

## 3. MODELAREA SISTEMELOR FIZICE

### 3.1. Introducere

Observarea și măsurarea au constituit principalele mijloace prin care s-au desfășurat activități de cunoaștere.

Prin apariția teoriei sistemelor s-au deschis căile apariției și dezvoltării **modelării**.

În etapa de analiză a sistemului, construcția modelului se încadrează într-o succesiune de etape rezultând în final modelul matematic asociat sistemului fizic.

- *Definirea “granițelor” sistemului.* Toate sistemele fizice lucrează în interacțiune cu alte sisteme. Din acest motiv este necesar să se definească aceste granițe.
- *Definirea ipotezelor simplificatoare / a aproximațiilor admise.* Modelul trebuie să includă ce este esențial din sistemul fizic. Dacă sistemul este prea complicat utilitatea sa devine discutabilă.
- *Stabilirea ecuațiilor de echilibru / bilanț pentru sistemul fizic (sau pentru subsistemele componente) și definirea condițiilor suplimentare.*

Modul de abordare trebuie să aibă în vedere însă și specificul fiecărui tip de sistem în parte. De exemplu, echilibrul energetic – *energy balance* – poate avea o interpretare fizică și una filozofică. Interpretarea fizică a echilibrului are semnificații specifice domeniului de aplicație: *fizică, biologie, inginerie, economie*, etc.

### 3.2. Legi, modele și teorii fizice

Caracteristica fundamentală a sistemelor fizice o reprezintă materialitatea lor. Aceasta implică mișcarea și existența obiectivă în spațiu și timp a sistemelor fizice. Studiul sistemelor și a proceselor fizice are la bază principiul cauzalității: fiecare stare din lumea obiectivă este efectul unor cauze care determină univoc starea respectivă.

Sistemele fizice prezintă proprietăți mecanice, termice, electrice, magnetice, etc., care pot fi analizate prin etape succesive: observație și măsurare.

Concluziile obținute în cadrul experimentelor permit generalizări referitoare la legăturile obiective între fenomenele fizice și a relațiilor existente între mărimile fizice. Aceste legături și relații se exprimă prin propoziții, textual. Unele dintre acestea au un

caracter fundamental și constituie enunțuri axiomatice: legi, principii, postulate. Alte enunțuri au un caracter derivat din primele și constituie teoreme.

Pornind de la cele precizate, legile fizicii (în sens larg, mecanic, electric, termic, etc.) se pot clasifica în:

- *Legi de stare* – care exprimă relațiile dintre mărimile de stare și conexiuni dintre evenimente de stare simultane. Acestea se exprimă prin ecuații de stare: legea lui Ohm, ecuația de stare a gazelor, etc.
- *Legi de evoluție* – care exprimă legături între evenimente care nu sunt simultane. Ele se exprimă prin ecuații de evoluție sub forma unor ecuații cu derivate în raport cu timpul: legea a II-a a lui Newton, etc.
- *Legi de conservare* – care exprimă conservarea unor mărimi fizice pe parcursul unor transformări și în anumite condiții: legea conservării sarcinii electrice, legea conservării energiei, etc.

În expresiile matematice ale legilor și teoremelor intervin și constante fizice de proporționalitate:

- Constante de material – depind de natura fizică a sistemului iar legile care le conțin se numesc legi de material;
- Constante universale – nu depind de natura fizică a sistemului iar legile care le conțin se numesc legi fizice generale.

Stările și fenomenele fizice se caracterizează cantitativ cu ajutorul mărimilor fizice. Din punctul de vedere al felului cum se introduc în fizică, mărimile fizice se împart în:

- mărimi primitive, care se introduc direct pe cale experimentală: lungimea, temperatura, masa, etc.;
- mărimi derivate, care se pot defini cu ajutorul altora presupuse cunoscute: viteza, accelerația etc.

Experimental se constată că între mărimile primitive ale unui domeniu de cercetare există relații care exprimă raporturile obiective existente între fenomenele corespunzătoare aceluși domeniu.

Fiecare domeniu – mecanic, electric, termic, etc. – este caracterizat de un anumit număr de legi, teoreme etc.

Mecanica clasică se bazează pe un număr de legi (postulate, principii fundamentale) denumite și axiomele Mecanicii clasice:

- *principiul inerției* - enunțat de Galilei și reformulat de Newton care îl și denumește *Legea I*;
- *principiul independenței acțiunii forțelor* - indicat de Galilei este formulat de Newton care îl denumește *Legea II*;
- *principiul acțiunii și reacțiunii* – este formulat de Newton care îl denumește *Legea III*;

Un număr de enunțuri sunt recunoscute în literatură sub denumirea de teoreme: *teorema ariilor*, *teorema celor trei centre instantanee de rotație*, *teorema conservării energiei*, *teorema impulsului*, *teorema mișcării centrului de greutate*, *teorema variației energiei cinetice*, etc.

Teoria macroscopică a fenomenelor electrice și magnetice are 12 legi

importante: 9 sunt legi generale și 3 sunt legi de material (fig.3.1).

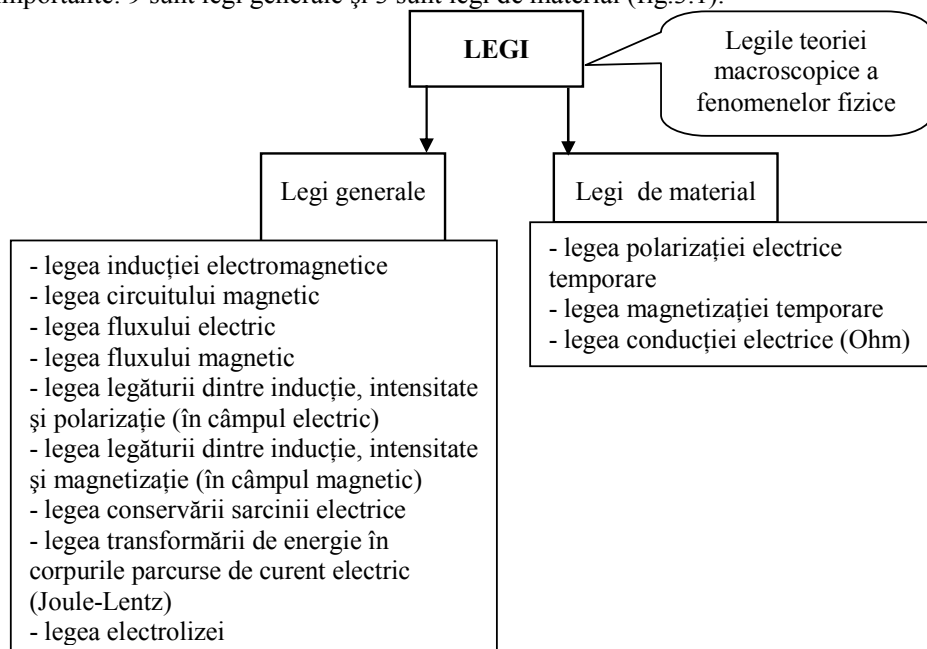


Fig. 3.1 Legi și teoria macroscopică a fenomenelor electrice și magnetice

### 3.3. Modelarea sistemelor

#### 3.3.1. Introducere în modelare

O noțiune importantă, similară cu cea de sistem, o reprezintă noțiunea de model. Formularea unei teorii se poate echivala cu “construirea modelului” iar teoria ar putea defini “modelul” realității analizate. Modelul va reprezenta sub o formă utilizabilă, aspectele esențiale ale sistemului existent. În domeniul tehnic modelul este întâlnit și utilizat printre altele și în scopul proiectării.

Semnificația noțiunii de *simulare* este corelată cu cea de model / modelare și diferă în funcție de contextul domeniului în care se utilizează. Din multitudinea de definiții, am ales două care le considerăm că exprimă cel mai bine conținutul conceptului:

- Un proces de imitare a unui fenomen real pe baza unui set de formule matematice [3.18], [3.26].
- Funcționarea / operarea unui model în aceeași manieră ca un sistem dat când acesta este caracterizat de un set de intrări [3.27].

Experimentatorul, în multe cazuri, a dobândit apriori unele cunoștințe printr-o înțelegere fizică a procesului ce se examinează. Acestea pot da informații asupra structurii unui model conceptual pentru acel proces și probabil chiar o cunoaștere aproximativă a parametrilor acestui model.

Avem nevoie de un model pentru comportare statică sau comportare dinamică, a unui model complet neliniar sau liniarizat ? Răspunsul la întrebare poate să implice criterii privind precizia dorită, abordarea dinamică sau statică etc. Modelul trebuie realizat separat de proces – cu hârtia și creionul – plecând de la legi fundamentale și experimente izolate, sau se poate lucra în cadrul procesului când ni se permite să efectuăm experiențe cu procesul existent ? Ce considerații economico-financiare trebuie avute în vedere ?

Din acest moment numărul de întrebări crește exponențial și problema se complică. Iată câteva dintre alte întrebări posibile:

- Cum se va aprecia calitatea modelului ?
- Cum se vor folosi în model toate cunoștințele pertinente ?
- Care este strategia optimă pentru a obține cunoștințele care lipsesc ?
- Cum se vor trata neliniaritățile ?
- Cum se poate exprima un sistem complex printr-unul simplu ?

### 3.3.2. Categorii de modele matematice

Clasificarea modelelor poate fi abordată pe baza mai multor criterii repartizate în două categorii, funcție de ponderea reprezentată: *ponderea de model sau cea de sistem* [3.18]. În prima categorie se pot include aspectul de esență (configurație geometrică sau comportament), materialitatea (abstract, ideal sau material, fizic), natura (conceptual, informațional, similar, analog) și structura (sintetic, structurat). Din a doua categorie se pot menționa: variația în timp ca semnal (continuu, discret, discontinuu), mod de descriere (orientat pe ecuații, orientat pe blocuri), predictibilitate (stochastic, determinist), variația în timp a parametrilor (static, dinamic), liniaritatea operatorilor (linear, neliniar).

Analizăm în continuare câteva categorii de modele:

- **Modele liniare și neliniare.** Distincția dintre cele două categorii este dată de principiul suprapunerii efectelor. Acesta este valabil numai în primul caz și se referă la relația dintre variabilele dependente de timp.
- **Modele parametrice și neparametrice.** Prima variantă are în vedere o presupusă descriere matematică a dinamicii procesului în “ spațiul parametrilor”. Coordonatele acestui spațiu sunt valorile numerice ale parametrilor modelului, considerați ca ieșiri ale acestuia. A doua variantă are în vedere modul de definire a sistemului astfel că problema modelării constă în a găsi transformarea de la spațiul funcțiilor de intrare la spațiul funcțiilor de ieșire și care caracterizează sistemul. În acest caz nu se folosește nici o informație despre natura fizică a sistemului iar modelul se numește model neparametric.
- **Modele intrare – ieșire și modele de stare.** Reprezentarea funcționalității unui sistem se poate realiza pe baza conceptului mărimii de intrare  $u(t)$ , a mărimii de ieșire  $y(t)$  și a mărimii de stare  $x(t)$ . Reprezentarea intrare - ieșire este avantajoasă în cazul sistemelor dinamice liniare pentru care se pot aplica transformările Laplace și Fourier. Reprezentarea pe bază de starea sistemului prezintă facilități în analiza și sinteza sistemelor automate în domeniul timpului.

- **Modele invariante și variate în timp.** Modelele invariante sunt cele construite pe baza unor parametri constanți.
- **Modele continue și modele discrete în timp**
- **Modele în domeniul timp și în domeniul frecvențelor**
- **Modele deterministe și modele stohastice.** Posibilitatea determinării cu exactitate a mărimii de ieșire pe baza unei mărimi de intrare cunoscute sau un model care nu conține elemente aleatoare și care determină în mod cert starea sau evoluția fenomenului studiat în funcție de variabilele luate în considerare definesc un *model determinist*. Modelul în care intervin, pe lângă variabilele măsurabile sau observabile, una sau mai multe variabile aleatoare, corespunzător efectului posibil al factorilor necontrolați prin variabilele specificate în model definește un *model stohastic*.
- **Modele cu parametri concentrați și modele cu parametri distribuiți.** Denumirea de parametri distribuiți este opusă celei de parametri concentrați și are în vedere modul în care structura sistemului este luată în considerare. Mecanica teoretică admite studiul unui corp ca fiind redus la examinarea mișcării unui punct material atunci când nu ne interesează forma corpului și dimensiunile acestuia. Masa corpului se consideră concentrată în punctul material. Un exemplu edificator este prezentat în figura 3.2 în care masa autoturismului se consideră concentrată în centrul de masă.

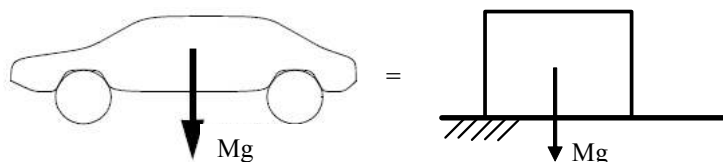


Fig. 3.2 Exemplificarea parametrului concentrat

Adeseori însă, în calculul de mecanic masa unui corp nu se poate considera ca fiind concentrată fiind necesară admiterea unei *distribuții* a acesteia pe o suprafață sau pe o lungime. Exemple similare se pot da și pentru sistemele hidraulice, termice etc.

Domeniului electric îi sunt specifice circuite formate din diverse componente: rezistoare, bobine, condensatoare, diode, tranzistoare, amplificatoare operaționale, baterii, motoare s.a.m.d. Unui circuit fizic format din astfel de componente i se asociază circuitul electric alcătuit din modele idealizate denumite elemente de circuit pentru care se consideră un parametru concentrat fiecărei componente în parte. În alte cazuri este necesară o abordare spațială a modului de reprezentare a parametrilor unor componente și în acest caz avem un model cu parametrii distribuiți.

- **Modele cu o singură intrare, o singură ieșire și modele multivariabile.** Funcție de sistemul analizat se pot realiza modele o intrare – o singură ieșire (SISO), modele cu mai multe intrări – o singură ieșire (MISO) sau mai multe intrări – mai multe ieșiri (MIMO).

Un model matematic se poate încadra în mai multe astfel de categorii. Urmează ca utilizatorul / proiectantul să decidă asupra acelu model care să permită atingerea scopului urmărit.

### 3.3.3. Elementele modelului matematic

Sistemele fizice pot fi analizate în baza unui concept comun legat de energia transferată între intrarea și ieșirea sistemului. În acest concept energia este introdusă în sistem prin intermediul unei borne / poartă (*port*) energetice. O bornă asemănătoare se poate considera și pentru evaluarea răspunsului sistemului (fig.3.3)[3.24]. Este necesară în acest concept și precizarea “variabilelor de sistem” care să definească cât, cum și în ce sens are loc transferul energetic.

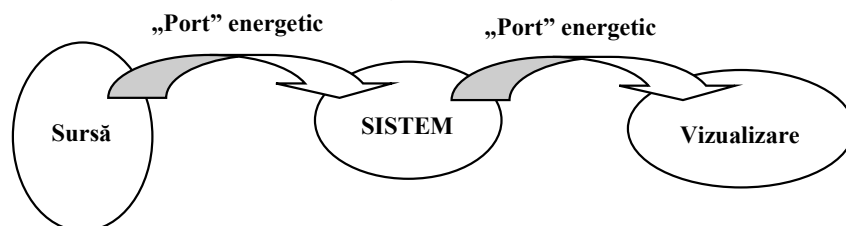


Fig. 3.3 Introducerea energiei în sistem și portul energetic

Un exemplu simplu de transfer energetic între o sursă de energie (de ex. o baterie electrică, o sursă de putere din laborator, etc.) și o simplă rezistență electrică este prezentată în figura 3.4. În contextul celor specificate anterior și a figurii 3.3 semnificațiile elementelor componente din figura 3.4 este următoarea: sursa de putere este echivalentă sursei, rezistorul este sistemul iar „poarta” energetică coincide cu perechea de fire conductoare. Puterea debitată pe rezistor este :

$$P = UI \quad (3.1)$$

iar energia livrată între momentele de timp  $t = 0$  și  $t = t_1$  va fi:

$$W = \int_0^{t_1} UI dt \quad (3.2)$$

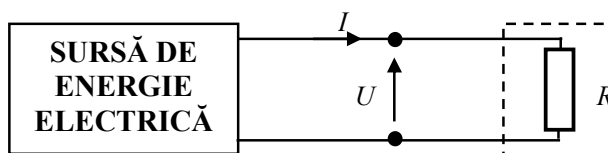


Fig. 3.4 Transmisia de energie într-un circuit electric simplu

Exemple asemănătoare se pot considera și pentru sisteme de altă natură fizică. Luând în considerare aceste considerații se poate concluziona că este necesară prezentarea unei analogii între diversele sisteme fizice.

Pentru a extinde conceptul de transfer energetic este necesar să fie examinate și componentele în baza cărora se realizează construcția sistemului fizic.

Studiile, referitoare la abordarea concentrată a parametrilor unor sisteme, conduc la următoarea clasificare a elementelor de manipulare a energiei [3.24]:

- *surse de energie;*
- *elemente pentru stocare de energie;*
- *elemente disipatoare de energie.*

**3.3.4. Dezvoltarea modelului dinamic**

Echilibrul energetic – *energy balance* – poate avea semnificații specifice domeniului de aplicație: *fizică, biologie, inginerie, economie, etc.*

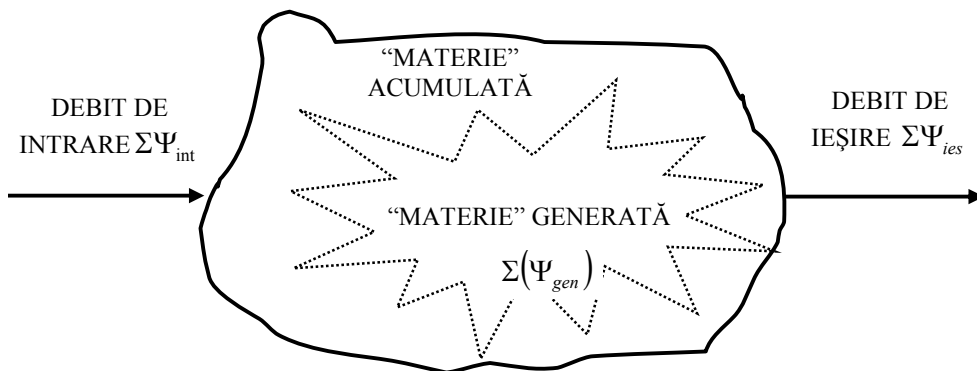
Energia unui sistem fizic este o mărime fizică de stare, caracterizând sistemul într-o stare staționară. Din energia totală a unui sistem se pot separa anumite forme de energie, care depind de o anumită clasă de mărimi de stare – mărimi mecanice, electrice, magnetice etc. Modificarea stării unui sistem fizic este denumită transformare. Fiecare transformare conduce la modificarea valorii diferitelor forme de energie care caracterizează sistemul fizic. În conformitate cu cele specificate în *fizică*, bilanțul energetic este o prezentare sistemică a fluxului energetic și a transformărilor din sistem. Baza teoretică este prima lege a termodinamicii: “ Variația energiei interne  $\Delta W_i$  a unui sistem fizic, la trecerea dintr-o stare în alta  $W_2 - W_1$  este egală cu suma dintre variația lucrului mecanic  $\Delta L$  și variația cantității de căldură  $\Delta Q$  schimbată de sistem cu exteriorul”.

Într-o formă generalizată, bilanțul “material” se poate exprima prin: “ *rata de schimb a materiei în sistem este egală cu fluxul net a materialului*” (fig.3.5). Termenul de “materie” are o semnificație generalizată definind energie, masă, impuls.

Fluxul net este suma algebrică între fluxul de intrare și cel de ieșire la care se adaugă “materia” generată în sistem (de ex.: generare de energie prin reacții chimice).

$$\frac{d(\text{"material"})}{dt} = \Sigma(\Psi_{int}) - \Sigma(\Psi_{ies}) + \Sigma(\Psi_{gen}) \tag{3.3}$$

În domeniul mecanic, multe probleme de analiză se rezolvă folosind teoremele bilanțului / echilibrului energetic / căldură, echilibrului de masă, echilibrului impulsului, echilibrului entropiei.



**Fig. 3.5 Bilanțul “material”**

Ecuția fundamentală a dinamicii unui rigid, sub acțiunea unor solicitări reale – exterioare active, exterioare pasive și interioare - are o formă recunoscută:

$$dm \cdot \bar{a} = dF_a + dF_p + dF_{int} \tag{3.4}$$

Această ecuație conduce, prin unele transformări la o serie de teoreme fundamentale ale dinamicii rigidului:

- *Teorema energiei sub forma generală:*

$$\frac{dE}{dt} = P_a + P_p \quad (3.5)$$

cu următoarea formulare: derivata în raport cu timpul a energiei cinetice a unui rigid în mișcare este egală cu suma puterilor mecanice ale tuturor solicitărilor exterioare, active și pasive, la care este supus rigidul.

Notând cu  $E_c$  **energia cinetică** a sistemului la un moment dat  $t$ , *teorema energiei cinetice* sub formă diferențială se scrie sub forma:

$$dE_c = dL \quad (3.6)$$

ceea ce înseamnă că variația elementară a energiei cinetice a sistemului are loc prin intermediul lucrului mecanic elementar al tuturor forțelor ce acționează asupra sistemului la momentul  $t$ : forțe elastice, forțe de amortizare, forțe perturbatoare.

Teorema energiei se poate formula în mod matematic sub forma:

$$d(E_c + E_p) = dE_m = dL' \quad (3.7)$$

unde  $E_m = E_c + E_p$  este energia mecanică a sistemului. Variația elementară a energiei mecanice are loc prin intermediul lucrului mecanic elementar al forțelor de amortizare și perturbare ce acționează asupra sistemului [3.23].

- *Teorema conservării energiei mecanice* se poate scrie sub forma:

$$E_m = E_c + E_p = E_{c0} + E_{p0} = \text{const.} \quad (3.8)$$

- *Teorema impulsurilor sub forma generală:*

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F}_a + \bar{F}_p \quad (3.9)$$

cu formularea: derivata, în raport cu timpul a impulsului unui rigid în mișcare, este egală cu rezultanta tuturor forțelor exterioare, active și pasive, care acționează asupra rigidului respectiv. Relația anterioară, după transformări, permite enunțarea *legii de conservare a impulsului*:

$$\bar{p} = M \cdot v_G = \bar{p}_0 \quad (3.10)$$

unde  $p_0$  este impulsul inițial al rigidului,  $M$  este masa rigidului iar  $v_G$  este viteza centrului de masă.

**Energia electromagnetică** este forma de energie care depinde de mărimile de stare ale câmpului electromagnetic. Ea se poate descompune în energie electrică, care depinde numai de mărimile electrice ale câmpului și energia magnetică care depinde de mărimile magnetice ale câmpului. Concepția despre câmpul electromagnetic considerat ca sistem fizic capabil să schimbe, să acumuleze și să transmită energie, permite să se



interpreteze energetic o consecință a ecuațiilor lui Maxwell, numită *teorema energiei electromagnetice*.

*Legea de conservare a sarcinii electrice adevărate.* Intensitatea instantanee a curentului electric de conducție  $i_{\Sigma}$ , care iese din orice suprafață închisă  $\Sigma$ , este egală cu viteza instantanee de scădere în timp a sarcinii electrice adevărate  $q_{\Sigma}$  din interiorul suprafeței presupuse antrenată de corpuri în mișcarea lor:

$$i_{\Sigma} = -\frac{dq_{\Sigma}}{dt} \quad (3.11)$$

Legea de conservare a sarcinii electrice (raportată la o suprafață închisă) are o formă de exprimare asemănătoare cu rel. (3.9).

Din relația (3.11) pentru regim staționar rezultă prima teoremă a lui Kirchhoff pentru un nod de rețea:

$$\sum_K I_K = 0 \quad (3.12)$$

A doua relație cu utilitate extinsă, pentru regim staționar, este a doua teoremă a lui Kirchhoff :

$$\sum_k U_{ek} = \sum_k R_k \cdot I_k \quad (3.13)$$

În interiorul unei suprafețe închise delimitată dintr-un câmp magnetic, în care se găsesc corpuri imobile ( $v = 0$ ), cu proprietăți de material liniare este localizată o energie electromagnetică  $W_{e-m}$ :

$$W_{e-m} = \iiint_{V_{\Sigma}} \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} dV \quad (3.14)$$

Din principiul de conservare al energiei rezultă că orice variație în timp a stării sistemului fizic, pe care îl constituie câmpul electromagnetic din interiorul suprafeței admise, trebuie să fie egală cu puterea cedată de acest sistem altor sisteme fizice:

$$-\frac{dW}{dt} = P_I + P_{\Sigma} \quad (3.15)$$

unde  $P_I$  este puterea transmisă de câmp corpurilor în procesul de conducție iar  $P_{\Sigma}$  este puterea transmisă în câmp prin suprafața închisă.

Într-o transformare de energie electrică în energie mecanică apare și o conversie de energie electrică în energie termică prin efect Joule. Acest efect are un caracter ireversibil. În bilanțul energetic intervin astfel forme de energie electrică, electrostatică, magnetică, mecanică și termică :

$$dW_{el} = dW_{mec} + dW_t + dW_{es} + dW_{mag} \quad (3.16)$$

unde termenii reprezintă:

- variația energiei electrice :

$$dW_{el} = \sum_j u_j \cdot i_j \cdot dt \quad (3.17)$$

- variația energiei mecanice :

$$dW_{mec} = \sum_k F_k \cdot dx_k \quad (3.18)$$

- variația energiei termice :

$$dW_t = \sum_j R_j \cdot i_j^2 \cdot dt \quad (3.19)$$

- variația energiei magnetice  $dW_{mag}$ .
- variația energiei electrostatice (este localizată în câmpul electric din spațiul dintre plăcile unui condensator):

$$dW_{es} = \sum_i u_i \cdot Q_i - \sum_m F_m \cdot dx_m \quad (3.20)$$

unde  $Q_i$  are semnificația sarcinii electrice.

Teorema forțelor generate în câmpul electromagnetic sunt o expresie a extensiei legilor de bilanț energetic în acțiunea de modelare matematică a unui sistem electromecanic. Forța generalizată  $X_k$ , ce se exercită în câmpul electrostatic produs de un sistem de « h » conductoare, încărcate cu sarcini adevărate și situate într-un mediu dielectric liniar, asupra unuia dintre aceste conductoare și care acționează în sensul creșterii uneia dintre coordonatele sale generalizate  $x_k$  este:

$$X_k = - \left( \frac{\partial W}{\partial x_k} \right)_{q=ct} = \left( \frac{\partial W}{\partial x_k} \right)_{V=ct} \quad (3.21)$$

unde energia electrică a sistemului este exprimată în primul caz în funcție de coordonatele generalizate  $x_k$  și de sarcinile  $q_k$ , iar în al doilea caz în funcție de coordonatele generalizate și potențialele  $V_k$ .

### 3.3.5. Echilibrul masei de material

În multe procese industriale este important modelul echilibrului masei de material. Ecuația echilibrului masei de material are forma structurală:

$$masa\ acumulata = masa\ de\ intrare - masa\ de\ iesire \quad (3.22)$$

Echilibrul masei se poate aborda ca un echilibru a masei totale, un echilibru a masei elementelor componente, etc.

#### 3.3.5.1. Exemplul de calcul

Se consideră un rezervor cu lichid prezentat în figura 3.6. Se cere să se determine variante de model matematic a sistemului imaginat.

Reprezentarea fizică a sistemului, cu precizarea parametrilor, este dată în figura 3.7. Delimitarea sistemului este sugerată prin schema bloc din figura 3.7 unde debitul

de intrare  $Q_1$  și debitul de ieșire  $Q_2$  sunt variabilele de intrare în sistem iar înălțimea  $h$  a lichidului este variabila de ieșire.

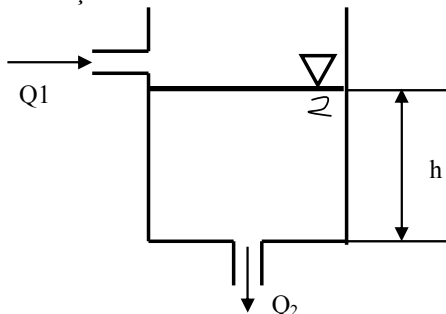


Fig. 3.6 Delimitarea sistemului

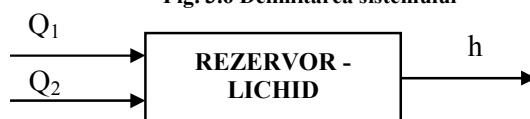


Fig. 3.7 Reprezentarea sistemică a rezervorului de lichid

Construcția modelelor matematice are în vedere:

- Ipoteze simplificatoare:
  - Densitatea  $\rho$  a fluidului este constantă;
  - Lichidul este incompresibil;
  - Rezervorul este poziționat vertical;
  - Secțiunea transversală a rezervorului este circulară, constantă;
- Parametrii din sistem:
  - Debitul volumic de intrare  $Q_1$  [ $m^3/s$ ] și a celui de ieșire  $Q_2$  [ $m^3/s$ ];
  - $h$  [m] – nivelul lichidului în rezervor;
  - $m$  [kg] – masa de lichid;
  - $A$  [ $m^2$ ] – aria transversală;
  - $V$  [ $m^3$ ] – volumul de lichid.

Ecuția de bilanț (3.3) aplicată pentru *masa unui sistem* poartă de numirea de echilibrul masic și are forma :

$$\frac{dm(t)}{dt} = \sum_i Q_{mi} \quad (3.23)$$

unde  $m$  [kg] este masa,  $Q_{mi}$  [kg/s] este debitul masic iar  $t$  [s] este parametrul timp. Particularizată pentru cazul echilibrul masic de lichid din rezervor, ecuația anterioară are forma :

$$\frac{dm(t)}{dt} = \rho Q_1(t) - \rho Q_2(t) \quad (3.24)$$

Ecuția diferențială (3.24) (în  $m$ ) este modelul matematic al sistemului iar  $\rho$  este parametrul modelului. Există o condiție suplimentară pentru ecuația anterioară,  $m \geq 0$ . Prin rezolvarea analitică sau numerică a ecuației (3.24) se obține modul de variație a

masei de lichid în timp.

Între parametrii geometrici ai rezervorului și masa de lichid din rezervor există relația simplă:

$$m(t) = \rho V(t) = \rho A h(t) \quad (3.25)$$

Ecuția diferențială (3.24) se poate transforma, pe baza relației (3.25):

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A} \cdot [Q_1(t) - Q_2(t)] \quad (3.26)$$

cu condiția suplimentară  $h \geq 0$ . Ecuția diferențială (3.26) este o altă formă de exprimare a modelului matematic pentru sistemul analizat.

Admițând că variabila  $Q_2$  depinde de nivelul lichidului din rezervor – nu mai este o variabilă independentă, se poate scrie:

$$Q_2(t) = K \cdot \sqrt{\rho g h(t)} \quad (3.27)$$

astfel că bilanțul masic poate fi exprimat prin ecuația diferențială:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \rho Q_1(t) - \rho K \sqrt{\rho g h(t)} \quad (3.28)$$

Ecuția diferențială (3.28) se constituie într-un nou model matematic al rezervorului de lichid.

**Observație.** Modelul construit poate prezenta și alte dezvoltări dacă se ia în considerare și influența rezistenței de curgere a lichidului asupra debitului realizat.

### 3.3.5.2. Exemplul de calcul

Se consideră un rezervor aflat într-un proces dinamic de alimentare cu lichid (fig.3.8). Debitul masic de intrare și respectiv ieșire sunt  $q_{in}$  [ $kg \cdot s^{-1}$ ] și  $q_e$  [ $kg \cdot s^{-1}$ ]. Se cere să se scrie ecuația de echilibru care caracterizează sistemul.

Ecuția care descrie echilibrul din sistem este:

$$\frac{dM}{dt} = q_{in} - q_e \quad (3.29)$$

unde  $m$  [ $kg$ ] este masa totală din rezervor.

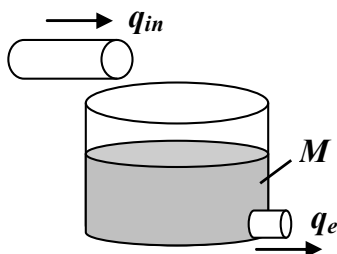


Fig. 3.8 Rezervor cu o singură componentă

### 3.3.5.3. Exemplul de calcul

Se consideră sistemul din figura 3.9 prevăzut cu o supapă de alimentare  $V$ , două rezervoare și două puncte de măsurare  $R_1$  și  $R_2$ . Semnificațiile notațiilor sunt identice cu cele prezentate anterior.

Se cere determinarea modelului matematic al acestui sistem.

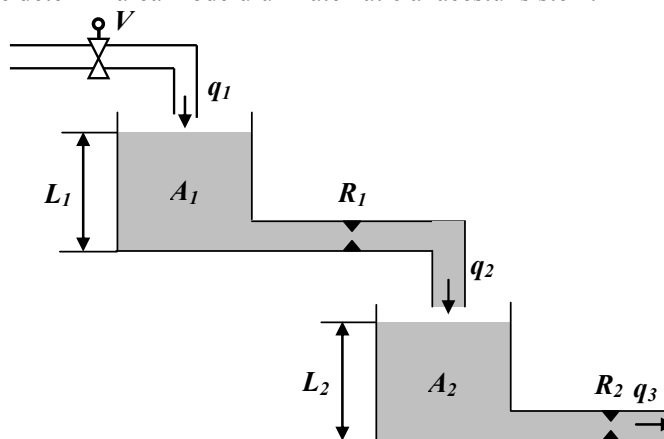


Fig. 3.9 Sistem cu două rezervoare

Sistemul include o singură masă (lichid) de transferat. Pe durata de timp  $dt$ , echilibrul masei de lichid are la bază următoarele ecuații:

$$q_1 dt - q_2 dt = \text{acumulare primul rezervor} \quad (3.30)$$

$$q_2 dt - q_3 dt = \text{acumulare rezervorul doi} \quad (3.31)$$

Acumularea corespunde variației volumului de lichid din fiecare rezervor:

- primul rezervor:  $A_1 dL_1$
- al doilea rezervor:  $A_2 dL_2$

unde  $A_1$  și  $A_2$  reprezintă ariile transversale ale celor două rezervoare.

Din ecuațiile anterioare se pot scrie relațiile:

$$q_1 - q_2 = A_1 \frac{dL_1}{dt} \quad (3.32)$$

$$q_2 - q_3 = A_2 \frac{dL_2}{dt} \quad (3.33)$$

În acord cu legea lui Bernoulli, referitor la debitul de ieșire a unui lichid din rezervor, se pot scrie relațiile:

$$q_2 = k_1 \sqrt{L_1} \quad (3.34)$$

$$q_3 = k_2 \sqrt{L_2} \quad (3.35)$$

În final se obțin relațiile:

$$q_1 - k_1 \sqrt{L_1} = A_1 \frac{dL_1}{dt} \quad (3.36)$$

$$k_1 \sqrt{L_1} - k_2 \sqrt{L_2} = A_2 \frac{dL_2}{dt} \quad (3.37)$$

Model matematic este neliniar și impune liniarizarea.

#### 3.3.5.4. Exemplul de calcul

Se consideră un rezervor cu lichid în amestec cu o concentrație  $C [kgm^{-3}]$  transferată. Se cere exprimarea matematică a echilibrului masic a componentei (fig.3.10).

Considerând volumul de lichid  $V$ , se poate exprima masa totală a componentei din rezervor:

$$\frac{d(VC)}{dt} = qC_1 - qC \quad (3.38)$$

Dacă volumul este constant, relația anterioară se poate scrie sub forma:

$$\frac{V}{q} \frac{dC}{dt} = -C + C_1 \quad (3.39)$$

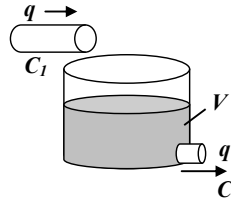


Fig. 3.10 Dinamica concentrației de lichid într-un rezervor

Notând, într-o analogie cu un circuit electric R-L, constanta de timp cu  $\tau = V/q$  se poate scrie soluția ecuației diferențiale (3.38):

$$C(t) = C_1 \cdot \left( 1 - e^{-t/\tau} \right) \quad (3.40)$$

#### 3.3.5.5. Exemplul de calcul

Se consideră sistemul din figura 3.14. Acesta este compus din două rezervoare care comunică între ele. Fiecare rezervor are posibilitatea controlului debitelor de intrare  $q_1$  și  $q_2$  ale fluidului. Secțiunea transversală a celor două rezervoare se consideră constantă și egală cu  $A [m^2]$ . Se admite că debitul de ieșire  $q_3$  este un factor perturbator care acționează asupra sistemului. Schema bloc a sistemului este prezentată în figura 3.11. Acest sistem este caracterizat prin două variabile de intrare, două variabile de ieșire și mărimea perturbatoare  $q_3$ . (fig.3.12).

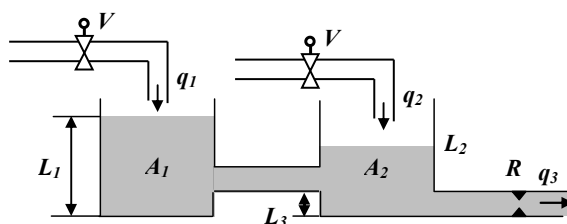


Fig. 3.11 Două rezervoare comunicante

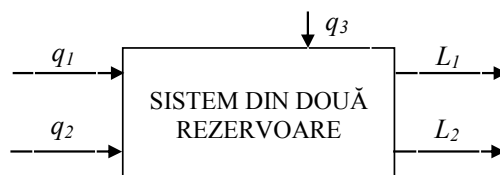


Fig. 3.12 Schema bloc a sistemului

Pentru stabilirea modelului este necesară analiza echilibrului masei acumulate în fiecare rezervor în intervalul de timp  $dt$ :

- Variația volumului de lichid conținut în primul rezervor este egală cu diferența dintre volumul de lichid conținut asociat cu debitul de alimentare a acestuia  $q_1$  și volumul de lichid schimbat cu cel de-al doilea rezervor (debit  $q$ ):

$$(q_1 \pm q) \cdot dt = \text{variația volumului de lichid din primul rezervor} \quad (3.41)$$

- Variația volumului de lichid conținut în al doilea rezervor este egală cu diferența dintre volumul de lichid conținut asociat cu debitul de alimentare a acestuia  $q_2$  plus volumul schimbat cu primul rezervor și volumul de lichid eliminat  $q_3$

$$(q_1 \pm q - q_2) \cdot dt = \text{variația volumului de lichid din al doilea rezervor} \quad (3.42)$$

Având în vedere cele precizate anterior, relația lui Bernoulli (pentru dependența debitului de fluid care se scurge dintr-un rezervor și înălțimea fluidului în rezervor) și stabilind sensul de schimb al fluidului dintre rezervorul 1 și 2 prin semnul diferenței  $[L_1(t) - L_2(t)]$  se stabilește sistemul de ecuații care descrie dinamica sistemului analizat:

$$A \frac{dL_1(t)}{dt} = q_1 - \text{sgn}[L_1(t) - L_2(t)] \cdot k_1 \cdot \sqrt{|L_1(t) - L_2(t)|} \quad (3.43)$$

$$A \frac{dL_2(t)}{dt} = q_2 + \text{sgn}[L_1(t) - L_2(t)] \cdot k_1 \cdot \sqrt{|L_1(t) - L_2(t)|} - k_2 \cdot \sqrt{|L_2(t) - L_3(t)|}$$

### 3.3.6. Bilanțul energetic într-un sistem termic

#### 3.3.6.1. Introducere

Legea bilanțului (3.3) aplicabilă sistemelor termice devine *ecuația bilanțului*

energetic:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \sum_i Q_i(t) \quad (3.44)$$

unde  $E$ [J] este energia termică,  $Q_i$  [J/s] este fluxul energetic iar  $t$ [s] este timpul.  
Energia termică se definește printr-o relație de forma:

$$E = cmT = c\rho VT = CT \quad (3.45)$$

unde  $T$  [K] este temperatura,  $c$  [J/(kgK)] este căldura specifică,  $m$ [kg] este masa,  $V$ [m<sup>3</sup>] este volumul,  $\rho$ [kg/m<sup>3</sup>] este densitatea iar  $C$  [J/K] este capacitatea calorică. Ecuația bilanțului energetic se poate astfel scrie:

$$C \frac{dT}{dt} = \sum_i Q_i(t) \quad (3.46)$$

### 3.3.6.2. Exemplet de calcul

Se consideră sistemul termic prezentat în figura 3.13 în care lichidul este adus la temperatura  $T_2$ .

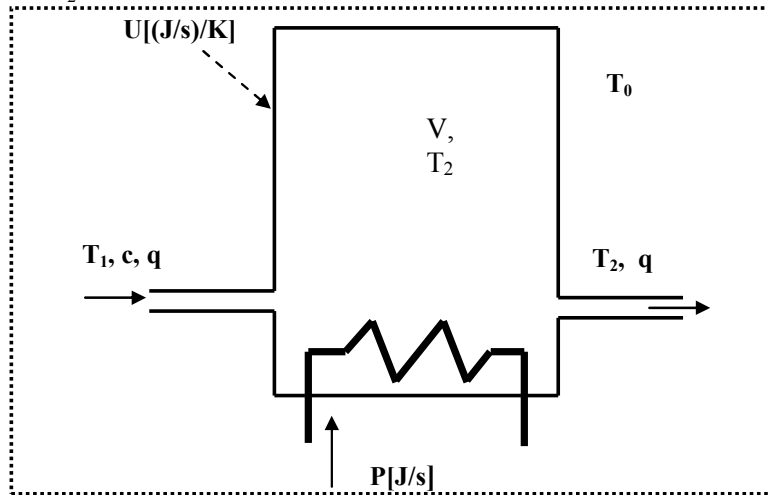


Fig. 3.13 Sistemul termic

Analiza sistemului are loc admitând următoarele ipoteze:

- lichidul din rezervor este omogen (sistemul de omogenizare nu este reprezentat);
- debitul la intrare și ieșire sunt egale, rezervorul fiind plin cu lichid;

În mod ideal, elementul de încălzire nu stochează energie ci o transferă integral lichidului. În cazuri reale trebuie luată în considerare eficiența acestui transfer.

Semnificația notațiilor este următoarea:  $P$  [J/s] este puterea preluată de lichid de la elementul de încălzire;  $T_0$  este temperatura mediului ambiant.

Echilibrul energetic se bazează pe schimbul următoarelor fluxuri energetice:

- energia preluată de lichid de la elementul de încălzire :



$$Q_1 = P(t) \quad (3.47)$$

- energia înmagazinată în lichidul de intrare:

$$Q_2 = cq(t) \cdot T_1(t) \quad (3.48)$$

- energia înmagazinată în lichidul de ieșire:

$$Q_3 = cq(t) \cdot T_2(t) \quad (3.49)$$

- energia schimată de sistemul termic cu mediul exterior (înspre sau de la mediul exterior):

$$Q_4 = U \cdot [T_0(t) - T_2(t)] \quad (3.50)$$

Ecuția (3.44) pentru bilanțul energetic se particularizează sub forma:

$$\frac{dE(t)}{dt} = Q_1 + Q_2 - Q_3 + Q_4 \quad (3.51)$$

și ținând cont de (3.44) – (3.50) devine :

$$c\rho V \frac{dT_2}{dt} = P + cqT_1 - cqT_2 + U \cdot (T_0 - T_2) \quad (3.52)$$

sau

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{1}{c\rho V} \cdot [P + cqT_1 - cqT_2 + U \cdot (T_0 - T_2)] \quad (3.53)$$

Ecuția bilanțului energetic (3.53) se poate particulariza dacă:

- sistemul termic este izolat față de mediu, astfel că  $Q_4 = 0$  ;
- dacă se consideră randamentul elementului de încălzire, puterea transferată va fi :

$$P(t) = \eta \cdot P_c(t) \quad (3.54)$$

### 3.3.7. Bilanțul energetic într-un circuit electromagnetic

Considerăm circuitul magnetic liniar din figura 3.14 compus din cadrul magnetic “1” și înfășurarea “2” având  $N$  spire și rezistența electrică  $R$ . Înfășurarea este alimentată la tensiunea  $u(t)$  și este parcursă de curentul  $i(t)$ .

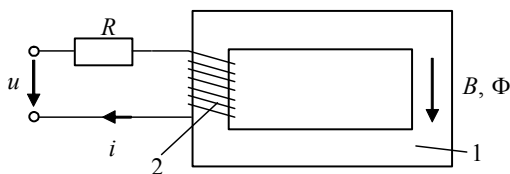


Fig. 3.14 Circuit magnetic liniar

Ecuțiile circuitului magnetic liniar:

$$u = Ri + N \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.55)$$

$$N\Phi = Li \quad (3.56)$$

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (3.57)$$

permit după înlocuiri, înmulțire cu  $idt$  și integrare să se obțină:

$$uidt = Ri^2 dt + nid\Phi \quad (3.58)$$

$$\int_0^t uid\tau = \int_0^t Ri^2 d\tau + \int_0^t nid\Phi \quad (3.59)$$

Această relație scoate în evidență bilanțul energetic din circuitul analizat: primul termen reprezintă energia furnizată de sursă, al doilea termen cuantifică energia disipată sub formă termică iar al treilea termen este echivalent energiei magnetice stocate în circuitul magnetic.

### 3.4. Modele în aplicațiile mecatronice

#### 3.4.1. Introducere

Conceptul de „mecatronică” și implicit de „sistem mecatronic” a generat controverse, discuții, analize și diverse abordări. Răspunsurile la modul de definire a mecatronicii au apărut în timp prin diverse definiții abordate la nivelul colectivelor de cercetare și proiectare și care au fost prezentate în capitolul 2.

Modul de reprezentare și identificare a elementelor componente este extrem de divers. O variantă de reprezentare pentru un sistem mecatronic este ilustrată în figura 3.15 [3.5]. Se evidențiază prezența a patru subsisteme componente: subsistemul mecanic, subsistemul informațional, subsistemul electric și subsistemul de calcul.

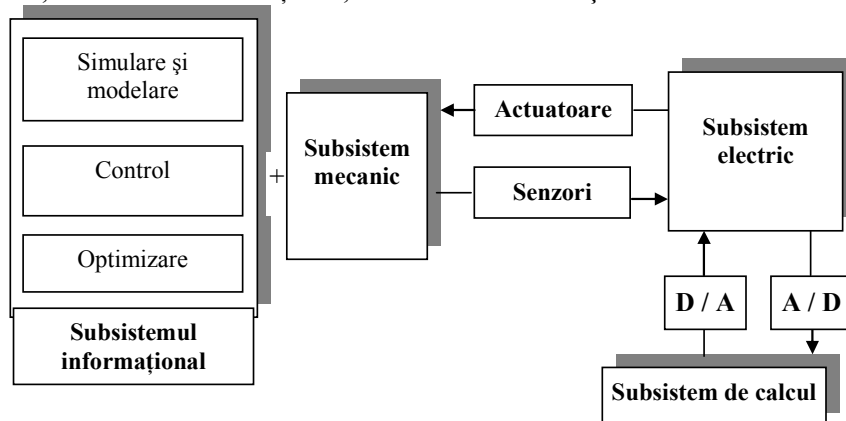


Fig. 3.15 Sistemul mecatronic

Indiferent de abordările mai mult sau mai puțin complexe avute în vedere, se pot preciza detaliile generale pentru sistemul mecanic și cel electric din componența hipersistemului mecatronic.

### 3.4.2. Modelul sistemului mecanic

#### 3.4.2.1. Generalități privind sistemul mecanic

Lumea fizică este alcătuită din materie în permanentă mișcare și transformare în spațiu și timp. Cea mai simplă formă de mișcare a materiei o constituie deplasarea reciprocă a corpurilor materiale de dimensiuni uzuale. Sistemul mecanic este implicat în transmiterea mișcării cu anumiți parametri. Aceste sisteme se clasifică în sisteme *rigide, deformabile și fluidice*.

*Sistemele de corpuri rigide* se referă la corpuri și legături perfect rigide caracterizate prin aceea că distanțele relative dintre elementele care le alătuiesc nu se modifică în procesul mișcării mecanice. Într-o serie din sistemele actuale această categorie este mai puțin posibil de utilizat.

*Sistemele deformabile* iau în considerare deformațiile din sistem pe parcursul desfășurării procesului. Analiza materialelor recomandate pentru aceste sisteme și a influențelor deformațiilor din sistem asupra mișcării sunt domenii de interes.

*Sistemele fluidice* operează cu fluid de lucru în mișcare sub presiune. Acest fluid poate să fie lichid sau gaz

În cadrul procesului mecanic, care este parte componentă a sistemului mecatronic, există diverse variante de fluxuri materiale, energie sau informațional (fig.3.16).

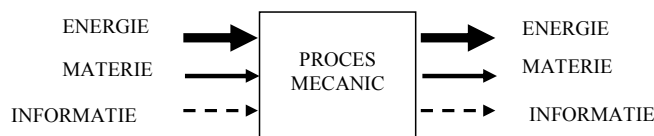


Fig. 3.16 Forme de fluxuri în procesul mecanic

Sistemul mecanic participă în mod direct la procesul mecanic regăsindu-se sub una din formele de prezentare a științei mașinilor (fig.3.17).

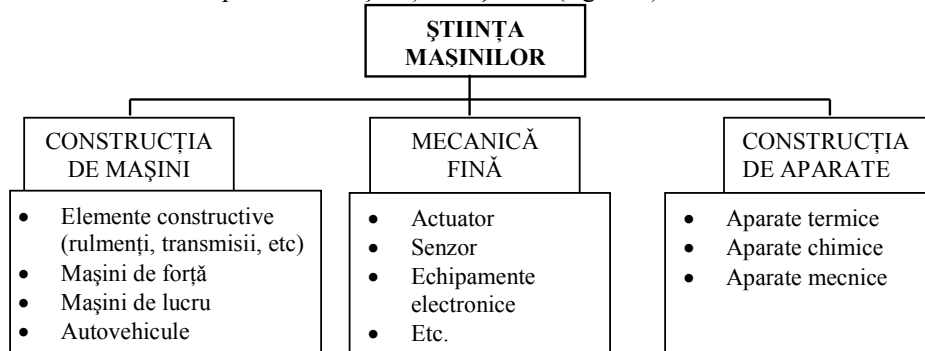


Fig. 3.17 Sistemul mecanic și știința mașinilor

Desfășurarea procesului mecanic are loc pe bază de aport de energie. Energia unui sistem fizic este o mărime de stare caracterizând sistemul într-o stare staționară. Starea unui sistem (este și cazul sistemului mecanic) este definită de totalitatea proprietăților acestuia la un moment dat. Adeseori în analiza sistemelor mecanice se fac unele ipoteze simplificatoare: absența frecărilor, absența vâscozității pentru fluide, etc. În toate aceste cazuri mișcarea apare ca fenomen pur mecanic. Caracteristic pentru astfel de fenomene este faptul că pe tot cursul lor, *energia se conservă*.

Un corp al cărui dimensiuni sunt negliabile față de distanțele la corpurile înconjurătoare se definește ca și punct material. Acesta este caracterizat numai prin masa sa. Punctul material nu este un obiect fizic real; el este un model folosit în studiul anumitor fenomene. Punctul material nu efectuează mișcări de rotație în jurul vreunei axe. Un sistem de puncte materiale supuse la legături reciproce – forțe de interacțiune – astfel încât să formeze un “întreg”, mai mult sau mai puțin stabil, mai mult sau mai puțin deformabil se numește sistem mecanic.

Sistemul mecanic se poate structura în următoarele componente: *element masic* (punct material, corp rigid); *elemente de îmbinare* (bare, arcuri, curele, amortizoare); *elemente constructive* (lagăr de alunecare, rulmenți, transmisii, cilindru cu piston, etc..)

Folosind reprezentarea sistemică, se poate preciza că un sistem mecanic mobil este compus din trei componente: elementul motor (sursă de energie), transmisia mecanică și elementul condus (consumator) (figura 3.18) [3.7].

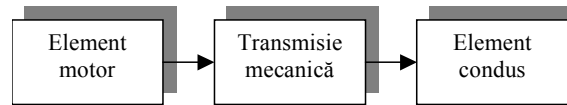


Fig. 3.18 Sistem mecanic mobil

Interacțiunea dintre corpuri implică ideea de evoluție și de conexiune spațială și temporală și se manifestă ca fenomene guvernate de legi fizice. Mărimea fizică care exprimă în mod cantitativ interacțiunea mecanică a corpurilor este forța. Forța – în sens generalizat – caracterizează mărimea, direcția și sensul unei interacțiuni.

Mișcarea unui sistem de puncte se raportează în general la un reper, care este presupus, în mod convențional, *fix*. Orice reper care nu este solidar cu reperul fix este considerat *mobil*. Mișcarea sistemului de puncte în raport cu un reper fix se numește *mișcare absolută*, iar mișcarea aceluiași sistem față de un reper mobil se numește *mișcare relativă*.

Un rigid are o *mișcare plană* dacă un plan al său este obligat să rămână paralel tot timpul cu un plan fix din spațiu. Sistemul mecanic mobil din figura 3.19 este compus din elementele 1, 2, 3, 4 care se mișcă într-un plan orizontal

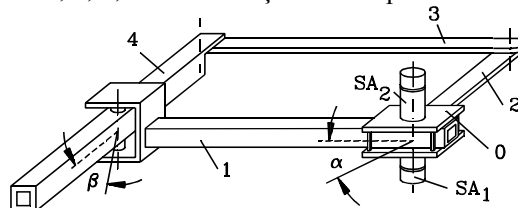


Fig. 3.19 Sistem mecanic mobil plan

Reperul fix față de care se analizează mișcarea este atașat elementului  $0$  [3.6].

Dacă puncte ale rigidului descriu traiectorii în diferite plane, *mișcarea este spațială*. Punctul caracteristic  $P$  poate descrie o mișcare spațială în raport cu reperul fix  $Oxyz$  (fig.3.20)

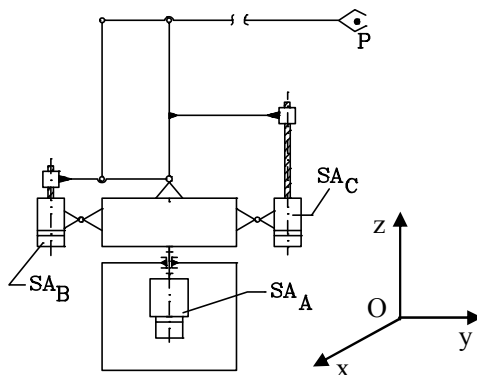


Fig. 3.20 Sistem mecanic mobil (robot industrial) cu mișcare spațială a punctului caracteristic  $P$

### 3.4.2.2. Modelarea sistemului mecanic aflat în mișcare plană

#### 3.4.2.2.1. Modelarea mișcării de translație

Mișcarea plană a rigidului, considerat ca element component a sistemului mecanic, prezintă câteva „*mișcări particulare*”: mișcarea de translație, mișcarea de rotație, mișcarea elicoidală, mișcarea plan - paralelă [3.23].

Un solid rigid are o mișcare de translație dacă o dreaptă oarecare a rigidului rămâne în tot timpul mișcării paralelă cu ea însăși. În figura 3.21 se prezintă *translația rectilinie* a unui rigid (mișcarea caroseriei unui automobil care parcurge un drum rectiliniu, mișcarea unui piston în interiorul unui cilindru, mișcarea de avans a unei scule în procesul de strunjire, etc.). Două automobile conectate elastic în punctele  $A$  și  $B$  au o mișcare rectilinie pe un drum drept și orizontal (fig.3.22).

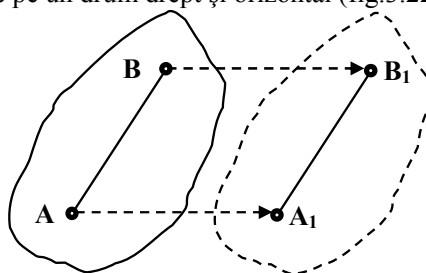


Fig. 3.21 Mișcarea de translație rectilinie

Dacă fiecare automobil este considerat un rigid reprezentat prin punct material ( $A$  și  $B$ ) mișcarea ansamblului de automobile se poate considera o translație rectilinie.

Dacă traiectoria descrisă de punctele materiale curbă plană se vorbește despre o translație circulară (traiectoria punctului este un cerc) sau o traiectorie curbilinie.

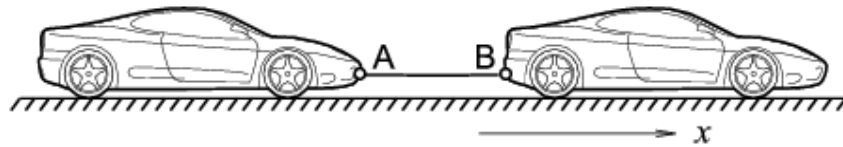


Fig. 3.22 Mișcarea rectilinie a două automobile remorcate

În figura 3.23 se prezintă configurația geometrică a translației rectilinii pentru punctele A și B.

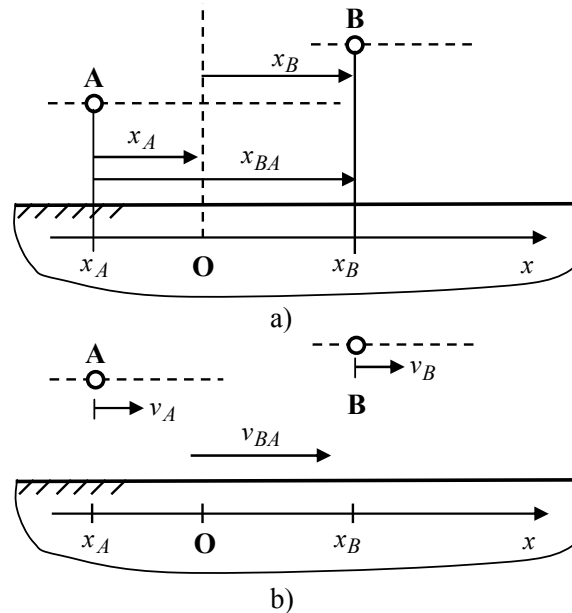


Fig. 3.23 Pozițiile și vitezele punctelor A și B în mișcarea de translație rectilinie

Considerând reperul de referință fix cu originea în punctul O,  $x_A$  reprezintă distanța de la punctul A la originea O. În cazul reprezentat, coordonata  $x_A(t)$  pe axa Ox este negativă în timp ce coordonata  $x_B(t)$  este pozitivă.

Viteza absolută și accelerația absolută a punctului A sunt:

$$v_A = \frac{dx_A}{dt} \quad (3.60)$$

$$a_A = \frac{dv_A}{dt} = \frac{d^2x_A}{dt^2}$$

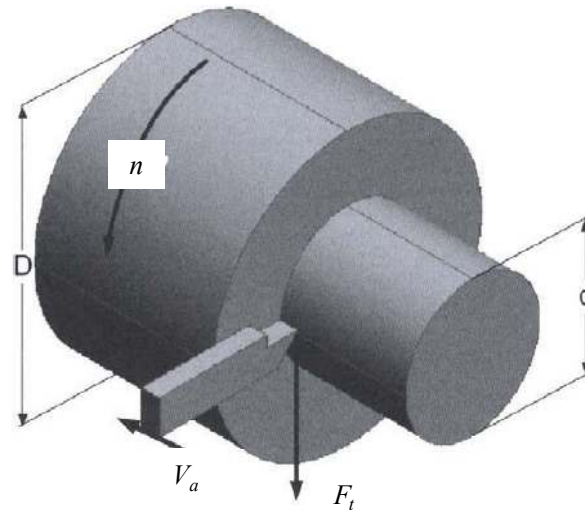
Poziția relativă a punctului B în raport cu punctul A, viteza relativă și respectiv accelerația relativă sunt:

$$\begin{aligned}
 x_{BA} &= x_B - x_A \\
 v_{BA} &= v_B - v_A \\
 a_{BA} &= a_B - a_A
 \end{aligned}
 \tag{3.61}$$

**3.4.2.2. Modelarea mișcării de rotație**

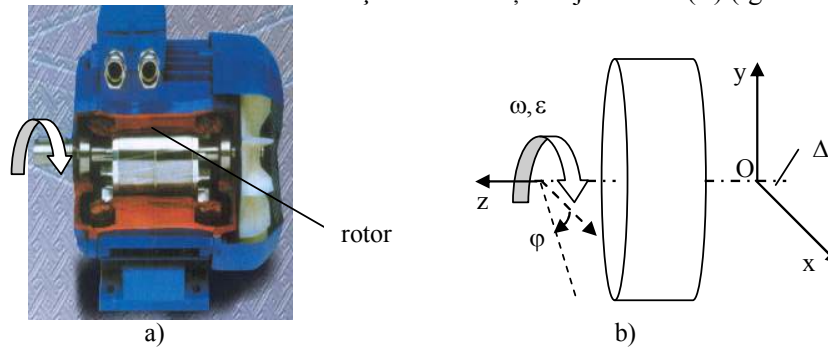
Un solid rigid are o mișcare de rotație dacă în tot timpul mișcării două puncte, aparținând rigidului, rămân fixe în spațiu. Dreapta care unește cele două puncte este axa de rotație.

De ex., piesa de prelucrat se rotește cu viteza de rotație iar scula de prelucrat se deplasează axial (mișcare de translație) cu viteza  $V_a$  (fig.3.24).



**Fig. 3.24 Mișcarea de rotație a piesei în procesul de așchiere**

Rotorul unui motor electric execută, împreună cu arborele pe care este montat, o mișcare de rotație în jurul unei axe (fig.3.25a). În procesul de modelare rotorul se poate considera un cilindru care execută mișcarea de rotație în jurul axei ( $\Delta$ ) (fig.3.25b).



**Fig. 3.25 Rotor în mișcare de rotație (a) și modelul echivalent (b)**

Mișcarea de rotație de unghi  $\varphi$  conduce la o viteză unghiulară absolută (în raport cu sistemul de referință Oxyz considerat fix):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (3.62)$$

și respectiv accelerație absolută:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (3.63)$$

Dacă elementul de legătură a rotorului (cu restul sistemului) este deformabil, cele două capete ale elementului de sprijin se pot roti cu unghiuri diferite (fig.3.26). Arborele elastic (deformabil la torsiune) va permite, sub acțiunea momentelor de torsiune exterioare, deformațiile  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$ .

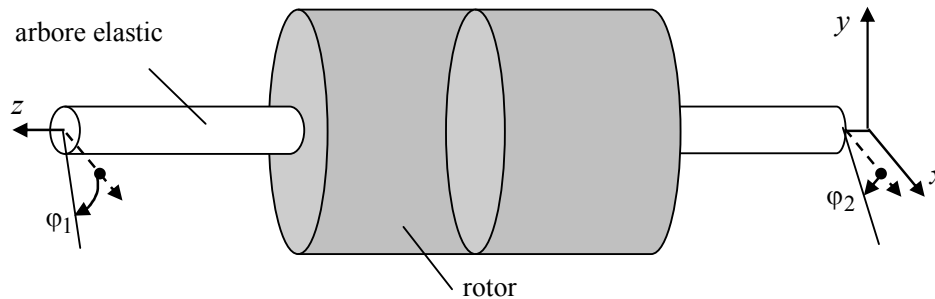


Fig. 3.26 Rotor cu un arbore elastic în mișcarea de rotație

#### 3.4.2.2.3. Elementele de bază ale sistemului mecanic

Mișcarea este impusă în sistemele mecanice mobile de energia introdusă în sistem. În acest fel se poate atinge „efectul” pentru care a fost proiectat sistemul. Utilizând reprezentarea sistemică, mărimea de intrare care să caracterizeze fluxul energetic poate fi o forță (în sens generalizat – forță sau moment) sau o viteză (fig.3.27).

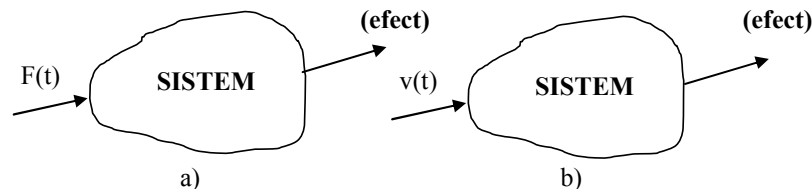


Fig. 3.27 Variante de introducere a energiei în sistem

Pe lângă *sursele de energie* sistemul mecanic poate dispune de următoarele elemente:

- elemente pentru „stocarea temporară a energiei”;
- elemente „disipatoare de energie”.

O clasificare a forțelor într-un sistem poate în general nominaliza *forțe active și*



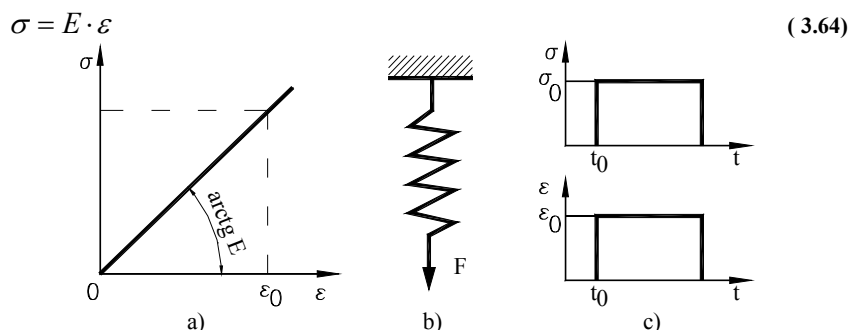
**forțe reactive.**

Ca și exemple de forțe active se pot aminti: *forța gravitațională, forța elastică, forțele electromagnetice* etc. Aceste forțe își păstrează sensul indiferent de sensul de mișcare.

Efectul elastic – acumulare de energie potențială - al elementelor componente dintr-un sistem poate aparține:

- unor elemente reale: arcuri, bare, plăci, fluide (pneumatice, hidraulice);
- unor fenomene specifice din natură: efect elastic aerodinamic, efect elastic gravitațional, efect elastic magnetic, efect elastic electrostatic, efect elastic centrifugal.

Între tensiunea normală  $\sigma$ , deformația relativă  $\varepsilon$  și modulul de elasticitate longitudinală  $E$  (modulul lui Young) se stabilește o relație liniară, independentă de timp energia disipată fiind egală cu zero (fig.3.28):



**Fig. 3.28 Modelul corpului elastic (a – dependența  $\sigma - \varepsilon$ ; b - mod de reprezentare; c - variația în timp a tensiunii normale și deformației relative**

Parametrii de bază ai elementelor elastice din categoria arcurilor sunt: încărcarea arcului: forță, moment sau presiune; săgeata - deformația arcului ( liniară –  $f$  - sau unghiulară -  $\varphi$ ) pe direcția încărcării; caracteristica arcului; rigiditatea; constanta arcului; lucrul mecanic acumulat; erorile de caracteristică.

Caracteristica arcului se exprimă printr-una din ecuațiile (fig. 3.29) (1– neliniară - moale; 2–liniară; 3 – neliniară dură).:

$$P = P(f) \tag{ 3.65}$$

$$M = M(\varphi) \tag{ 3.66}$$

Raportul “ c ” (sau “ c' ”) definit prin relația:

$$K = \frac{\Delta P}{\Delta f} [N / m] \tag{ 3.67}$$

$$K_\alpha = \frac{\Delta M}{\Delta \varphi} [Nm / rad] \tag{ 3.68}$$

se numește rigiditatea arcului. Dacă “ $K$ ” (sau “ $K_\alpha$ ”) are valoare constantă se vorbește despre constanta arcului. Inversa rigidității definește complianța elementului elastic.

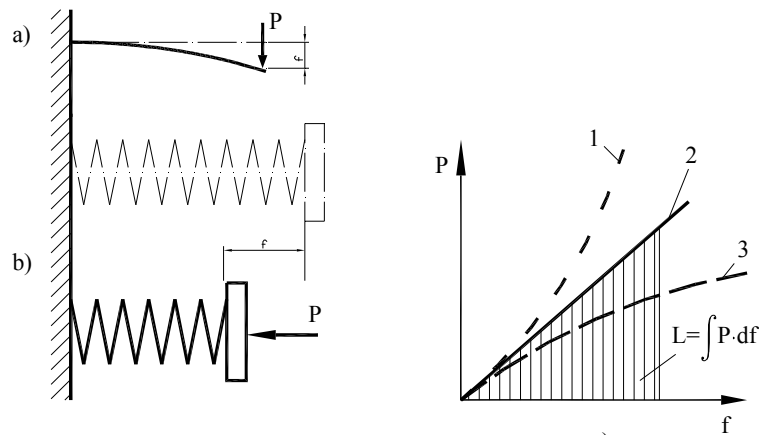


Fig. 3.29 Caracteristicile elementelor elastice

Posibilitățile energetice ale arcurilor sunt puse în evidență de lucrul mecanic acumulat (fig.3.29). Considerând o caracteristică liniară și utilizând relațiile de definiție, se obțin relațiile pentru lucrul mecanic:

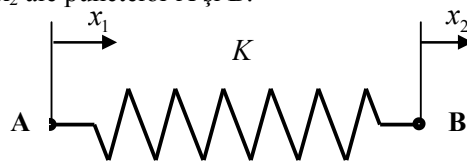
$$L = \frac{K \cdot f^2}{2} = \frac{F^2}{2 \cdot K} = \frac{F \cdot f}{2} \quad (3.69)$$

$$L = \frac{K_\alpha \cdot \varphi^2}{2} = \frac{M^2}{2 \cdot K_\alpha} = \frac{M \cdot \varphi}{2} \quad (3.70)$$

Calculul deformațiilor și a stărilor de solicitare din elementele elastice se realizează în conformitate cu teoriile din rezistența materialelor.

*Arcul pneumatic* este o variantă simplă pentru susținerea elastică a unor sarcini de valori ridicate care acționează asupra unui sistem. Capacitatea ridicată de amortizare îl recomandă pentru sisteme izolatoare ale vibrațiilor.

În baza celor prezentate anterior în figura 3.30 se prezintă schema de reprezentare a unui element elastic cu rigiditatea  $K$  și forța corespunzătoare pentru deplasările liniare  $x_1$ ,  $x_2$  ale punctelor A și B.

Fig. 3.30 Element elastic cu rigiditatea  $K$ 

$$F = K \cdot (x_1 - x_2) \quad (3.71)$$

În mod similar pentru mișcarea de rotație, se reprezintă în figura 3.31 elementul elastic de torsiune. Relația de calcul este similară celei anterioare:

$$M_t = K \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (3.72)$$

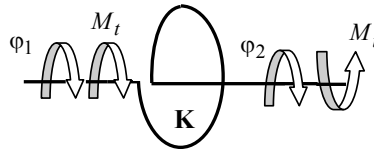


Fig. 3.31 Element elastic de rotație cu rigiditatea K

Într-o serie de aplicații este avantajos de a înlocui un sistem elastic cu rigiditățile proprii printr-un singur element elastic care încorporează caracteristicile sistemului inițial. Se prezintă în continuare câteva din echivalările curente:

- Echivalarea a două elemente elastice în paralel cu un singur element (fig.3.32).

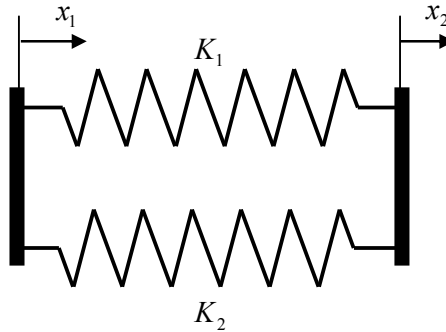


Fig. 3.32 Două elemente elastice în paralel

$$K_e = K_1 + K_2 \tag{3.73}$$

- Echivalarea a două elemente elastice în serie cu singur element (fig.3. 33).

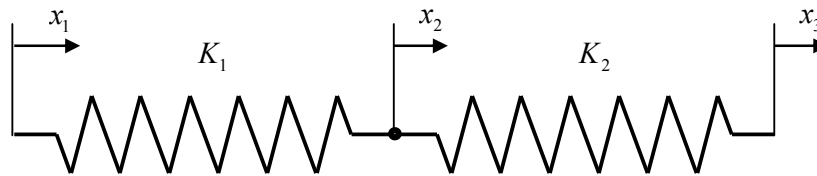


Fig. 3.33 Două elemente elastice în serie

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \tag{3.74}$$

- Doi arbori dintr-o transmisie cu roți dințate (fig.3.34). Cei doi arbori au rigiditățile  $K_1$  și  $K_2$  și sunt conectați printr-o transmisie cu roți dințate cu raportul de transmitere  $i$ . Considerând transmisia perfect rigidă, se poate pune problema determinării rigidității echivalente a sistemului.

Se poate demonstra că rigiditatea echivalentă este:

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_1} + \frac{i^2}{K_2} \tag{3.75}$$

- Două elemente elastice conectate printr-un balansier (fig.3.35).

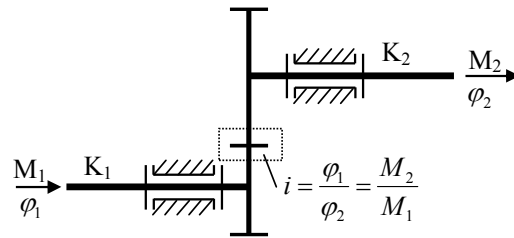


Fig. 3.34 Arbori în serie dintr-o transmisie cu roți dințate

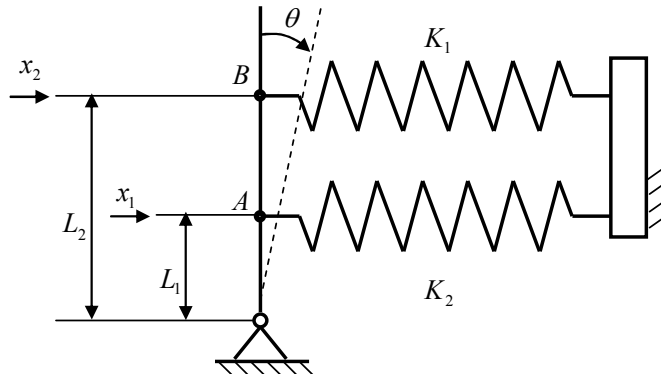


Fig. 3.35 Două elemente elastice conectate printr-un balansier

Considerând “A” punctul de echivalare a sistemului elastic din figura 3.35 cu un singur element elastic, se poate obține rigiditatea echivalentă:

$$K_e = K_1 + K_2 \cdot \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \quad (3.76)$$

*Disiparea de energie* în sistemele mecanice mobile are loc datorită forțelor de frecare dintre elemente în contact, efectelor de amortizare (activă sau pasivă).

*Frecarea* ca și fenomen, parametrii care o determină sau care o influențează și modele ale frecării au fost abordate și analizate pe scară largă. Se consideră la ora actuală că se poate vorbi despre un model clasic al frecării (modelul static, dinamic sau cel vâcos) (fig. 3.36) și modelul modern al frecării. Zona “A” definește zona de discontinuitate a modelului pentru viteza relativă zero.

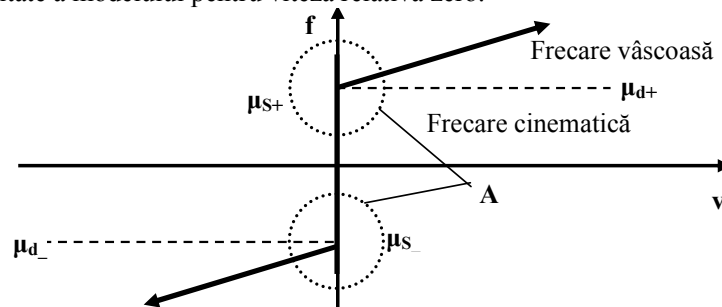


Fig. 3.36 Modelul clasic al frecării

Modelul de bază Colulomb al frecării pornește de la proporționalitatea forței de frecare cu forța normală la suprafața de contact și de sens opus mișcării (Leonardo da Vinci). Armstrong – Helouvry, Da Vinci, Amonton (1699) folosesc același model dezvoltat de Coulomb în 1785. Frecarea este luată în considerare ca o forță constantă opusă mișcării pentru orice viteză diferită de zero.

Modelul Coulomb a fost dezvoltat în timp rămânând ca o referință de bază și primind denumirea de modelul clasic. Unul din modelele dezvoltate, modelul clasic stick-slip, este prezentat în figura 3.37.

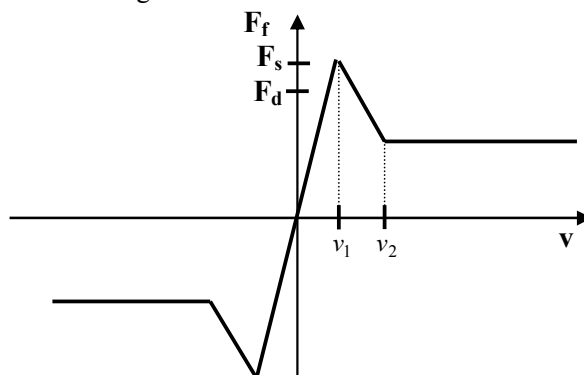


Fig. 3.37 Modelul clasic al frecării stick-slip

Modelul modern al frecării - modelul rolling, modelul Stribeck, modelul Stick-slip, modelul fluidic- este caracterizat de zonele {1, 2, 3}. Acesta indică prezența lubrificării limită, a lubrificării parțial fluidice și respectiv a lubrificării total fluidice (fig.3.38).

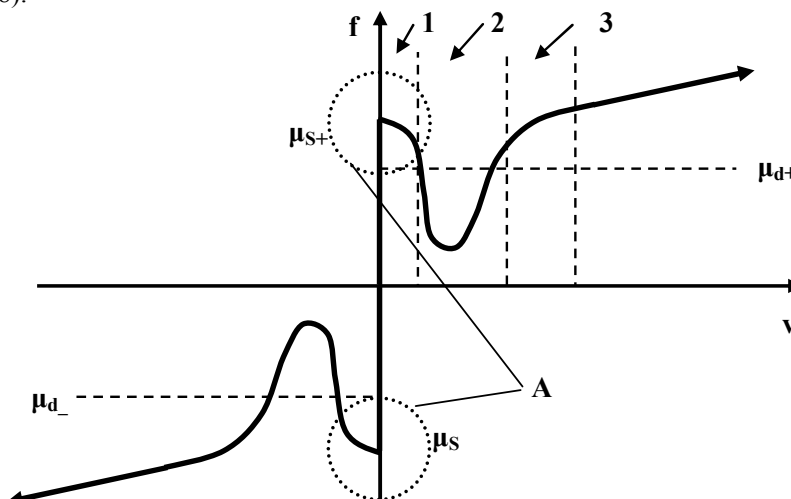


Fig. 3.38 Modelul modern al frecării

Modelul Dahl, modelul Karnopp, modelul LuGree (Lund – Grenoble) sunt alte modele ale fenomenului de frecare.

Modelul matematic al forței de frecare dintre două corpuri aflate în contact (reacțiunea dintre ele este  $N$ ) este descris de sistemul de ecuații ( $\mu$  – coeficientul de frecare pentru perechea de materiale aflate în contact):

$$F_f = \begin{cases} F_0 \operatorname{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right) la & \frac{dx}{dt} \neq 0 \\ + F_0 la & \frac{dx}{dt} = 0 \text{ si } F > F_0 \\ - F_0 la & \frac{dx}{dt} = 0 \text{ si } F < -F_0 \\ F_0 = \mu N & \end{cases} \quad (3.77)$$

Valori ale coeficientului de frecare pentru diverse perechi de materiale sunt prezentate în tabelul 3.1 [3.11].

Tabelul 3.1

Suprafețele în contact	Coeficientul de frecare static	Coeficientul de frecare cinematic
Oțel pe oțel (uscat)	0.6	0.4
Oțel pe oțel (uns)	0.1	0.05
Teflon pe oțel	0.04	0.04
Teflon pe teflon	0.04	-
Alamă pe oțel (uscat)	0.5	0.4
Placă de frână pe fontă	0.4	0.3
Cauciuc pe asfalt	-	0.5
Cauciuc pe beton	-	0.6
Anvelopă de cauciuc pe asfalt neted (uscat)	0.9	0.8
Cablu din oțel peste scripete din fier	0.2	0.15
Frânghie din cânepă pe metal	0.3	0.2
Metal pe gheață	-	0.02

Modelul matematic LuGree are forma:

$$F_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 v \quad (3.78)$$

$$\frac{dz}{dt} = v \cdot \left( 1 - \frac{\sigma_0}{g(v)} \cdot \operatorname{sgn}(v) \cdot z \right) \quad (3.79)$$

unde:  $F$ - forța de frecare;  $z$  – înălțimea medie a neregularităților suprafețelor în contact;  $v$  – viteza relativă a celor două suprafețe;  $g(v)$  - curba Stribeck pentru viteze la starea de echilibru;  $\sigma_0$  - rigiditatea neregularităților suprafețelor în contact;  $\sigma_1$  - amortizarea proeminențelor în contact;  $\sigma_2$ - coeficientul vâsco-dinamic. În scop informativ se prezintă valorile specificate anterior și utilizate într-un model simulat:  $F_C = 1 N$ ;  $F_S = 1.5 N$ ;  $\sigma_0 = 10^5 N/m$ ;  $\sigma_1 = 314 Ns/m$ ;  $\sigma_2 = 0.4 Ns/m$  [3.11].

*Efectul de amortizare* se identifică cu orice efect din natură care tinde să reducă amplitudinea oscilațiilor dintr-un sistem. În sistemele tehnice acest efect poate fi utilizat cu un scop util, cel precizat anterior, dar poate să se manifeste și cu efect perturbator: efecte de frânare în sistemele mecanice mobile, efect de histereză asociat cu sollicitare ciclică în materiale etc. O clasificare a amortizoarelor din lumea reală este prezentată în figura 3.39.

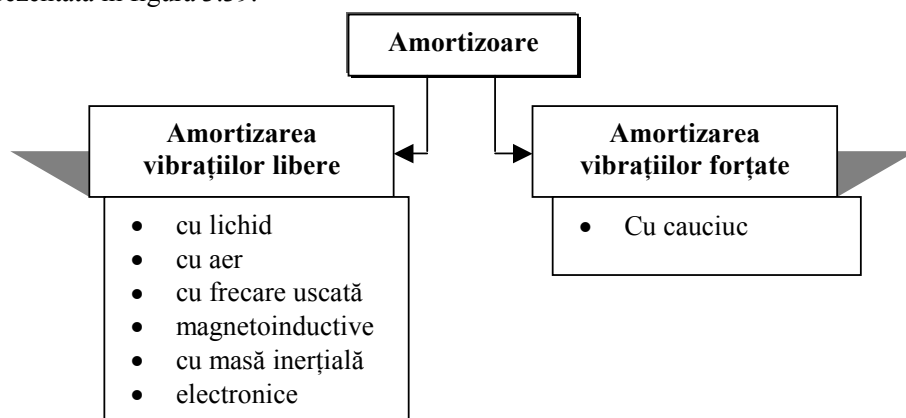


Fig. 3.39 Clasificarea amortizoarelor

În cadrul sistemelor tehnice efectul de amortizare se poate modela matematic printr-o forță sincronă cu viteza, de aceeași direcție și sens contrar:

$$\overline{F}_a = -C \cdot \overline{v} \tag{3.80}$$

Din punct de vedere practic este avantajoasă utilizarea unor suprafețe cilindrice pentru modelarea amortizorului (fig.3.40). Coeficientul de amortizare este:

$$c = \frac{2\pi \cdot R^3 \cdot \eta \cdot l}{h} \left[ \frac{Nms}{rad} \right] \tag{3.81}$$

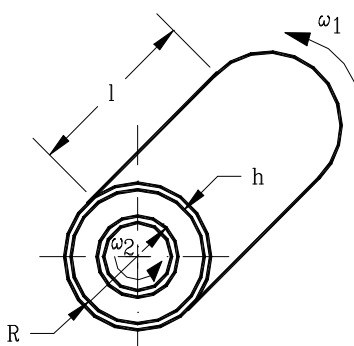


Fig. 3.40 Amortizor cilindric

Modul de reprezentare schematică a modelului vâscos este ilustrat în figura 3.41a,b iar caracteristica unui amortizor ideal în figura 3.41c.

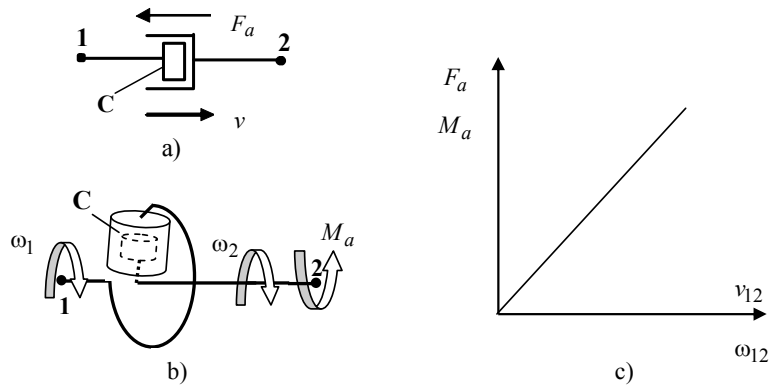


Fig. 3.41 Simbolizarea amortizorului linear (a), de rotație (b) și caracteristica (c)

Conectarea în paralel a două sau mai multe elemente amortizoare permite determinarea unui element echivalent care va avea coeficientul de amortizare echivalent (fig.3.42):

$$C_e = C_1 + C_2 \quad (3.82)$$

Ecuția noului element amortizor pentru cazul unei mișcări de translație va fi:

$$F_p = C_e \cdot (v_2 - v_1) \quad (3.83)$$

și respectiv pentru cazul mișcării de rotație:

$$M_p = C_e \cdot (\omega_2 - \omega_1) \quad (3.84)$$

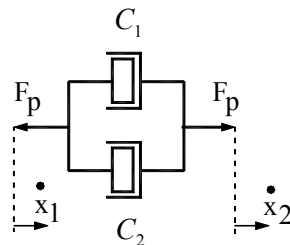


Fig. 3.42 Echivalarea a două elemente vâscoase

Legarea în serie a două amortizoare (fig.3.43) permite definirea unui element echivalent având constanta de amortizare:

$$C_e = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \quad (3.85)$$

Ecuția noului element amortizor va fi pentru cazul mișcării de translație:

$$F_S = C_e \cdot (v_3 - v_1) \quad (3.86)$$

și respectiv pentru cazul mișcării de rotație:



$$M_S = C_e \cdot (\omega_3 - \omega_1) \quad (3.87)$$

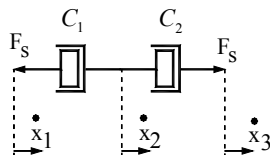


Fig. 3.43 Echivalarea pentru două elemente de amortizare înseriate

Relații asemănătoare se pot obține și pentru alte structuri mecanice. Pentru sistemul mecanic mobil din figura 3.37 coeficientul de amortizare echivalent este:

$$C_e = C_1 + \frac{C_2}{i^2} \quad (3.88)$$

### 3.4.2.3. Principii în calcul sistemului mecanic

În rezolvarea problemelor legate de analiza sistemelor mecanice se apelează la modul de tratare clasică respectându-se:

- *Principiul inerției;*
- *Principiul independenței acțiunii forțelor;*
- *Principiul acțiunii și reacțiunii.*

Starea reală de mișcare a unui sistem mecanic mobil este stabilită de echilibrul de forțe care acționează asupra lui.

Pentru a simplifica modelarea unui sistem mecanic mobil se introduce noțiunea de masă redusă și aceea de moment de inerție redus. În acest mod, studiul dinamic al sistemului se reduce la studiul dinamic al elementelor de reducere. Ca element de reducere, se admite rotorul motorului electric, armătura mobilă a electromagnetului, pistonul cilindrului pneumatic și hidraulic, etc.

Prin definiție, masa redusă a unui mecanism este echivalentă cu o masă fictivă care, concentrată într-un punct al unui element numit element de reducere, dezvoltă aceeași energie cinetică pe care o dezvoltă întregul mecanism aflat în mișcare. Pe baza definiției date, se poate scrie relația de calcul pentru masa redusă:

$$m_r = \frac{1}{v_A^2} \cdot \sum_{i=1}^n (m_i \cdot v_i^2 + J_i \cdot \omega_i^2) \quad (3.89)$$

unde notațiile au semnificația următoare:  $v_A$  reprezintă viteza de translație a elementului de reducere;  $m_i$  și  $J_i$  reprezintă masa și respectiv momentul de inerție mecanic în raport cu o axă ce trece prin centrul de greutate al unui element “i”;  $v_i$  și  $\omega_i$  reprezintă viteza centrului de greutate și respectiv viteza unghiulară a elementului “i”;  $n$  reprezintă numărul de elemente mobile ale mecanismului.

Prin definiție, momentul de inerție redus  $I_r$  al unui mecanism este echivalent cu momentul de inerție fictiv al unui volant, care rotindu-se ca element de reducere, dezvoltă aceeași energie cinetică pe care o dezvoltă întregul mecanism.

Pe baza definiției, se poate scrie expresia pentru calculul momentului de inerție redus:

$$I_r = \frac{1}{\omega_A^2} \cdot \sum_{i=1}^n (m_i \cdot v_i^2 + J_i \cdot \omega_i^2) \quad (3.90)$$

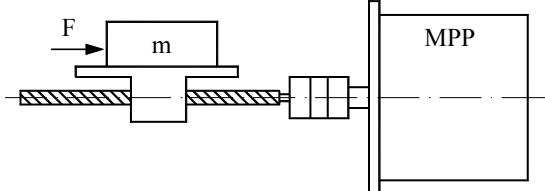
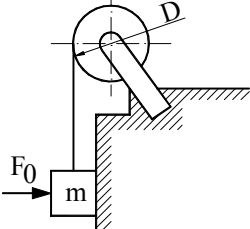
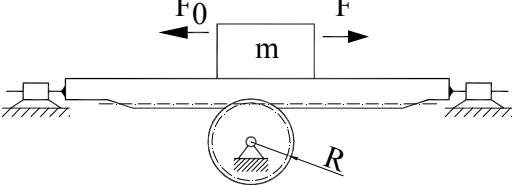
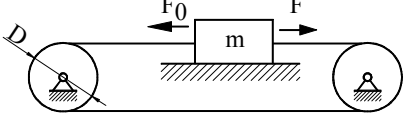
unde notațiile au semnificația:  $\omega_A$  reprezintă viteza unghiulară a elementului de reducere;  $m_i$  și  $J_i$  reprezintă masa și respectiv momentul de inerție mecanic în raport cu o axă ce trece prin centrul de greutate al unui element "i";  $v_i$  și  $\omega_i$  reprezintă viteza centrului de greutate respectiv viteza unghiulară a elementului "i";  $n$  reprezintă numărul de elemente mobile ale mecanismului.

În scopul simplificării analizei fluxului de putere din sistemele mecanice mobile se utilizează noțiunile de *forță redusă și moment redus*.

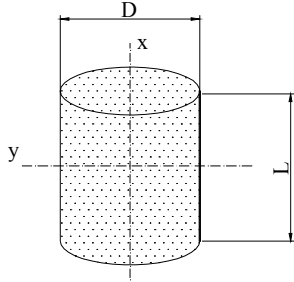
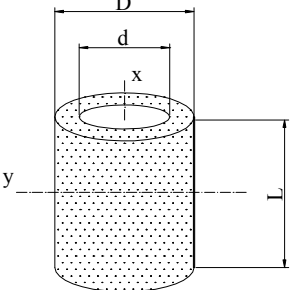
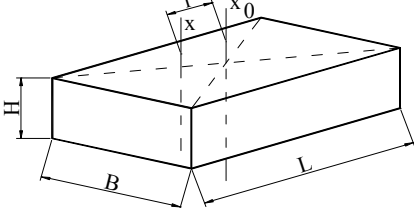
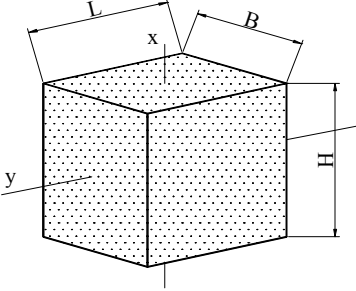
În concordanță cu cele prezentate, un sistem mecanic mobil se poate înlocui cu element de reducere în vederea studiului dinamic.

Aplicabile studiului dinamic pentru sistemul mecanic mobil sunt toate metodele mecanicii teoretice. În tabelul 3.2 se prezintă modalități de calcul a momentelor de inerție pentru câteva corpuri geometrice. În tabelul 3.3 se prezintă relații de calcul pentru momentul de inerție redus la arborele motorului.

Tabelul 3.2

	$J_{red} = J_s + m \cdot \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2$
	$J_{red} = J_r + \frac{4m}{D^2}$
	$J_{red} = J_p + \frac{m}{R^2}$
	$J_{red} = 2J_r + \frac{4m}{D^2}$

Tabelul 3.3

	$J_x = \frac{mD^2}{8} = \frac{\pi}{32} \cdot \rho L D^4$ $J_y = \frac{1}{4} \cdot m \cdot \left( \frac{D^2}{4} + \frac{L^2}{3} \right)$
	$J_x = \frac{1}{8} \cdot m \cdot (D^2 - d^2) =$ $= \frac{\pi}{32} \cdot \rho L \cdot (D^4 - d^4)$ $J_y = \frac{1}{4} \cdot m \cdot \left( \frac{D^2 - d^2}{4} + \frac{L^2}{3} \right)$
	$J_x = J_{x_0} + ml^2 =$ $= \frac{m}{12} \cdot (L^2 + B^2) + ml^2$
	$J_x = \frac{m}{12} \cdot (L^2 + B^2) =$ $= \frac{1}{12} \cdot \rho L B H \cdot (L^2 + B^2)$ $J_y = \frac{m}{12} \cdot (H^2 + B^2) =$ $= \frac{1}{12} \cdot \rho L B H \cdot (H^2 + B^2)$

### 3.4.3. Modelul sistemului electric

**Sub-sistemul electric** are la bază trei parametri fundamentali: sarcină, curent și tensiune. Acesta este parte integrantă a sistemelor mecatronice bazându-se pe o largă ofertă de componente: motoare și generatoare, senzori, circuite, relee, siguranțe,

contactoare, circuite integrate etc.

Primul pas în analiza unor circuite este obținerea modelului matematic pentru acestea. Modelul matematic poate consta din ecuații algebrice, ecuații diferențiale, ecuații integro-diferențiale, etc.

Legile teoriei macroscopice a fenomenelor electromagnetice, legea inducției electromagnetice, legile câmpului magnetic - sunt elemente de bază în analiza sistemelor electromagnetice. Noțiunile de electrocinetică - prima teoremă a lui Kirchhoff (pentru un nod de rețea electrică), a doua teoremă a lui Kirchhoff (pentru un ochi de rețea electrică), teorema lui Helmholtz-Thevenin, teorema lui Norton etc. - permit analiza circuitelor electrice din hipersistemul mecatronic.

În regim nestaționar, problemele de electrodinamică, se rezolvă apelând la legile teoriei macroscopice ale fenomenelor electrice și magnetice, în cea mai generală formă a lor [3.22].

În figura 3.44 se prezintă elementele pasive – rezistor, inductivitate, capacitate – care intră în componența sistemelor electrice.

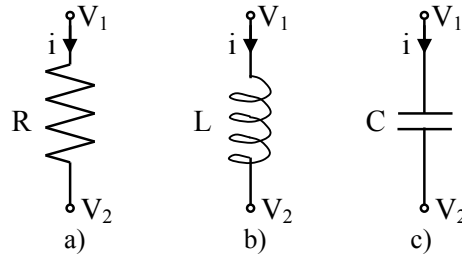


Fig. 3.44 Elementele pasive ale circuitelor electrice

Elementul rezistiv este pur disipativ, elementul capacitiv este un element de acumulare iar elementul inductiv este de tip inerțial.

Pentru *componenta disipativă – elemental resistor*, diferența de potențial este:

$$V_R = V_1 - V_2 = iR \quad (3.91)$$

Acest element este analog cu elementul amortizor din sistemele mecanice.

*Inductorul este componenta inerțială* a circuitelor electrice pentru care se poate scrie:

$$V_L = V_1 - V_2 = L \cdot \frac{di}{dt} \quad (3.92)$$

Acest element cu proprietăți inerțiale este analog cu o componentă masică din cadrul sistemelor mecanice.

În circuitele electrice, *capacitatea electrică este un element acumulativ*:

$$V_C = V_1 - V_2 = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + V_C(0) \quad (3.93)$$

Acest element este analog cu un *element elastic (arc) din sistemul mecanic*.

*Efectul elastic electromagnetic și efectul de amortizare* sunt prezente, se manifestă și trebuie luate în considerare în analiza sistemelor mecatronice [3.6].

În tabelul 3.4 sunt date principalele mărimi derivate care intervin în studiul sistemelor electrice și unitățile de măsură corespunzătoare.

Tabelul 3.4

Nr. crt.	Mărimea fizică		Unitatea de măsură	
	Denumirea	Simbol	Denumirea	Simbol
1	Tensiunea electrică	U	volt	V
2	Rezistență electrică	R	ohm	$\Omega$
3	Reactanța	X	ohm	$\Omega$
4	Impedanța	Z	ohm	$\Omega$
5	Capacitate electrică	C	farad	F
6	Inductanța	L	henry	H
7	Putere activă	P	watt	W
8	Putere reactivă	Q	var	VAR
9	Putere aparentă	S	voltamper	VA
10	Energie activă	$W_a$	wattoră	Wh
11	Energie reactivă	$W_r$	varoră	VARh
12	Densitatea curentului electric	J	amper pe metru pătrat	$A/m^2$
13	Sarcina electrică	Q, q	coulomb	C
14	Intensitatea câmpului electric	E	volt pe metru	V/m
15	Potențial electric scalar	V	volt	V
16	Inducție electrică	D	coulomb / metru pătrat	$C/m^2$
17	Flux electric	$\Psi$	coulomb	C
18	Rezistivitate	$\rho$	ohm-metru	$\Omega m$
19	Conductivitate electrică	$\sigma$	-	$1/(\Omega m)$
20	Inducția magnetică	B	tesla	T

În cadrul aplicațiilor practice se utilizează adeseori multiplii sau submultiplii unităților fundamentale sau derivate (unități tolerate). În tabelul 3.5 se prezintă semnificația notațiilor care definesc multiplii sau submultiplii unei unități.

Tabelul 3.5

Simbol	Denumire	Valoare	Simbol	Denumire	Valoare
G	giga	10	d	deci	$10^{-1}$
M	mega	$10^6$	c	centi	$10^{-2}$
k	kilo	$10^3$	m	mili	$10^{-3}$
da	deca	10	$\mu$	micro	$10^{-6}$
			n	nano	$10^{-9}$
			p	pico	$10^{-12}$

Formule și relații de calcul pentru circuitele electrice fundamentale sunt prezentate în tabelul 3.6.

Tabelul 3.6

Nr.crt.	Mărimea	U.M.	Notație / Valori / Formule
1	Sarcina electrică	$A \cdot s$ sau $C$ (Coulomb)	$Q = \int i \cdot dt$ $Q = I \cdot t$
2	Sarcina electronului	$A \cdot s$	$e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$
3	Concentrația electronilor în metale	$\text{cm}^{-3}$	$n = 10^{23} \text{ cm}^{-3}$
4	Intensitatea curentului electric	A (Ampere)	$i, I$ $i = \frac{dQ}{dt}; I = \frac{Q}{t}$
5	Densitatea curentului electric	$A / \text{mm}^2$	$J = \frac{di}{dA}$ $J = \frac{I}{A}$
6	Intensitatea câmpului electric	$V / m$	$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{Q}$ sau în câmp omogen $E = \frac{U}{l}$
7	Tensiunea electrică	$V$ (Volt)	$U_{AB} = \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{s}$
8	Rezistivitatea electrică	$\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{m}$ sau $\Omega \cdot m$	$\rho$
9	Rezistența unui conductor	$\Omega$ (Ohm)	$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$
10	Rezistența unui conductor dependentă de temperatură	$\Omega$ (Ohm)	$R_{(\Theta)} = R_{20} \cdot (1 + \alpha_{20} \cdot \Delta\Theta)$ $\Delta\Theta = \Theta_2 - \Theta_1$ $\alpha_{20}$ – coeficientul de temperatură la $20^\circ\text{C}$
11	Rezistența electrică a unei porțiuni de circuit	$\Omega$ (Ohm)	$R = \frac{U_{AB}}{I}$
12	Rezistența electrică echivalentă pentru o conexiune serie	$\Omega$ (Ohm)	$R = \sum_i R_i$

(continuare tabelul 3.6)

13	Rezistența electrică echivalentă pentru o conexiune paralelă	$\Omega$ (Ohm)	$\frac{1}{R} = \sum_j \frac{1}{R_j}$
14	Energia electrică	$Ws$ (Watt.secunda)	$W = \int_{t_1}^{t_2} u \cdot i \cdot dt$ $W = U \cdot I \cdot t$
15	Puterea electrică	$W$ (Watt)	$P = \frac{W}{t} = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$
16	Capacitatea unui condensator plan	$\frac{A \cdot s}{V} = F$ (Farad)	$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$ $\epsilon_0 = 8.86 \cdot 10^{-12} \frac{A \cdot s}{V \cdot m}$
17	Capacitatea electrică echivalentă pentru o conexiune serie	$F$	$\frac{1}{C} = \sum_j \frac{1}{C_j}$
18	Capacitate electrică echivalentă pentru o conexiune paralelă	$F$	$C = \sum_j C_j$
19	Inductivitatea unei bobine	$H$ (Henry) $\frac{V \cdot s}{A} = H$	$L = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N^2 \cdot S}{l}$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$
20	Energia electrică acumulată într-un condensator	$Ws$	$W_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{Q \cdot U}{2} = \frac{Q^2}{2 \cdot C}$
21	Energia electrică acumulată într-o bobină	$Ws$	$W_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$
22	Tensiunea electrică la bornele unei bobine		$u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$
23	Curentul electric printr-o bobină		$i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int u(t) \cdot dt$
24	Tensiunea electrică la bornele unei capacități electrice		$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) \cdot dt$

(continuare tabelul 3.6)

25	Curentul electric printr-o capacitate		$i(t) = C \cdot \frac{dU}{dt}$
26	Reactanță inductivă	$\Omega$ (Ohm)	$X_L(\omega) = j \cdot \omega \cdot L = \omega \cdot L \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$
27	Reactanță capacitivă	$\Omega$ (Ohm)	$X_C(\omega) = \frac{1}{j\omega \cdot C} = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$
28	Impedanța	$\Omega$ (Ohm)	$Z(\omega) =  Z  \cdot e^{j\varphi} = \frac{U}{I} \cdot e^{j\varphi}$ $Z(\omega) = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$

### 3.5. Analogia sistemelor

#### 3.5.1. Metoda bond-graph

O metodă unitară de analiză și modelare dinamică sistemelor fizice are la bază utilizarea bond-grafurilor. Dinamica sistemului derivă din aplicarea conservării energiei în fiecare moment. Sistemele sunt conectate în locuri prin care puterea “curge” între acestea. Acest loc este denumit *port* iar subsistemele cu unul sau mai multe porturi se numesc *multiport* [3.6]

Conceptul de *port de putere* a fost introdus de Harold A. Wheeler în 1949 pentru circuitele electrice și extins mai târziu pentru alte domenii fizice (hidraulic, mecanic etc.). Acest lucru presupune (conceptual) o interacțiune între părți ale sistemului. Prin definiție *portul* reprezintă un punct de interacțiune al sistemului, subsistemului sau elementului cu mediul, un alt subsistem sau element. *Portul de putere* presupune o interacțiune cu un schimb de energie.

Fiecare port a unui sistem are patru variabile: *forță (diferență de potențial)* -  $e(t)$ ; *flux (debit, curent)* -  $f(t)$ ; *eșfort integral* -  $p = \int e(t) \cdot dt$ ; *flux integral* -  $q = \int f(t) \cdot dt$

Puterea pe un port este definită ca fiind:

$$P(t) = e(t) \cdot f(t) \quad (3.94)$$

unde  $e(t)$  și  $f(t)$  sunt variabilele puterii.

Energia vehiculată printr-un port este:

$$w = \int e(t) \cdot f(t) \cdot dt = \int e(t) \cdot d\mathfrak{I}(t) = \int f(t) \cdot dE(t) \quad (3.95)$$

iar  $\mathfrak{I}(t)$  și  $E(t)$  se numesc *variabilele energiei*.

Variabilele energiei și ale puterii pentru domeniile mecanic – mișcare de



translație și rotație, hidraulic, electromagnetic și termic sunt prezentate în tabelul 3.7.

Tabelul 3.7 [3.5]

Domeniul	Efortul	Fluxul	Puterea	Efortul integral	Fluxul integral	Energie
Translație mecanică	Forța $F$	Viteza $v$	$Fv$	Impuls	Deplasarea $x$	Lucrul mecanic
Rotație mecanică	Cuplu $M$	Viteza unghiulară $\omega$	$M\omega$	Moment cinetic	Unghiul $\theta$	Lucrul mecanic
Hidraulică	Presiunea $P$	Debit $\dot{Q}$	$p\dot{Q}$	Impuls hidraulic	Volum $V$	Energia hidraulică
Electro-magnetic	Tensiunea $e$	Curentul $i$	$e \cdot i$	Flux $\phi$	Sarcina $q$	Energia electrică
Termic	Temperatura	Entropie	-	-	-	-

Componentele de bază, reprezentând diverse procese fizice, sunt (R, C, I, Se, Sf, TF, GY, 0,1). Procesele sunt divizate în următoarele categorii de bază denumite “port” în limbajul bond-graf:

- *Proces disipativ.* În acest caz energia este disipată (pierdută) în mediul înconjurător. Acesta este simbolizat în bond-graf printr-un rezistor (R). Rezistorul electric, frecarea dintr-un lagăr se poate modela printr-un element disipativ de tip R. O componentă uniport de tip rezistor (R) este caracterizată de perechea de variabile  $e(t)$  și  $f(t)$  între care există o dependență statică  $e = G(f)$  (independentă de timp)(fig.3.45).

$$e = R \cdot f \tag{3.96}$$

$$f = \frac{1}{R} \cdot e \tag{3.97}$$

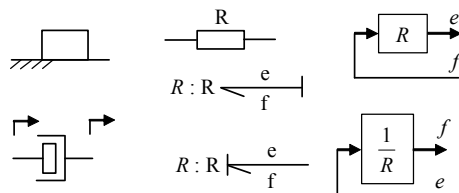


Fig. 3.45 Elementul rezitiv

- *Proces de acumulare.* În cadrul procesului conservativ al energiei, aceasta este stocată și apoi cedată dinamic. Există două tipuri de elemente: *elemente – C și elemente – I.*

Pentru prima categorie în bond-graf aceste elemente sunt simbolizate în mod generalizat printr-o *element capacitate (C)* – pentru variabilă de tipul  $q$ . Capacitatea electrică, arcul elicoidal de întindere-compresiune, arcul de torsiune sunt componente constructive care aparțin acestei categorii (fig.3.46).

În cadrul acestor elemente cantitatea conservată,  $q$ , este acumulată prin stocarea

fluxului net  $f$ . Acest rezultat se exprimă prin ecuația de bilanț:

$$\frac{dq}{dt} = f \quad (3.98)$$

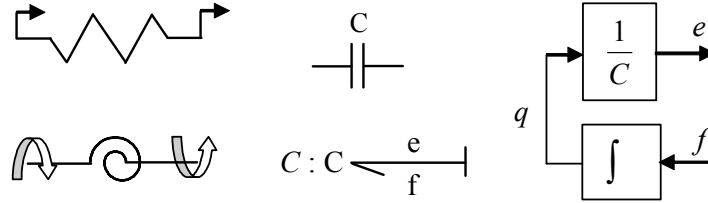


Fig. 3.46 Elementul de tip capacitiv

Variabila efort,  $e$ , este exprimabilă printr-o ecuație constitutivă funcție de variabila de stare  $q$ :

$$e = e(q) \quad (3.99)$$

$$e = \frac{1}{C} \cdot q \quad (3.100)$$

$$q = \int f dt + q(0) \quad (3.101)$$

Pentru elementele -  $I$ , cantitatea conservată  $p$  este stocată prin acumularea efortului  $e$ . Inductivitatea electrică  $L$ , masa  $M$ , volantul sunt elemente constructive care aparțin acestei categorii (fig.3.47)

Ecuția de bilanț are forma:

$$\frac{dp}{dt} = f \quad (3.102)$$

existând și o ecuație constitutivă de forma:

$$f = f(p) \quad (3.103)$$

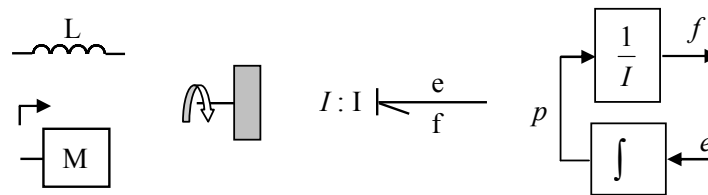


Fig. 3.47 Elementul de tip inductiv

Ecuțiile specifice ale elementului sunt:

$$f = \frac{1}{I} \cdot p \quad (3.104)$$

$$p = \int e dt + p(0) \quad (3.105)$$

- *Sursă*. Se includ în această categorie două cazuri : o sursă de efort  $S_e$  și o sursă de flux  $S_f$ . De ex: în domeniul electric o sursă de tensiune sau o sursă de curent intră în această categorie; în domeniul hidraulic o pompă asigură presiunea necesară în circuitul hidraulic.
- *Proces de conversie*. Un transformator generalizat (TR) simbolizează acest proces. Efortul  $e_1$  și respectiv fluxul  $f_1$  se vor transforma în  $e_2$  și respectiv  $f_2$  respectându-se relațiile  $e_1 = n \cdot e_2$  și  $n \cdot f_1 = f_2$ . Un exemplu tipic pentru acest caz este transmisia prin roți dințate. În cazul unei conversii calitative simbolizarea corespunde termenului (GY) (gyrator) caz în care se respectă relațiile  $e_1 = r \cdot f_2$ ,  $e_2 = r \cdot f_1$ . De ex.: o pompă cu roți dințate acționată electric realizează conversia energie electrică  $\rightarrow$  energie hidraulică; motorul electric realizează conversia energie electrică  $\rightarrow$  energie mecanică.
- *Proces de distribuție*. Asemănător circuitelor electrice fluxul energetic în cazul teoriei bondgraf este reprezentat în mod paralel sau serial. Joncțiunea din acest caz este echivalentă nodului din circuitele electrice (Kirchhoff – I). Există două tipuri de joncțiuni: *joncțiune 0* echivalentă conexiunilor în paralel din electrotehnică și *joncțiune 1* echivalentă conexiunilor seriale. Pentru joncțiunea 0 este valabilă relația  $\sum f_i = 0$ . Într-o joncțiune 1 suma variabilelor efort la același flux este  $\sum e_i = 0$

### 3.5.2. Metoda impedanței generalizate

În teoria sistemelor una din metodele de bază în modelare și analiză este cea a funcției de transfer. Din păcate modul de abordare prin intermediul funcției de transfer – o mărime de intrare și una de ieșire – face abstracție de considerente energetice specifice sistemelor fizice. Teoria sistemelor fizice are la bază noțiunea de energie (E) definită ca puterea acumulată în timp. Pornind de la acest aspect se introduce noțiunea de putere generalizată  $\Pi$  ca produsul a două mărimi cantitative fizice, observabile și complementare:

$$\Pi = \alpha \cdot \tau \quad (3.106)$$

$$E = \int \Pi dt = \int \alpha \cdot \tau dt \quad (3.107)$$

În mod generic cele două mărimi se referă la cantități dintre două puncte ( $\alpha$ ) (*across*) și respectiv dintr-un punct ( $\tau$ ) (*through*) (asemănător ca la pct.3.6.1). Exemple de o astfel de încadrare a unor mărimi fizice sunt prezentate în tabelul 3.8

Tabelul 3.8

DOMENIUL	MĂRIMEA $\alpha$	MĂRIMEA $\tau$
Translație mecanică	Viteza [m/s]	Forța [N]
Rotație mecanică	Viteza unghiulară [rad/s]	Cuplul [Nm]
Electric	Tensiunea [V]	Curentul [A]
Hidraulic	Presiunea [N/m <sup>2</sup> ]	Debitul volumic [m <sup>3</sup> /s]

Un dipol liniar pasiv (fig.3.48) se echivalează în domeniul electric cu o mărime pozitivă care depinde de frecvența de lucru și parametrii circuitului, denumită impedanța circuitului (tabelul 3.9).

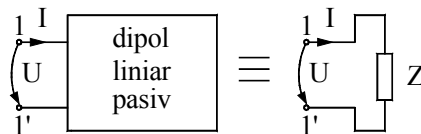


Fig. 3.48 Dipol și impedanță

Tabelul 3.9

$Z(s)$		
$R$	$sL$	$\frac{1}{sC}$

Noțiunea de impedanță se poate generaliza și pentru alte domenii diferite de cel electric. În domeniul mecanic – sisteme mecanice de translație - impedanțele corespunzătoare, pentru analogia deplasare  $X \leftrightarrow$  sarcina electrică, sunt prezentate în figura 3.49.

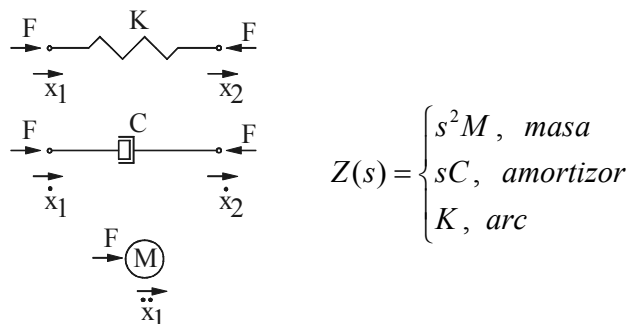


Fig. 3.49 Impedanța mecanică

Pentru analogia *viteză*  $\frac{dx}{dt} \leftrightarrow$  *intensitatea curentului*  $I$ , se obține o altă variantă a impedanței mecanice. Alegerea unei variante sau a alteia ține doar de comoditatea de lucru. Pentru sistemele mecanice de rotație se pot defini în mod asemănător relații pentru impedanțele echivalente.

Avantajele echivalențelor și generarea impedanței generalizate în modul de construcție a modelelor pentru sistemele fizice este un lucru cert.

O reprezentare mai complexă a unui sistem are la bază utilizarea noțiunii de cuadripol (fig.3.50).

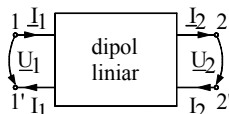


Fig. 3.50 Cuadripol

Sistemul este reprezentat prin două mărimi de intrare și două de ieșire. Există și posibilitatea de reprezentare printr-un dipol pentru sistemele fizice mecanice și avantajele sunt deosebite, în special când nu se neglijează deformațiile torsionale din sistem în cazul sistemelor rapide, la utilizarea unor cuplaje comandate în lanțul cinematic sau la utilizarea transmisiilor mecanice în lanțul cinematic [3.6].

Impedanța pentru diverse elemente este prezentată în tabelul 3.10 [3.5].

Tabelul 3.10

<b>Element electric</b> <i>efort = tensiune</i> <i>flux = curent</i>	<b>Capacitate</b> $u = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_0$ $Z_c = \frac{\Delta U(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC}$	<b>Inductivitate</b> $u = L \frac{di}{dt}$ $Z_L = \frac{U(s)}{I(s)} = sL$	<b>Resistor</b> $u = Ri$ $Z_R = \frac{U(s)}{I(s)} = R$
<b>Element mecanic (analogie forță – curent)</b> <i>efort = viteză</i> <i>flux = forță</i>	<b>Masă</b> $v = \frac{1}{M} \int_0^t F dt + v_0$ $Z_m = \frac{\Delta v(s)}{F(s)} = \frac{1}{sM}$	<b>Element elastic (arc)</b> $\Delta v = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$ $Z_e = \frac{v(s)}{F(s)} = \frac{s}{k}$	<b>Amortizor</b> $\Delta v = \frac{1}{c} F$ $Z_a = \frac{v(s)}{F(s)} = \frac{1}{c}$
<b>Element mecanic (analogie forță – tensiune)</b> <i>efort = forță</i> <i>flux = viteză</i>	<b>Arc</b> $F = k \int_0^t \Delta v dt + F_0$ $Z_e = \frac{F(s)}{v(s)} = \frac{k}{s}$	<b>Masă</b> $F = M \frac{dv}{dt}$ $Z_m = \frac{F(s)}{v(s)} = sM$	<b>Amortizor</b> $F = c \Delta v$ $Z_a = \frac{F(s)}{v(s)} = c$
<b>Element fluidic</b> <i>efort = presiune</i> <i>flux = debit</i>	<b>Capacitate</b> $p = \frac{1}{C} \int_0^t q dt + p_0$ $Z_c = \frac{\Delta p(s)}{q(s)} = \frac{1}{sC}$	<i>Uzual ignorat – efectul de ciocan</i>	<b>Rezistență</b> $\Delta p = Rq$ $Z_r = \frac{\Delta p(s)}{q(s)} = R$
<b>Element termic</b> <i>efort = temperatură</i> <i>flux = debit</i>	<b>Capacitate</b> $\Theta = \frac{1}{C} \int_0^t q dt + \Theta_0$ $Z_c = \frac{\Delta \Theta(s)}{q(s)} = \frac{1}{sC}$	-	<b>Rezistență</b> $\Delta \Theta = Rq$ $Z_r = \frac{\Delta \Theta(s)}{q(s)} = R$

### 3.6. Bibliografia capitolului 3

[3.1] Auslander, D.M., Mechatronics: A Design and Implementation Methodology for

- Real Time Control Software, Berkely University, 1997
- [3.2] Bishop, H. Robert, The Mechatronics Handbook, CRC Press, London-New York-Washington, 2002
- [3.3] Blanchard, B.S., Fabrycky, W.J., Systems Engineering and Analysis, Prentice Hall, 2006
- [3.4] Coelingh, H.J., DeVries, T.J., VanAmerongen, J., Design Support for Motion Control Systems, <http://www.rt.el.utwente.nl/mechatronics>
- [3.5] Devdas, S., Kolk A.R., Mechatronics System Design, PWS Publis. Comp., Boston, 1997
- [3.6] Dolga, V., Proiectarea sistemelor mecatronice, Editura Politehnica, Timișoara, 2007
- [3.7] Dolga, V., Elemente de inginerie mecanică în construcția echipamentelor electronice, Vol.1, Editura Politehnica, 2003
- [3.8] Enikov, E.T., Control systems design, [www.ame.arizona.edu/ame455](http://www.ame.arizona.edu/ame455)
- [3.9] Flores, K.M, Introduction to Mechanical Behavior of Materials, Handout # 8: Anelasticity
- [3.10] Harris, C.M., Crede, Ch.E., Socuri și vibrații, vol.II, Editura tehnică, București, 1968
- [3.11] Hensen, R.H., Molengraft, J.G., Steinbuch, M., Frequency domain identification of dynamic friction model parameters, IEEE on Contr. Syst. Tech., v.10, no.2, 2002
- [3.12] Isermann, R., Mechatronische Systeme, Springer-Verlag, Berlin, 1999
- [3.13] Longoria, R.G., Modeling of mechanical systems for mechatronics applications, în The mechatronics handbook, editor R.H. Bishop, CRC Press, 2002
- [3.14] Mătiș, V., Mecatronică, Editura Dacia Cluj-Napoca, 1998
- [3.15] Miu, K.D., Mechatronics. Electromechanics and Contromechanics, Springer-Verlag, New York 1992
- [3.16] Najim, K., Control of Continuous Linear Systems, ISTE Ltd, ISBN-13: 978-1-905209-12-5, 2006
- [3.17] Polsson, K., Chronology of Personal Computers, <http://www.islandnet.com/~kpolsson/comphist>
- [3.18] Savii, G.G., Luchin, M., Modelare și simulare, Ed. Eurostampa, Timișoara, 2000
- [3.19] Sermesant, M., Modèles électromécanique du cœur pour l'analyse d'image et la simulation, These, Université de Nice Sophia-Antipolis, 2003
- [3.20] Silaș, Gh., Mecanică. Vibrații mecanice, Ed. didactică și pedagogică, 1967, București
- [3.21] Teodorescu, P.P., Ille, V., Teoria elasticității și introducerea în mecanica solidelor deformabile, Editura Dacia, Cluj – Napoca, 1976
- [3.22] Timotin, A., s.a., Lecții de bazele electrotehnicii, EDP, București, 1970
- [3.23] Vâlcovici, V., Bălan, Șt., Voinea, R., Mecanică teoretică, Editura Tehnică,
- [3.24] Wellstead, P.E., Introduction to Physical System Modelling, electronically published by: [www.control-systems-principles.co.uk](http://www.control-systems-principles.co.uk)
- [3.25] \*\*\*, Damping, <http://en.wikipedia.org/wiki/Damping#Definition>
- [3.26] \*\*\*, ISP Glosary, <http://isp.webopedia.com/TERM/s/simulation.html>
- [3.27] \*\*\*, EuroSim Mk3.2., <http://www.eurosim.nl/support/manual/html/SUM/B.html>