Funcția de transfer, algebra schemelor bloc. Semnale standard şi răspunsul sistemului la aceste semnale

1. Scopul lucrării

Însuşirea de către studenți a metodei de obținere a funcției de transfer din ecuația diferențială fundamentală şi invers. Determinarea funcției de transfer a sistemelor reprezentate prin scheme bloc în diferite conexiunii de elemente: serie, paralel, cu reacție sau complexe.

Însuşirea metodei de determinare a răspunsului unui sistem utilizând funcția de transfer a semnalelor standard.

2. Considerații teoretice

Funcția de transfer (FDT) este definită ca raportul dintre imaginea operațională Y(s) a funcției de ieşire y(t) şi imaginea operațională U(s) a funcției de intrare u(t).

$$H(s)=\frac{\mathrm{L}\left[y(t)\right]}{\mathrm{L}\left[u(t)\right]}=\frac{Y(s)}{U(s)} \tag{1}$$

în condiții inițiale nule ale mărimilor de intrare şi ieşire.

Considerând ecuația diferențială a sistemului:

$$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1 y^{(1)}+a_0 y=b_m u^{(m)}+b_{m-1}u^{(m-1)}+\ldots+b_1 u^{(1)}+b_0 u \tag{2}$$

Aplicând relației (2) transformata Laplace şi ținând cont de relația (1) se obține expresia:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0} \tag{3}$$

Cunoscând funcțiile de transfer (FDT) ale elementelor componente dintr-o schemă bloc se poate obține FDT a sistemului respectând următoarele reguli de reconfigurare:

A) *Reguli de compunere* - se referă la compunerea mai multor blocuri în scopul obținerii unui bloc echivalent.

B) *Reguli de interschimbabilitate* – se referă la schimbarea poziției unor blocuri în cadrul schemei bloc.

A) *Reguli de compunere.*

a) Conexiunea serie

Se cunosc funcțiile de transfer $H_1(s)$ şi H_2 (s) ale celor două blocuri interconectate şi dependențele specifice conexiunii serie (fig.2.1).

$$\begin{cases} u_1(t)=u(t)\\ u_2(t)=y_1(t)\\ y(t)=y_2(t)\end{cases} \xrightarrow{\mathscr{L}} \begin{cases} U_1(s)=U(s)\\ U_2(s)=Y_1(s)\\ Y(s)=Y_2(s)\end{cases}$$

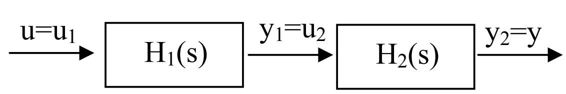


Fig. 2.1.

Conform definiției FDT din relația (1) rezultă:

$$Y_1(s)=H_1(s)U_1(s)$$
$$Y_2(s)=H_2(s)U_2(s)$$

$$Y(s)=Y_2(s)=H_2(s)\cdot U_2(s)=H_2(s)\cdot Y_1(s)=H_2(s)\cdot H_1(s)\cdot U_1(s)=H_2(s)\cdot H_1(s)\cdot U(s)$$

Notând cu $H(s)$ funcția de transfer a sistemului rezultă:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=H_1(s)\cdot H_2(s) \tag{4}$$

În cazul general pentru n elemente de transfer legate în serie obținem relația:

$$H(s)=\prod_{i=1}^{n} H_i(s) \tag{5}$$

b) Conexiunea paralel

Se cunosc funcțiile de transfer $H_1(s)$ şi $H_2(s)$ ale celor două blocuri interconectate şi dependențele specifice conexiunii paralel (figura 2.2)

$$\begin{cases} u_1(t)=u(t) \\ u_2(t)=u(t) \\ y(t)=y_1(t)+y_2(t) \end{cases} \xrightarrow{\mathscr{L}} \begin{cases} U_1(s)=U(s) \\ U_2(s)=U(s) \\ Y(s)=Y_1(s)+Y_2(s) \end{cases}$$

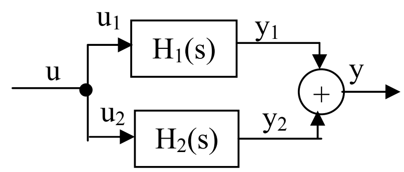


Fig.2.2.

Conform relației (1) se pot scrie FDT ale celor două elemente:

$$Y_1(s)=H_1(s)\cdot U_1(s)=H_1(s)\cdot U(s)$$

$$Y_2(s)=H_2(s)\cdot U_2(s)=H_2(s)\cdot U(s)$$

$$Y(s)=Y_1(s)+Y_2(s)=H_1(s)\cdot U(s)+H_2(s)\cdot U(s)=[H_1(s)+H_2(s)]\cdot U(s)$$

Notând cu H(s) funcția de transfer a sistemului rezultă:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=H_1(s)+H_2(s) \tag{6}$$

În cazul general pentru n elemente de transfer legate în paralel obținem relația:

$$H(s)=\sum_{i=1}^{n} H_i(s) \tag{7}$$

c) Conexiunea cu reacție

Se cunosc funcțiile de transfer $H_1(s)$ şi $H_2(s)$ ale celor două blocuri interconectate şi dependențele specifice conexiunii cu reacție (figura 2.3), considerând conexiunea cu reacție negativă (-) şi conexiunea cu reacție pozitivă (+) :

$$\begin{cases} u_1(t)=u(t)\mp y_2(t) \\ y(t)=y_1(t) \\ u_2(t)=y(t) \end{cases} \xrightarrow{\mathscr{L}} \begin{cases} U_1(s)=U(s)\mp Y_2(s) \\ Y(s)=Y_1(s) \\ U_2(s)=Y(s) \end{cases}$$

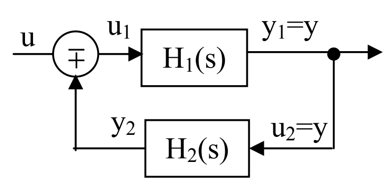


Fig.2.3.

Conform relației (1) se pot scrie FDT ale elementelor componente:

$$Y_1(s)=H_1(s)\cdot U_1(s)$$

$$Y_2(s)=H_2(s)\cdot U_2(s)$$

$$\mathrm{Y}(s)=\mathrm{Y}_1(s)=\mathrm{H}_1(s)\cdot \mathrm{U}_1(s)=\mathrm{H}_1(s)\cdot[\mathrm{U}(s)\mp \mathrm{Y}_2(s)]=$$

$$=\mathrm{H}_1(s)[\mathrm{U}(s)\mp \mathrm{H}_2(s)\cdot \mathrm{U}_2(s)]=\mathrm{H}_1(s)\cdot \mathrm{U}(s)\mp \mathrm{H}_1(s)\cdot \mathrm{H}_2(s)\cdot \mathrm{Y}(s)$$

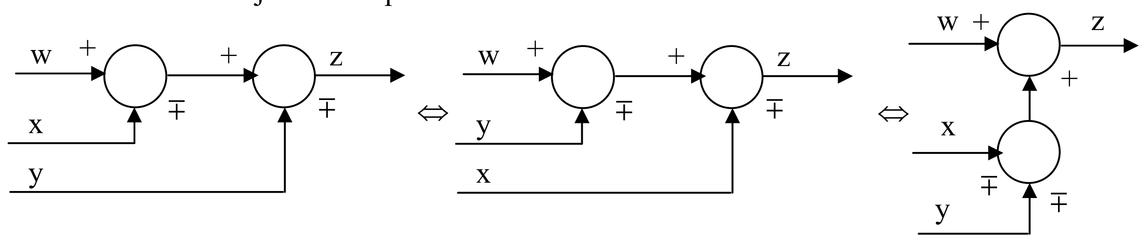
$$\Rightarrow [1\pm \mathrm{H}_1(s)\cdot \mathrm{H}_2(s)]\cdot \mathrm{Y}(s)=\mathrm{H}_1(s)\cdot \mathrm{U}(s)$$

Deci notând cu H(s) funcția de transfer a sistemului, rezultă:

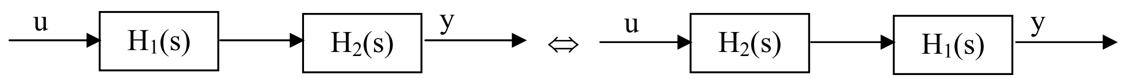
$$\mathrm{H}(s)=\frac{\mathrm{Y}(s)}{\mathrm{U}(s)}=\frac{\mathrm{H}_1(s)}{1\pm \mathrm{H}_1(s)\cdot \mathrm{H}_2(s)} \tag{8}$$

B) *Reguli de interschimbabilitate*

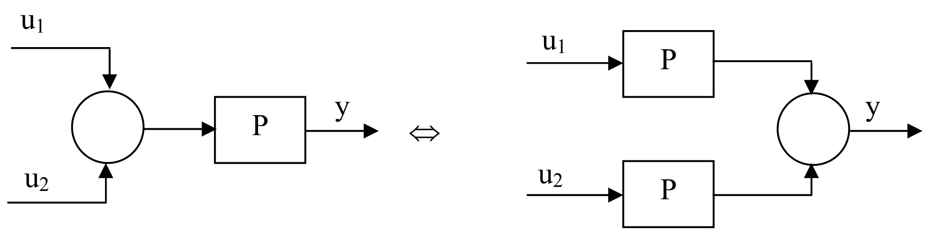
1. Rearanjarea unor puncte de însumare:



2. Două elemente de transfer lineare invariante înseriate pot fi schimbate între ele:

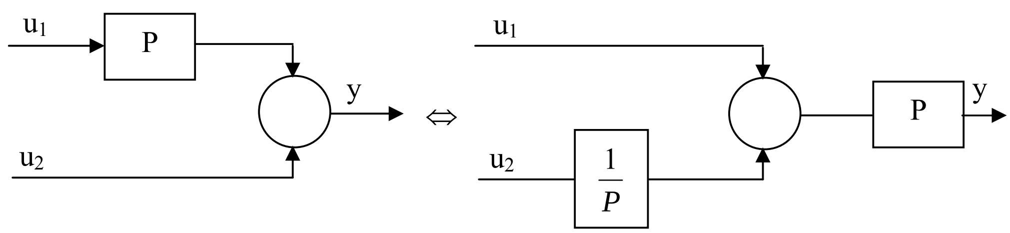


3. Deplasarea unui bloc înaintea unui element de însumare:

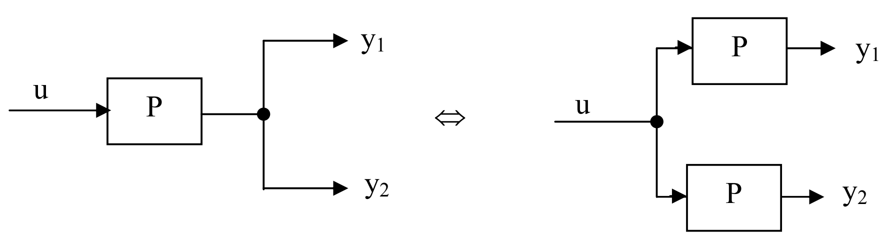


Această regulă este valabilă dacă blocul P este linear.

4. Deplasarea unui bloc după un element de însumare:

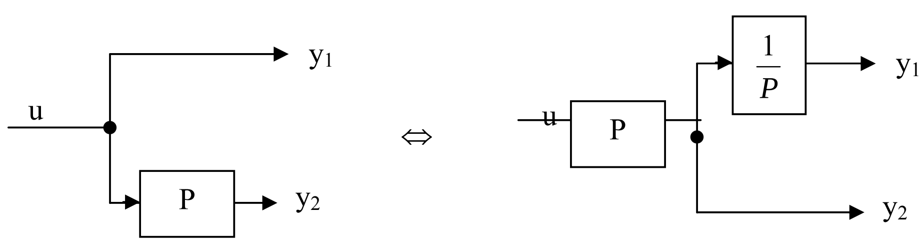


5. Deplasarea unui element de transfer după un punct de ramificație:

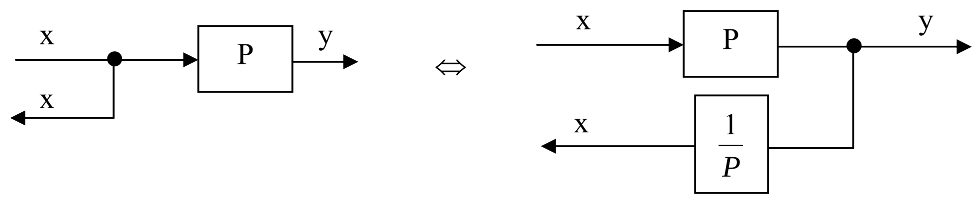


Această regulă este general valabilă pentru orice fel de elemente de transfer.

6. Deplasarea unui element de transfer înaintea unui punct de ramificație:



sau



3. Semnale de testare

Pentru a cunoaşte structura SAR şi a blocurilor funcționale componente, precum şi pentru stabilirea comportării dinamice a sistemului, la intrarea acestora se aplică semnale de testare şi se urmăreşte mărimea de ieşire ca funcție a răspunsului la aceste semnale.

În Anexa 1 sunt prezentate cele mai uzuale semnale de testare:

1. Semnalul impuls unitar
2. Semnalul treaptă unitară
3. Semnalul rampă unitară
4. Semnalul parabolă unitară
5. Semnalul armonic.

4. Mersul lucrării

A. Ținând seama de expresia (3) se poate scrie funcția de transfer a unui element cunoscând ecuația diferențială a acestuia după următoarele reguli:

1. Gradul polinomului de la numărător este egal cu cel mai mare ordin de derivare a mărimii u;
2. Coeficienții termenilor din partea dreaptă a ecuației diferențiale devin coeficienții polinomului de la numărător;
3. Gradul polinomului de la numitor este egal cu cel mai mare ordin de derivare a mărimii y;
4. Coeficienții din partea stângă a ecuației diferențiale sunt coeficienții polinomului de la numitor.

B. Cunoscând regulile de compunere şi de interschimbabilitate se va obține funcția de transfer a unui sistem, dat de o schemă bloc, parcurgând următoarele etape:

1. Se identifică conexiunile serie, paralel şi cu reacție şi se calculează FDT ale acestora cu relațiile (5), (7) şi (8).
2. Conexiunile identificate în etapa întâi se înlocuiesc cu blocuri echivalente având FDT calculate la punctul 1 şi rezultă o altă schemă bloc (a doua).
3. În schema bloc echivalentă găsită în etapa a doua se identifică din nou conexiunile serie, paralel şi cu reacție şi se determină FDT ale acestor noi conexiuni rezultând o a treia schemă bloc şi mai simplă.
4. Se repetă procedeul de identificare a conexiunilor tipice şi de înlocuire a lor cu elemente de transfer având FDT a conexiunilor echivalente până se ajunge în final la o schemă simplă la care se poate aplica una din relațiile (5), (7), (8)

C. Determinarea răspunsului sistemului folosind funcțiile de transfer ale sistemului şi semnalului de testare:

1. Se determină transformata Laplace a mărimii de intrare u(t) care poate fi un semnal standard: impuls Dirac $\delta(t)$, treaptă unitară σ(t), funcții armonice sin ωt, cos ωt, etc. Pentru calculul lui U(s) se poate utiliza tabelul 1.

2. Se calculează

Y(s)=G(s)*U(s) care este o fracție rațională $$Y(s)=\frac{M(s)}{N(s)} \tag{9}$$

3. Se descompune Y(s) în fracții simple după rădăcinile lui N(s) astfel:

a) pentru o rădăcină p simplă, fracția corespunzătoare este :

$$\frac{A}{s+p} \qquad \text{unde} \qquad A = \lim_{s \to p}\left[Y(s)\cdot(s-p)\right] \qquad (10)$$

b) pentru o rădăcină p cu ordin de multiplicitate q > 1 cu $q \in N$, fracțiile corespunzătoare sunt:

$$\frac{A_1}{(s+p)^1} \quad \frac{A_2}{(s+p)^2} \quad \ldots \frac{A_q}{(s+p)^q} \qquad \text{unde}$$

$$A_i = \frac{1}{(q-1)}\cdot\frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}}\cdot\left[Y(s)\cdot(s+p)^q\right] \qquad i = 1,2,\ldots,q \qquad (11)$$

c) pentru rădăcini complexe conjugate fracția simplă corespunzătoare este:

$\dfrac{B\cdot s + C}{s^2 + a\cdot s + b}$ coeficienții B şi C se obțin prin metoda identificării coeficienților.

4. Descompunerea numărătorului se face astfel încât să se obțină una din variantele FDT F(s) din Anexa 2 . Se calculează y(t) ca fiind inversa transformatei Laplace Y(s) utilizând pentru fiecare fracție Anexa 2.

5. Efectuarea lucrării

A. Cu ajutorul metodei prezentate la punctul A în mersul lucrării să se obțină funcția de transfer a unui sistem la care se cunoaşte ecuația diferențială.

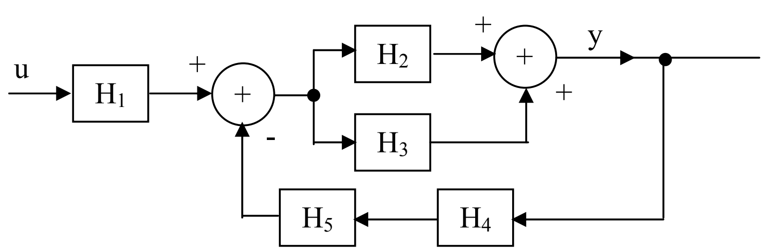
Exemplu: Să se scrie expresia FDT corespunzătoare ecuației diferențiale:

$$y^{(2)} + 2y^{(1)} + 3y = 4u^{(1)} + 5u$$

Rezolvare: $H(s) = \dfrac{4s+5}{s^2+2s+3}$

B. Cu ajutorul metodei prezentate la punctul B în mersul lucrării să se obțină funcția de transfer a unui sistem reprezentat printr-o schemă bloc.

Exemplu:



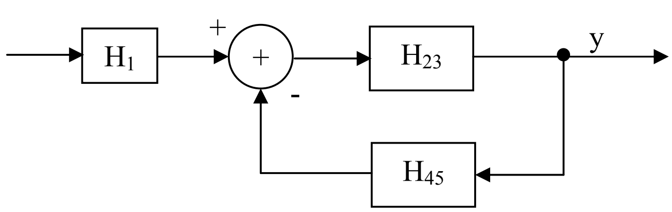
Rezolvare:

În schema bloc se poate observa o conexiune în paralel a blocurilor H_2 şi H_3 şi o conexiune serie a blocurilor H_4 şi H_5.

$$H_{23} = H_2 + H_3$$

$$H_{45} = H_4 \cdot H_5$$

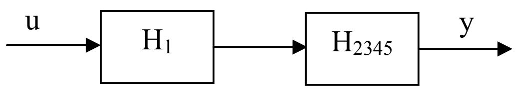
Înlocuind conexiunile găsite cu elemente echivalente rezultă o nouă schemă bloc:



Schema găsită o putem identifica cu o conexiune cu reacție între elementele H_{23} şi H_{45}.

$$H_{2345} = \frac{H_{23}}{1 + H_{23} \cdot H_{45}}$$

Înlocuind conexiunea cu reacție cu un bloc echivalent cu funcția de transfer H_{2345} va rezulta o altă schemă bloc alcătuită din două elemente de sistem legate în serie:



$$\Rightarrow \quad H = H_1 \cdot H_{2345}$$

Deci sistemul va avea în final funcția de transfer de forma:

$$H = H_1 \cdot \frac{H_2 + H_3}{1 + (H_2 + H_3) \cdot H_4 \cdot H_5}$$

C. Se determină răspunsul unui sistem folosind funcția de transfer conform algoritmului de la punctul C.

Exemplu: Să se determine răspunsul indicial la semnalul treaptă $\sigma(t)$ al unui sistem caracterizat prin funcția de transfer:

$$G(s) := \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad U(s) := \frac{1}{s}$$

$$H(s) := G(s) \cdot U(s)$$

$$H(s) := \frac{1}{s \cdot (s+1) \cdot (s+2)}$$

$$H(s) := \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} \qquad A := \frac{1}{2} \quad B := -1 \quad C := \frac{1}{2}$$

$$H(s) := \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{-1}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2}$$

Conform tabelului 1

$$h(t) := \frac{1}{2} \cdot \sigma(t) - e^{-t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-2t} \qquad \sigma(t) := 1$$

Pentru determinarea valorilor A, B şi C s-a aplicat metoda identificării coeficienților:

- aducerea la numitor comun a expresiei H(s)
- egalarea rezultatului obținut cu numărătorul
- rezolvarea sistemului de n ecuații cu n necunoscute.

$$A(s+1)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s+1) = 1$$

$$(A + B + C)s^2 + (3 \cdot A + 2 \cdot B + C) \cdot s + 2 \cdot A = 1$$

$$A + B + C = 0$$

$$3 \cdot A + 2 \cdot B + C = 0 \qquad A = \frac{1}{2}, \quad B = -1, \quad C = \frac{1}{2}$$

$$2 \cdot A = 1$$

Semnale de testare **Anaxa** 1

1. **Semnalul impuls unitar**, denumit impuls Dirac.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & ,t \neq 0 \\ +\infty & ,t = 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot dt = 1 \tag{1}$$

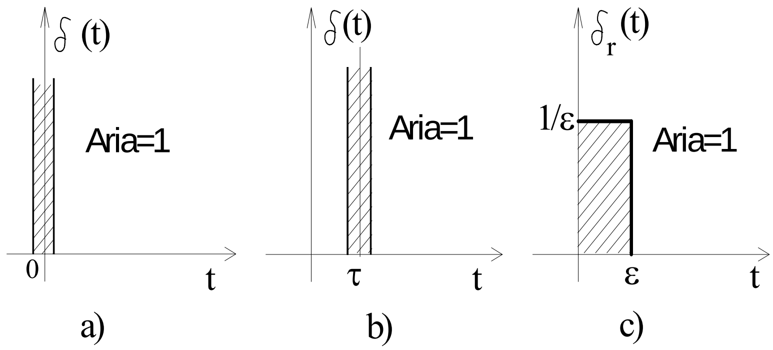


Fig.1.

Impulsul Dirac exprimat prin relația (1) are Aria = 1 şi este reprezentat în figura 1 a). Semnalul impuls Dirac decalat cu timpul τ este reprezentat în fig.1 b) şi are expresia dată de relația:

$$\delta(t-\tau)\begin{cases} 0 & ,t \neq \tau \\ +\infty & ,t = \tau \end{cases} \tag{2}$$

În realitate se utilizează un impuls de referință (reprezentat în figura 1c)) având baza egală cu ε, înălțimea egală cu 1/ε şi deci Aria = 1, cu condiția ca ε să fie cât mai mic şi să tindă la zero.

Importanța impulsului unitar Dirac este aceea că răspunsurile sistemelor cu condiții inițiale nule, la un semnal de intrare de forma δ(t) (sau o combinație liniară a impulsului δ(t) şi a derivatelor sale $\delta^{(i)}$(t)) dau funcția de tip **h(t)** numită **funcție pondere structurală**.

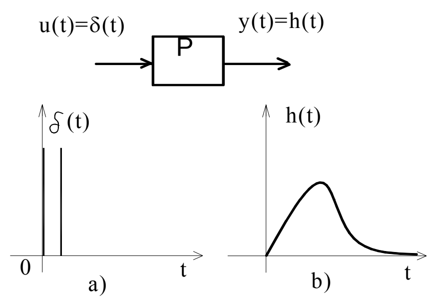


Fig.2.

2. **Semnalul treaptă unitară**

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \qquad \sigma(t-\tau)\begin{cases} 0 & t < \tau \\ 1 & t \geq \tau \end{cases} \tag{3}$$

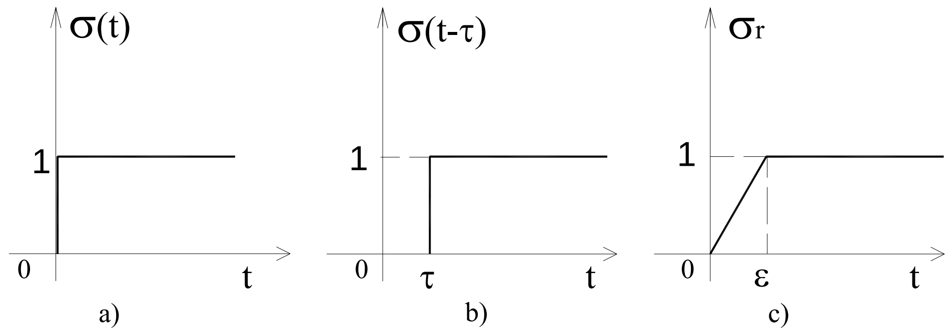


Fig. 3.

Semnalul treaptă unitară ideal este exprimat prin relațiile (3). Aplicat la momentul t = 0 este reprezentat în figura 3 a) şi aplicat la momentul t = τ este reprezentat în figura 3 b). Semnalul treaptă unitară este fizic realizabil σ_r în forma din diagrama 3 c), urmărindu-se ca ε să fie cât mai mic posibil. Răspunsul sistemelor la semnalul treaptă unitară se numeşte **răspuns indicial i(t).**

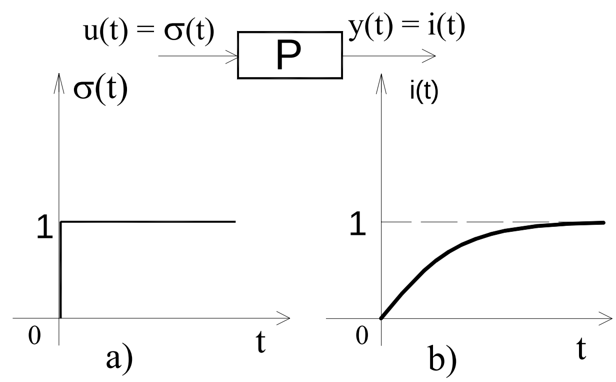


Fig 4

În figura 4 b) este reprezentat răspunsul indicial al unui element de sistem proporțional P la un semnal treaptă reprezentat în figura 4 a).În practică, semnalul de testare treaptă unitară se realizează foarte simplu printr-un întrerupător, buton sau ventil pneumatic, pentru care u(t) = 0 dacă acestea sunt închise, iar la t = 0 sau $t \leq \tau$ se deschid şi rămân astfel un timp nedeterminat. Între funcția Dirac şi funcția treaptă unitară există relațiile:

$$\sigma(t) = \int_0^t \delta(\xi) d\xi \qquad \text{şi} \qquad \delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} \tag{4}$$

3. <u>Semnalul rampă unitară</u>

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases} \qquad r(t-\tau) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ t-\tau & t \geq \tau \end{cases} \tag{5}$$

Se poate aplica un semnal de intrare la care tg α = K adică, panta este diferită de 1 şi se exprimă prin relația :

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ K \cdot t & t \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

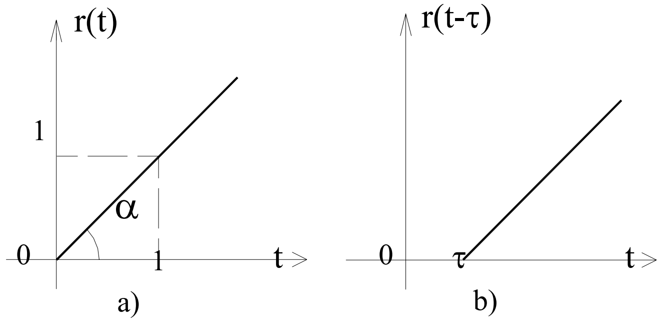


Fig. 5

Semnalul rampă se aplică la intrarea sistemelor ce conțin elemente derivative, deoarece impulsul Dirac δ(t) derivat se anulează şi nu se poate utiliza la testare.

4. **Semnalul parabolă unitară**

$$p(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{2}t^2 & t\geq 0\end{cases} \qquad (7)$$

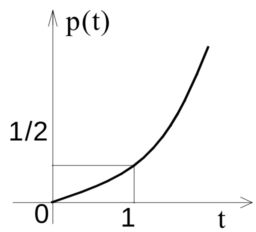


Fig. 6

Acest semnal este exprimat prin relația (7) şi reprezentat în figura 6, se utilizează tot în cazul sistemelor cu elemente derivative.

5. **Semnalul armonic** este definit ca o funcție sinusoidală sau cosinusoidală.

$$u_1(t)=u_m\sin\omega t \qquad u_1=u_m\sin\beta \qquad (8)$$

sau

$$u_2(t)=u_m\cos\omega t \qquad u_2=u_m\cos\beta \qquad (9)$$

unde $\omega t=\beta$ se numeşte **fază unghiulară**, exprimată în radiani, iar ω se numeşte **pulsație** exprimată în radiani / secundă având graficele reprezentate în figura 7.

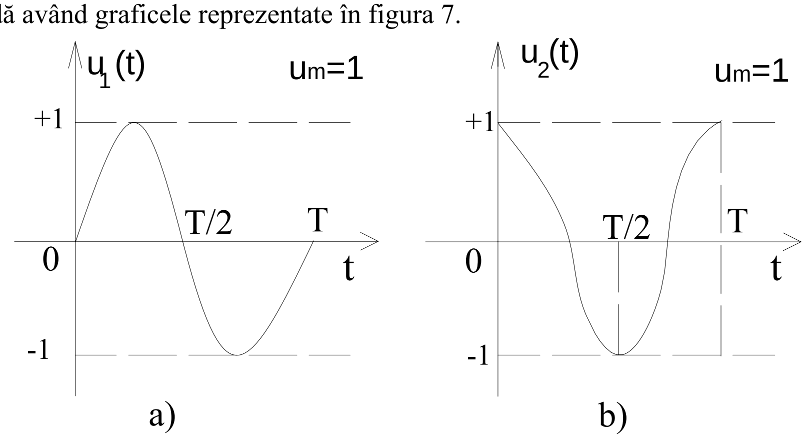


Fig. 7

$$\omega T=2\pi \qquad f=\frac{1}{T} \qquad \Rightarrow \qquad \omega=2\pi f \qquad (10)$$

Semnalul armonic este utilizat pentru determinarea răspunsului în frecvență a sistemului. Se menține constantă amplitudinea U_m şi se modifică treptat frecvența semnalului de intrare, deci faza unghiulară β. Pentru fiecare variație β la intrare se măsoară amplitudinea $Y_m(\omega)$ şi faza $\varphi(\omega)$ semnalului de ieşire:

$$y(t)=Y_m(\omega)\sin(\omega t+\varphi(\omega)) \qquad (11)$$

Transformatele Laplace ale funcțiilor elementare

Anexa 2

Denumirea funcției	f(t)	F(s)
Impuls unitar	$\delta(t)$	**1**
Treaptă unitară	$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$
Semnal polinomial	$\frac{t^n}{n!}, n \in \boldsymbol{N}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
Exponențială	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
Exponențială	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Semnale armonice	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
Semnal armonic modulat în amplitudine	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
Semnal polinomial modulat cu exponențială	$\frac{t^n}{n!} e^{-at}, n \in N$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
Combinație de semnale	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
Combinație de semnale	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
Combinație de semnale	$(1-e^{-at})\sigma(t)$	$\frac{a}{s(s+a)}$
Combinație de semnale	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
Combinație de semnale	$e^{-at}(1-at)\sigma(t)$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
Combinație de semnale	$(e^{-at}-e^{-bt})\sigma(t)$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
Combinație de semnale	$(be^{-bt}-ae^{-at})\sigma(t)$	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$
Combinație de semnale	$e^{-at} sh\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2-\omega^2}$
Combinație de semnale	$e^{-at} ch\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2-\omega^2}$