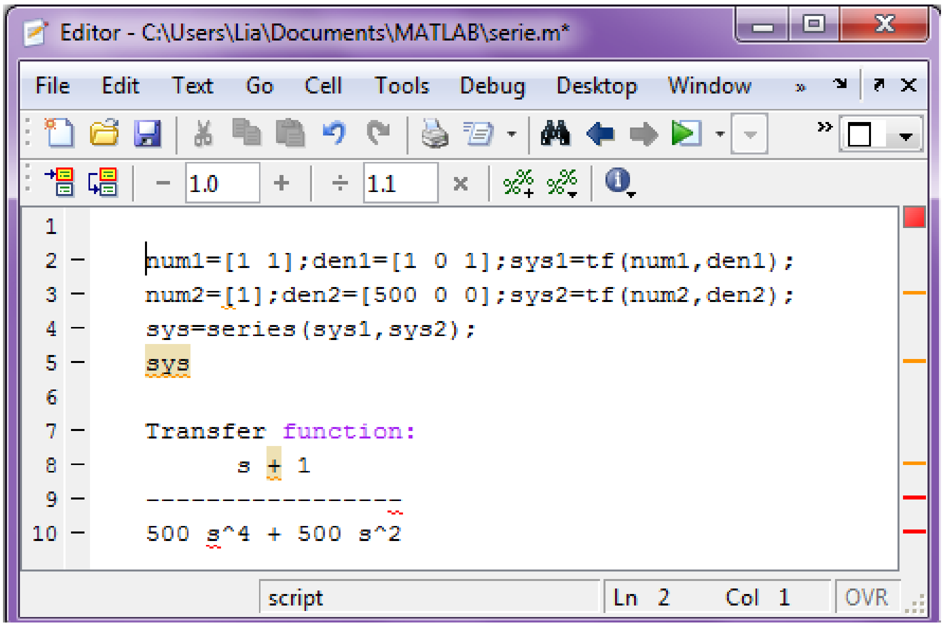



**Fig. 5.32 Fişierul şi rezultatul obţinut pentru calculul conexiunii serie**

## 5.8. Bibliografie

[5.1] Babuţia, I., Petruescu, M., Automatizări electronice în construcţia de maşini, Editura Facla, Timişoara, 1983
[5.2] Bejan, I., Balaban, G., Automatizări şi telecomenzi în electroenergetică, EDP Bucureşti, 1976
[5.3]Bolton, W., Mechatronics, Pearson Education Limited, 2003
[5.4] Dolga, V., Proiectarea sistemelor mecatronice, Ed. Politehnica, Timişoara, 2008
[5.5]Dorf, R.C., Bishop, R.H., Modern Control Systems, Pearson Studium, ISBN 3-8273-7162-7, 2006
[5.6]Iserman, R., Mechatronische Systeme, Springer-Verlag, Berlin, ISBN 978-3-540-32336-5, 2008
[5.7]Najim, K., Control of Continuous Linear Systems, ISTD Ltd, 2006
[5.8] Savant, C.J. Jr, Calculul sistemelor automate, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967
[5.9] Sebastian, L., Automatica, EDP Bucureşti, 1973
[5.10] ***, Control System Toolbox, Version 7, The MathWorks, Inc, 2006