SISTEME DE ORDINUL 1
MODEL, FUNCȚIE DE TRANSFER, SIMULARE, IDENTIFICAREA PRAMETRILOR

1. **Scopul lucrării**

Scopul lucrării este ca prin prezentarea teoretică şi practică a unor sisteme de ordinul 1 studenții să aprofundeze cunoştințele referitoare la:

- Noțiunea de sistem de ordinul 1;
- Aplicarea noțiunii de sistem şi a transformatei Laplace pentru determinarea funcției de transfer;
- Răspunsul sistemului la diverse semnale de intrare prin simulare în diverse medii de lucru;
- Identificarea parametrilor sistemului de ordinul 1 reprezentat de un circuit R-L.

2. **Considerații teoretice**

Se consideră sistemul din figura 1

Fig. 1

Ecuația dinamică a sistemului de ordinul 1 este de forma:

$$a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \tag{1}$$

Aplicând transformata Laplace şi reorganizări successive se obține:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} = \frac{b_0 / a_0}{\frac{a_1}{a_0} s + 1} = \frac{S}{\tau \cdot s + 1}$$

$$Y(s) = \frac{S}{\tau \cdot s + 1} \cdot U(s) \tag{2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{S}{\tau \cdot s + 1} \cdot U(s) \right\}$$

Unde G(s) este funcția de transfer a sistemului, $S = \frac{b_0}{a_0}$ este sensibilitatea sistemului iar $\tau = \frac{a_1}{a_0}\ [s]$ este constanta de timp a sistemului.

Un circuit R-L, un circuit R_C, un sistem mecanic cu element elastic şi de amortizare, un sistem termic etc. sunt câteva sisteme de ordinal 1. Aplicabilitatea acestor sisteme în practică este diversă. De ex. circuitul R-L este întâlnit în modelarea unui servomotor de c.c., a unui electromagnet, dar este întâlnit şi în construcția unui filtru pasiv. Aceste aplicații diverse susțin necesitatea abordării sistemice (black box) în analiza funcționării proceslor din lumea reală.

Cele mai multe sisteme întâlnite în practică sunt *sistemele liniare*. În acest caz se poate studia comportarea sistemului separat pentru fiecare componentă a semnalului de intrare şi apoi rezultatele se însumează. Sistemele liniare au fost analizate şi dispun de suportul matematic pentru analiză şi proiectare. Un sistem este liniar dacă satisface:

- principiul aditiv: dacă un sistem cu parametrul de intrare $x_1(t)$ îi corespunde un semnal de ieşire $y_1(t)$ şi respectiv pentru $x_2(t)$ va exista un $y_2(t)$ atunci la un semnal cauză $x_1(t)+x_2(t)$ îi va corespunde semnal efect $y_1(t)+y_2(t)$:

$$\text{If } x_1 \to y_1 \text{ AND } x_2 \to y_2 \text{ THEN } x_1 + x_2 \to y_1 + y_2 \tag{3}$$

- proprietatea de omogenitate: o combinaţie liniară a parametrilor de intrare [k x(t)] dau aceeaşi combinaţie liniară a parametrilor de ieşire [k y(t)]:

$$\text{If } x \to y \text{ THEN } kx \to ky \tag{4}$$

Combinaţia de aditivitate şi omogenitate este denumită superpoziţie şi se exprimă prin:

$$k_1x_1 + k_2x_2 \to k_1y_1 + k_2y_2$$

- ***Răspunsul sistemului la o mărime de intrare impuls unitar***

Transformata Laplace a mărimii de intrare considerate este U(s) =1

Relaţia (2) devine în acest caz:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S}{\tau \cdot s + 1} \cdot 1\right\} = S \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/\tau}{s + 1/\tau}\right\} = S \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{5}$$

pentru care s-a utilizat tabela de funcţii inverse Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s+a}\right\} = k \cdot e^{-at} \tag{6}$$

Formele de variaţie a mărimilor de intrare şi ieşire sunt prezentate în figura 2

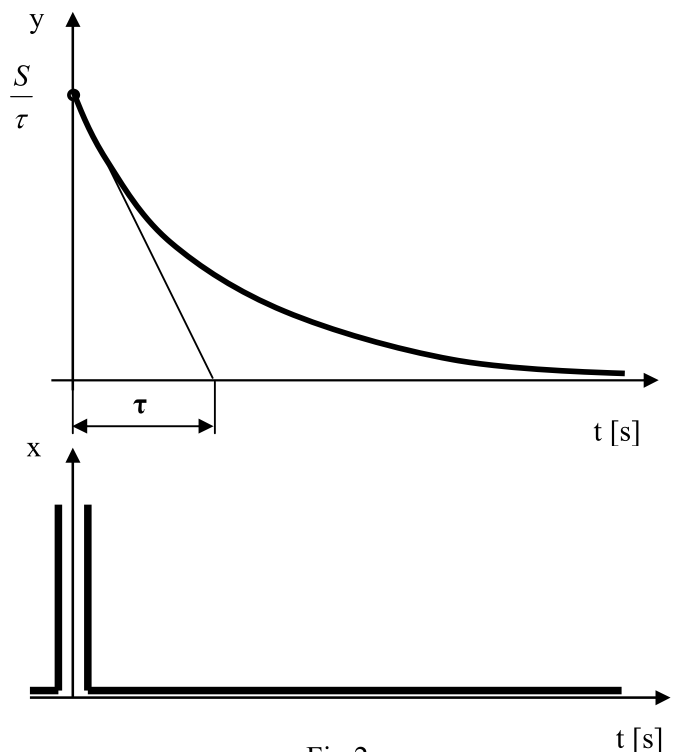

Fig.2

- ***Răspunsul sistemului la o mărime de intrare treaptă***

Pentru un semnal de tip treaptă transformata Laplace este $U(s) = \frac{H}{s}$ unde H este valoarea semnalului (H = 1 defineşte semnalul treaptă unitară).

În acest caz răspunsul sistemului se determină conform următoarelor:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S}{\tau \cdot s+1}\cdot\frac{H}{s}\right\} = S\cdot H\cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{\tau}}{s(s+\frac{1}{\tau})}\right\} = S\cdot H\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{7}$$

Răspunsul sistemului la un semnal treaptă este prezentat în figura 3. Se observă că valoarea de regim staționar este $y_{st} = S \cdot H$

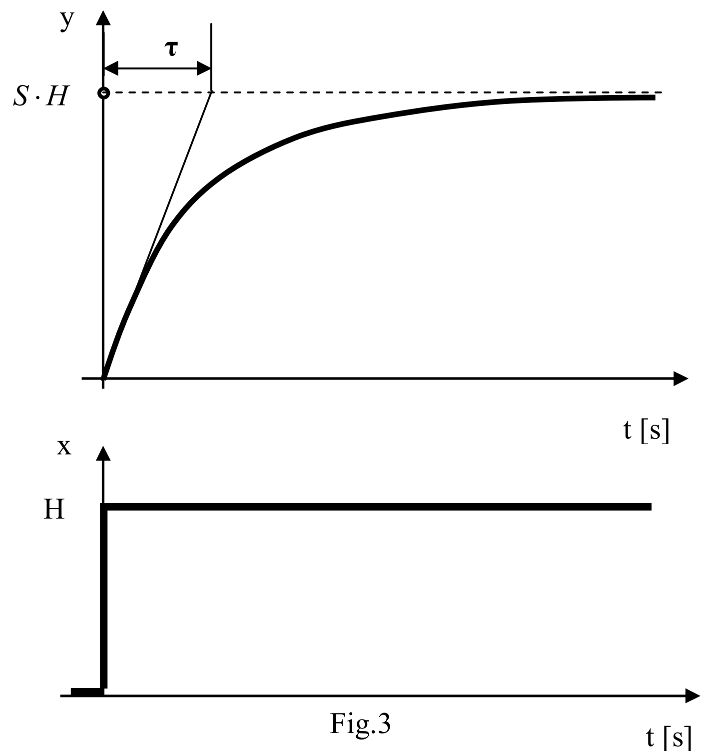

Fig.3

În mod asemănător se pot determina răspunsurile sistemului la alte mărimi de intrare standard.

3. Mersul lucrării

3.1 Încadrarea unui sistem în clasa sistemelor de ordinul 1 şi determinarea funcţiei de transfer

Se consideră sistemul de încălzire electrică a uleiului dintr-un rezervor (fig.4).

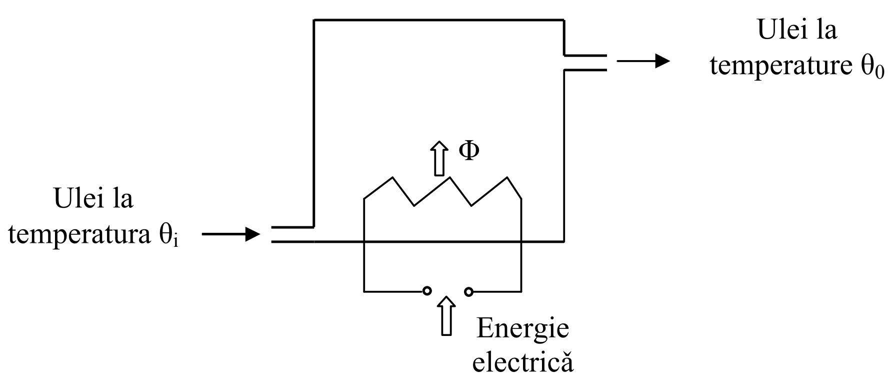

Fig. 4

În rezervorul cu ulei este inclus un resistor electric care asigură un flux termic Φ spre uleiul care pătrunde în rezervor. Ca urmare a transferului termic realizat temperatura uleiului creşte de la θ_1 la temepratura θ_0. Rezistența termică resistor electric - ulei este R_t [^0C / W] iar capacitatea termică a masei de ulei este C_t [J / ^0C].

Se cere:

- determinarea ecuației diferențiale a procesului de încălzire a uleiului;
- determinarea ordinului sistemului;
- determinarea funcției de transfer.

3.2 <u>Răspunsul unui sistem de ordinal 1 la semnal standard</u>

Pentru circuitul R-L din figură scrieți:

- Funcția de transfer considerând ca mărime de intrare tensiunea de alimentare U_0 iar ca marime de ieşire, curentul i(t);
- Trasați forma de răspuns a sistemului în condițiile parametrilor admişi ($U_{0,}$ i(t), R, L) la un semnal de tip impuls unitar;
- Trasați forma de răspuns a sistemului în condițiile parametrilor admişi ($U_{0,}$ i(t), R, L) la un semnal de tip treaptă;
- Determinați prin metoda clasică răspunsul teoretic al sistemului la o mărime de intrare de tip sinusoidal.

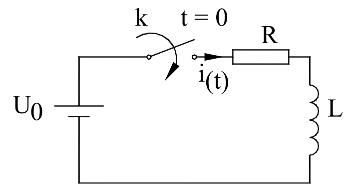

Fig.5

3.3 <u>Identificarea parametrilor sistemului de ordinul (circuitul R-L)</u>

Pentru un circuit R-L din componența unui electromagnet se urmăreşte:

- Determinarea răspunsului sistemului la semnale de tip impuls, treaptă şi compararea cu modelul teoretic dela pct.3.2. Se utilizează schema electrică din figura 5 şi vizualizarea răspunsului cu ajutorul osciloscopului.
- Se determină prin măsurare directă tensiunea de curent continuu pentru alimentarea circuitului (prin utilizarea multimetrului) se măsoară rezistența electrică R a bobinei electromagnetului (prin utilizarea multimetrului), se determină constanta de timp a sistemului (din înregistrarea răspunsului sistemului), se determină inductivitatea bobinei electromagnetului.
- Determinarea răspunsului sistemului la un semnal sinusoidal şi compararea cu modelul teoretic. Utilizați schema de montaj a unui generator de semnal în conexiune cu circuitul R-L şi un osciloscop (fig.6).

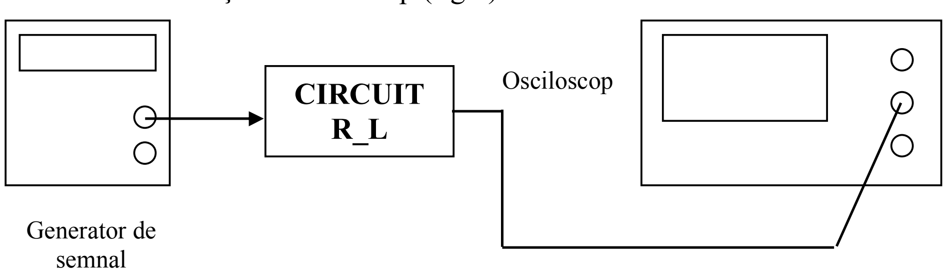

Fig.6

4. **<u>Concluzii</u>**

Se întocmeşte referatul lucrării cu concluziile punctuale la fiecare dintre aspectele abordate.

Anexa L3

Pct.3.1

Pentru scrierea ecuației funcționale se au în vedere relațiile din termodinamică:

❖ Cantitatea de căldură transmisă în unitatea de timp este fluxul termic:

$$\Phi = \frac{dQ}{dt}$$

❖ Căldura înmagazinată într-un corp de masă ***m*** este

$dQ = mc \cdot d\theta = C \cdot d\theta$ unde ***c*** este căldura specifică a uleiului iar $C = m \cdot c$ este capacitatea termică a uleiului [J / ^{0}C]

❖ Prin analogie cu rezistența electrică rezistența termică se defineşte ca fiind:

$$R_t = \frac{\theta_0 - \theta_1}{\Phi} \; [{}^0C/W]$$

❖ Schema echivalentă într-o analogie cu circuitele electrice este prezentată în figura 1.

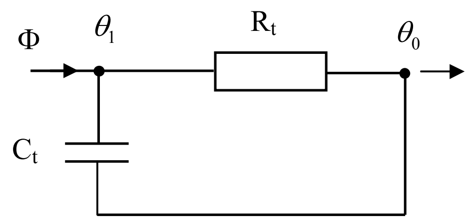

Fig.1

Ecuația diferențială care descrie procesul de transfer termic este:

$$C_t \cdot \frac{d\theta_0}{dt} + \frac{\theta_0 - \theta_1}{R_t} = \Phi$$

Exemplu numeric: $\theta_1 = 5\,^0C$, $\Phi = 20\,^0C/W$, $R_t = 2\ {}^0C/W$ şi $C_t = 20\ J/{}^0C$

Pct.3.2

Transformata Laplace a unui semnal sinusoidal $u(t) = K\sin(\omega \cdot t)$ este:

$$U(s) = K \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

şi atunci răspunsul sistemului devine:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S}{\tau \cdot s + 1} \cdot U(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S}{\tau \cdot s + 1} \cdot \frac{K \cdot \omega}{s^2 + \omega^2}\right\} = K \cdot S \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\tau \cdot s + 1} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right\}$$

Se poate prelucra expresia din paranteză:

$$\frac{1}{\tau \cdot s + 1} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{A}{\tau \cdot s + 1} + \frac{Bs + C}{s^2 + \omega^2}$$

sau

$$A + B \cdot \tau = 0$$

$$A \cdot \omega^2 + C = \omega$$

$$B + \tau \cdot C = 0$$

Coeficienții necunoscuți A, B, C se determină din sistemul format obținându-se valorile următoare:

$$A = \frac{\omega\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}$$

$$B = -\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}$$

$$C = \frac{\omega}{1+\omega^2\tau^2}$$

Atunci:

$$y(t) = K \cdot S \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\tau \cdot s+1} \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right\} = K \cdot S \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A \cdot \frac{1}{\tau}}{s+\frac{1}{\tau}}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{B\frac{s}{s^2+\omega^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{C \cdot \frac{1}{s^2+\omega^2}\right\} =$$

$$= A \cdot K \cdot S \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - B \cdot K \cdot S \cdot \cos(\omega t) + C \cdot K \cdot S \cdot \sin(\omega t) =$$

$$= K \cdot S \cdot \frac{\omega\tau^2}{1+\omega^2\tau^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - K \cdot S \cdot \frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \cdot \cos(\omega t) + K \cdot S \cdot \frac{1}{1+\omega^2\tau^2} \cdot \sin(\omega t)$$

Relația anterioară se transformă prin utilizarea relațiilor trigonometrice:

$$tg\varphi = \omega \cdot \tau$$

$$\sin[\alpha - \beta] = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha$$

Răspunsul sistemului devine astfel suma unui semnal tranzitoriu şi unul staționar:

$$y(t) = K \cdot S \cdot \frac{\omega\tau^2}{1+\omega^2\tau^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - K \cdot S \cdot \frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \cdot \cos(\omega t) + K \cdot S \cdot \frac{1}{1+\omega^2\tau^2} \cdot \sin(\omega t) =$$

$$= K \cdot S \cdot \frac{\omega\tau^2}{1+\omega^2\tau^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + K \cdot S \cdot \left[\frac{1}{1+\omega^2\tau^2} \cdot \sin(\omega t) - \frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \cdot \cos(\omega t)\right] =$$

$$= K \cdot S \cdot \frac{\omega\tau^2}{1+\omega^2\tau^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + K \cdot S \cdot \sqrt{1-\omega^2\tau^2} \cdot \sin(\omega t - \varphi) =$$

$$= y_{tranzitoriu} + y_{stationar}$$