Sisteme de ordinul 2: model, funcție de transfer, simulare, identificarea parametrilor

1. Scopul lucrării

În această lucrare se vor analiza comportarea în domeniul real şi complex a unui sistem liniar invariant de ordinul 2 de tip PT2 prin definirea teoretică a parametrilor sistemului.

Apoi se vor măsura parametrii unui sistem real PT2 realizat în laborator şi se compară rezultatele cu un sistem identic simulat cu programul WorkBench.

Se studiază influența unor parametrii ai sistemului asupra performanțelor acestuia şi posibilitatea intervenției asupra lor.

2. Considerații teoretice

Dinamica unui sistem liniar de ordinul 2 (PT2) cu mărimea de intrare u(t) şi mărimea de ieşire y(t) este descrisă de ecuația diferențială:

$$a_2 \cdot y^{(2)}(t) + a_1 \cdot y^{(1)}(t) + a_0 \cdot y(t) = b_0 u(t) \quad (1)$$

Dacă se notează:

	$K = b_0/a_0$	constantă de proporționalitate
	$T = \sqrt{a_2 / a_0}$	perioada unei oscilații neamortizate
	$d = a_1 / 2\sqrt{a_0 a_2}$	coeficient de amortizare

ecuația (1) devine:

$$T^2 y^{(2)}(t) + 2dTy^{(1)}(t) + y(t) = Ku(t) \quad (2)$$

Aplicând transformata Laplace ecuației (2) se obține funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{T^2 s^2 + 2dTs + 1} \quad (3)$$

În domeniul complex notând cu $\omega_0 = 1/T$ pulsația naturală a procesului ecuația (1) devine:

$$y^{(2)}(t) + 2d\omega_0 y^{(1)}(t) + \omega_0^2 y(t) = K\omega_0^2 u(t) \quad (4)$$

iar funcția de transfer este:

$$H(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (5)$$

Pentru analizarea performanțelor unui sistem (fig.4.1) se utilizează ca mărime de intrare un semnal treaptă unitară $\sigma(t)$ (K=1), în acest caz mărimea de ieşire y(t) va fi un răspuns indicial.

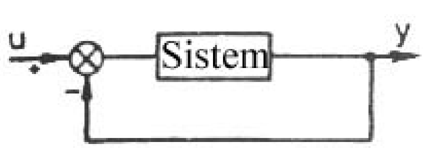

Fig.4.1

Soluția generală a ecuației (2) are o componentă staționară $y_s = 1$ şi o componentă tranzitorie $y_0(t)$ ce reprezintă răspunsul sistemului în condițiile y(0) = 0, $y^{(1)}(0) = 0$ şi $y^{(2)}(0) = 0$:

$$y(t) = y_0(t) + y_s \quad (6)$$

Din răspunsul indicial se evaluează performanțele sistemului precum şi influența parametrului d (coeficient de amortizare) asupra acestor performanțe.

În funcție de valoarea lui d se disting 5 regimuri de funcționare:

a) d > 1 regim aperiodic amortizat;
b) d = 1 regim aperiodic critic amortizat;
c) $d \in [0,1)$ regim oscilant amortizat;
d) d = 0 regim oscilant neamortizat;
e) d < 0 regimul este instabil deoarece mărimea de ieşire creşte nemărginit în timp.

Pentru determinarea componentei tranzitorii $y_0(t)$ se rezolvă ecuația caracteristică:

$$T^2 r^2 + 2dTr + 1 = 0 \tag{7}$$

ce are rădăcinile r_1 şi r_2:

$$r_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 1}}{T} \tag{8}$$

Soluția generală, care constituie răspunsul indicial al elementului PT_2 este:

$$y(t) = K\left[1 - \frac{r_2}{r_2 - r_1} e^{r_1 t} + \frac{r_1}{r_2 - r_1} e^{r_2 t}\right] \tag{9}$$

În cazul când rădăcinile r_1 şi r_2 sunt reale, se studiază răspunsul sistemului în domeniul real, iar dacă rădăcinile ecuației (7) sunt complex conjugate, se studiază răspunsul sistemului în domeniul complex.

a) d>1 **răspuns aperiodic amortizat**

Polinomul caracteristic are rădăcini reale distincte:

$$r_1 = -\frac{1}{T_1}, \qquad r_2 = -\frac{1}{T_2} \tag{10}$$

Din relațiile (8) şi (10) rezultă:

$$T_{1,2} = T / \left(d \pm \sqrt{d^2 - 1}\right) \tag{11}$$

În acest caz funcția de transfer este:

$$H(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \tag{12}$$

Soluția generală în domeniul real a elementului PT_2 este:

$$y_\sigma(t) = K - \frac{K}{T_1 - T_2}\left[T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}\right] \tag{13}$$

Răspunsul este aperiodic amortizat, deci sistemul intră în **regim stabil.**

b) d=1 **răspuns aperiodic critic amortizat**

Polinomul caracteristic (7) are rădăcini reale egale:

$$r_1 = r_2 = -1/T \qquad \text{sau} \qquad T_1=T_2=T \tag{14}$$

Pentru rădăcină multiplă de ordinul 2 soluția ecuației diferențiale este:

$$y_\sigma(t) = K\left[1 - \left(1 + \frac{t}{T}\right)e^{-\frac{t}{T}}\right] \tag{15}$$

Sistemul intră în **regim stabil amortizat la limită**.

c) $d \in (0,1)$ **răspuns oscilant amortizat**

Polinomul caracteristic ce rezultă din ecuația (4) are rădăcini complex conjugate:

$$r_{1,2} = -d\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - d^2} = -\alpha \pm j\omega_a \tag{16}$$

Răspunsul indicial mai poate fi exprimat prin relația:

$$y(t) = K\left[1 - \frac{\omega_0}{\omega_a} e^{-\alpha t} \sin(\omega_a t + \varphi)\right] \tag{17}$$

unde $\alpha = d\omega_0$, $\omega_a = \omega_0\sqrt{1-d^2}$ ω$_a$ – pulsația oscilațiilor amortizate (18)

$$\varphi = arctg\frac{\omega_a}{\alpha}$$ φ – unghi de oscilație (19)

Se observă că în final, sistemul intră în **regim stabil**.

d) d = 0 **răspuns oscilant neamortizat (pseudostabil)**

Polinomul caracteristic are rădăcini complex conjugate cu parte reală nulă:

$$r_1 = +j\omega_0,\ \ r_2 = -j\omega_0 \quad (20)$$

În acest caz sistemul este în **regim pseudostabil** ce face tranziția între regimul stabil și regimul instabil, răspunsul indicial fiind dat de relația (17).

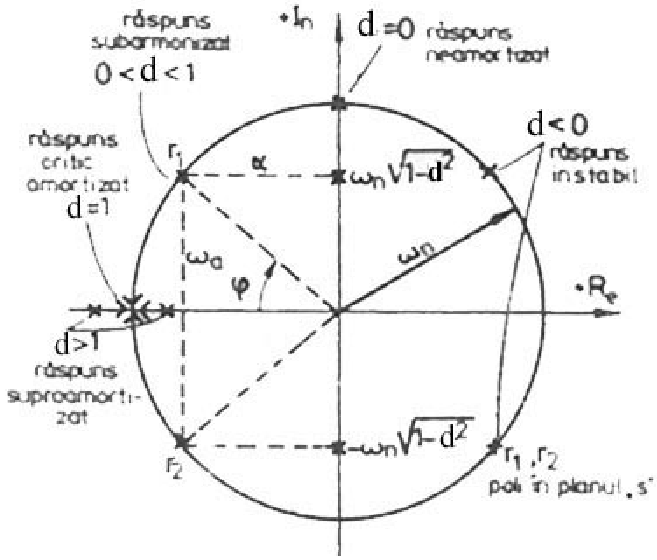

Fig.4.2.

e) d<0 **răspuns oscilant instabil**

În acest caz răspunsul sistemului este exprimat de relația (17). Amplitudinea oscilațiilor este continuu crescătoare. Sistemul scos dintr-o stare staționară nu reușește să se stabilizeze, trecând în **regim instabil**.

Semnificația fizică a parametrilor d și ω_0 în domeniul complex este prezentată în fig.4.2. Așezarea polilor corespunde sistemului de ordinul doi pentru cele 5 cazuri.

Dacă se compară fig.4.2 cu fig.4.3 se observă că cu cât d este mai mic, corespunzând unei perechi de poli complex conjugați mai aproape de axa imaginară, cu atât suprareglajul este mai mare.

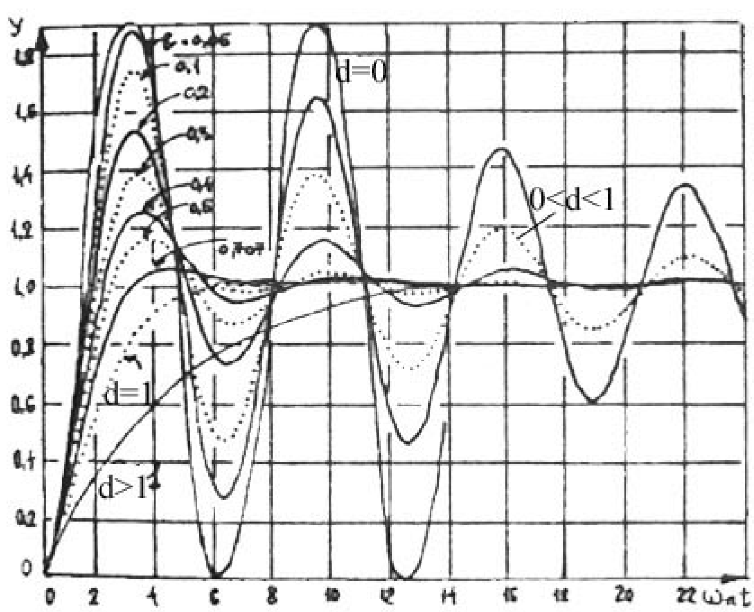

Fig.4.3.

Dacă se reprezintă grafic relația (17) pentru cazurile a, b şi c, se obțin curbele din fig.4.4 pentru un semnal de intrare u(t) treaptă unitară.

- y_{st} = valoarea staționând a mărimii de ieşire
- t_s = durata regimului tranzitoriu
- ε_{st} = eroarea staționară
- t_c = timp de creştere de la 0,05 U la 0,095 U
- $y_{max\ 1}$ = valoarea primului maxim a lui y
- $y_{max\ 3}$ = valoarea celui de al treilea maxim a lui y

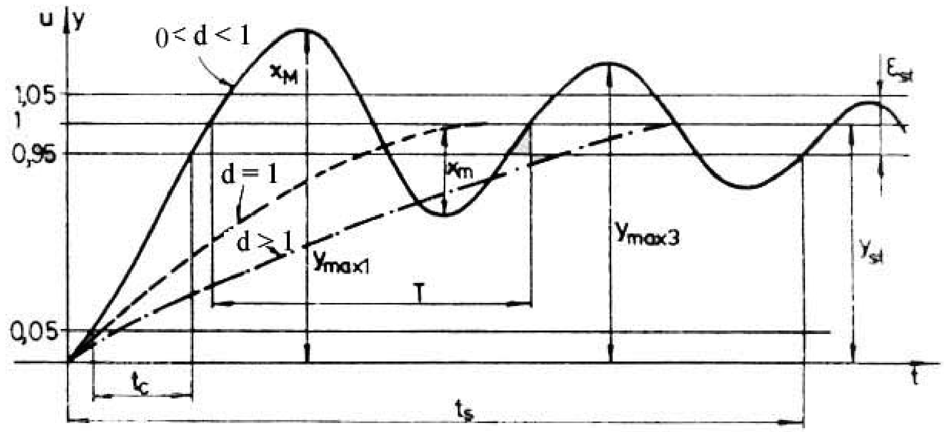

Fig.4.4.

Pentru un sistem de ordinul 2 se definesc următorii **indici de performanță**:

a) <u>Eroare staționară</u> ε_{st} ce reprezintă diferența dintre valoarea mărimii de ieşire în regim staționar y_{st} şi valoarea mărimii de intrare u(t):

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + H(s)} \qquad (21)$$

Pentru ca ε_{st} =0 este suficient ca funcția de transfer H(s) să aibă un pol în origine.

În acest caz contrar se impune prin proiectare ca $\varepsilon_{st} = 2 \cdot 5\% y_{st}$

b) <u>Suprareglajul</u> "σ" este definit prin relația:

$$\sigma = y_{max1} - y_{st} \qquad (22)$$

Suprareglajul se determină din condiția $y^{(1)}(t) = 0$ cu ajutorul constantei de timp a oscilațiilor amortizate $T_a = 2\pi / \omega_a$

$$\sigma = e^{\frac{-\pi d}{\sqrt{1-d^2}}} \qquad (23)$$

Reprezentând funcția $\sigma = \sigma(d)$ se obține graficul din fig.4.5.

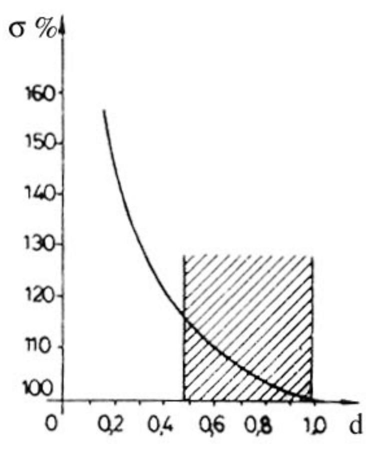

Fig.4.5.

Se observă că zona optimă de funcționare este pentru 0,5 < d < 1.

Decrementul logaritmic pentru două extreme consecutive este:

$$D = \ln(x_M / x_m) = \pi\omega_0 / \omega_a = \pi d / \sqrt{1 - d^2} \qquad (24)$$

c) <u>Durata regimului tranzitoriu</u> t_s (timp de stabilitate) reprezintă intervalul de timp minim după care diferența dintre mărimea ieşire y şi valoarea staționară y_{st} este mai mai mică decât ε_{st} (eroarea staționară):

$$\left|y - y_{st}\right| \le \varepsilon_{st} \tag{25}$$

Pentru y_{st}.=1 rezultă:

$$t_s = \frac{\ln 0{,}05 + \ln\sqrt{1-d^2}}{-d}\cdot T \quad (26) \qquad \text{în practică se acceptă valoarea } t_s \cong 4T/d \quad (27)$$

Observație: Obținerea unei erori staționare mici şi a unui timp scurt de răspuns poate conduce la un sistem oscilant sau chiar instabil, deci trebuie rezolvat un optim între ele.

d) <u>Gradul de amortizare</u> "δ" este definit prin relația:

$$\delta = 1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \quad (28) \qquad \delta = 1 - e^{-\frac{2\pi d}{\sqrt{1-d^2}}} \quad (29)$$

Se observă că atât suprareglajul "σ" cât şi gradul de amortizare "δ" au sens doar pentru 0<d<1, deci pentru regimurile oscilante amortizate.

3.Mersul lucrării

A) Se determină răspunsul indicial pe osciloscop pentru un sistem de ordinul 2 (fig.4.6) folosind ca semnal de intrare un impuls treaptă sau un semnal dreptunghi cu perioada T >>t_s.

$$LCy^{(2)}(t) + RCy^{(1)}(t) + y(t) = u(t) \tag{30}$$

$$T = \sqrt{LC},\quad k = 1,\quad d = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}},\quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{31}$$

B) Se determină indicii de performanță din răspunsul sistemului de pe osciloscop şi se compară cu valorile calculate cu ajutorul formulelor.

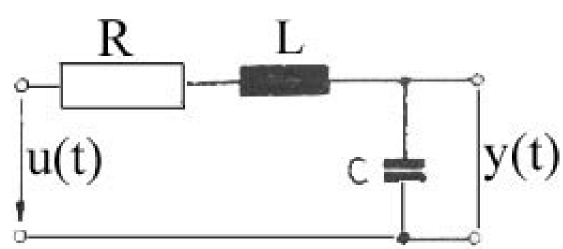

Fig.4.6.

C) Se va studia dependența performanțelor tranzitorii (indicii $\varepsilon_{st}, \sigma,\ D,\ t_s,\ \delta$) modificând parametrii sistemului L, C, R, deci d şi ω_0 (sau d şi T).

D) Se vor efectua măsurători pentru trei cazuri:

0<d<1; d=1 şi d>1.

4. Efectuarea lucrării

Se realizează montajul din fig.4.7 cu un sistem din fig.4.6.

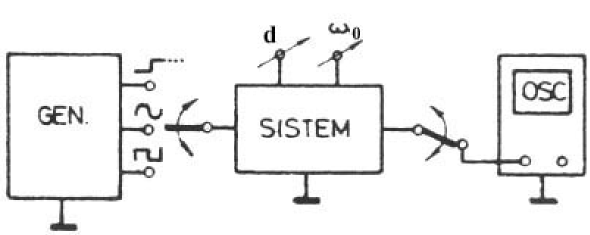

Fig.4.7.

Se determină parametrii k, d şi ω_0 în patru cazuri.

1. Când $d \in [0,1)$ polii funcției de transfer sunt complex conjugați cu partea reală negativă, răspunsul este oscilant amortizat. Având înregistrat răspunsul indicial y(t)

(conform fig.4.4) parametrii se determină astfel:

- se măsoară valoarea staţionară y_{st};
- se măsoară constanta de timp a oscilaţiilor amortizate Ta, ca fiind timpul între 2 treceri prin zero sau două maxime consecutive, de acelaşi sens;
- se calculează $\omega_a = 2\pi / Ta$
- se măsoară raportul amplitudinilor a două maxime consecutive $x_M/x_m = p$;
- utilizând relaţia 16 se determină coeficientul de amortizare

$$d = \frac{D}{\sqrt{\pi^2 + D^2}} = \frac{\ln p}{\sqrt{\pi^2 + (\ln p)^2}} \tag{32}$$

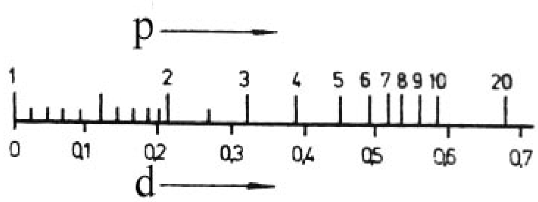

Fig.4.8.

Pentru determinarea directă a factorului de amortizare în funcţie de p se poate utiliza nomograma din fig.4.8.

- se calculează σ şi δ
- cunoscând d şi ω_a se determină din relaţia (18) şi corespunzător $T = 1/\omega_0$;
- se calculează durata regimului tranzitoriu t_s cu relaţia (26) sau (27).

pentru $d = 0{,}707$ se obţine un regim optim cu o suprareglare $\sigma = 4{,}3\%$ şi $t_s = 4{,}78 / \omega_0$.

2. Cazul d = 0. Sistemul devine oscilant neamortizat cu $\omega_a = \omega_0$ fiind la limita de stabilitate. Se determină Ta = T între două treceri prin zero în acelaşi sens.
3. Cazul d > 1 (rădăcini reale negative)
   $r_1 = -1/T_1, \quad r_2 = -1/T_2$ sistemul este aperiodic stabil, funcţia de transfer este relaţia(12).
   Pentru determinarea constantelor T_1 şi T_2 cu $b = T_2/T_1$ se procedează în felul următor:
   - prin punctul de inflexiune se duce tangenta la curba răspunsului şi se determină T_x, T_y, T_z conform fig.4.9a).
   - se determină coeficientul b din diagrama 4.9 b);
   - în funcţie de valoarea lui b se determină din diagrama 4.9 c) valoarea raportului T_z/T_1
   - se calculează T_1 şi apoi $T_2 = dT_1$;
   - se vace verificarea $AB = T_x + T_y - T_z = T_1 + T_2$
4. **În** cazul d = 1, rădăcinile sunt reale, egale şi negative $r_{1,2} = -1/T = -\omega_0$
   Răspunsul este aperiodic critic fig.4.9d) şi are expresia (15).

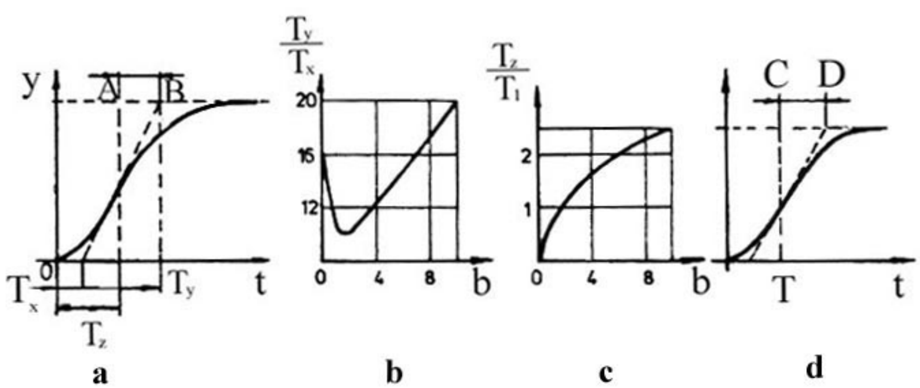

Fig.4.9.

Constanta de timp T se poate determina în acest caz, direct ca abscisa punctului de inflexiune, sau măsurând segmentul CD = 2T. Se pot folosi de asemenea diagramele 4.9b) şi 4.9c) pentru b = 1 şi rezultă $T_z = T_1$ T.