

SISTEM. MODEL.

CONSTRUCTIA MODELULUI MATEMATIC

1. Scopul lucrării

Lucrarea are drept scop însușirea noțiunilor de system, model și analiza posibilităților de construire a modelului mathematic pentru un system fizic.

2. Considerații teoretice

2.1 Sistem, stare,

O definiție cu aplicabilitate extinsă a sistemului este cea de *sistem termodinamic*: porțiune din univers pentru care se poate delimita un “interior” și un “exterior”, interiorul conținând un număr oarecare de corpuri macroscopice, considerate ca având o structură fizică continuă. Caracterizarea acestor sisteme se realizează prin stările lor termodinamice, reprezentate ca o mulțime de parametri, care descriu aspecte interne ale sistemului și relațiile cu mediul înconjurător (exteriorul sistemului).

Tranziția de stare a unui sistem termodinamic este denumită proces fizic. Noțiunea “*stare*” reprezintă o noțiune care s-a dovedit în decursul timpului extrem de recomandată pentru înțelegerea naturii sistemelor dinamice.

Exemplu

Pentru un sistem termic trecerea dintr-o stare de echilibru în altă stare de echilibru poartă denumirea de proces. Exemplu de variabile de stare: masa, temperatura, volumul, presiunea, densitatea, entropia etc.

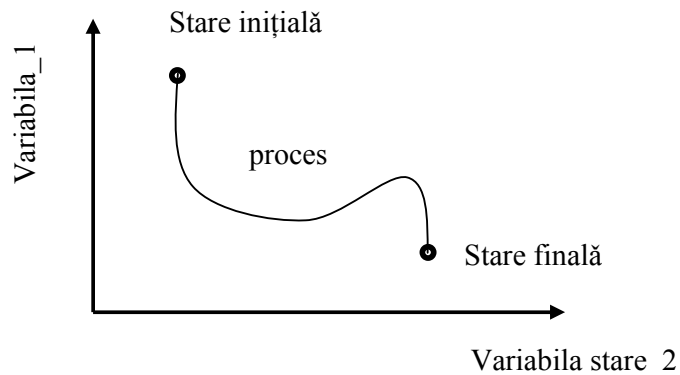


Fig.1 Proces, stare și variabilă de stare

O conexiune esențială între inginerul proiectant / analist și sistemul real constă în abilitatea primului de a găsi metodele și “uneltele” de a descrie sistemul în mod eficient scopului urmărit. Un *model* simplu pentru un sistem este prezentat în figura 2. O astfel de reprezentare este convenabilă pentru un sistem static a cărui ieșire depinde doar de intrarea sa curentă.



Fig.2 Sistem static

În orice descriere modelul este elementul cheie. În același timp trebuie

subliniat faptul că această descriere nu este unică. Un rol aparte din punctul de vedere al mecatronicii îl joacă descrierea dinamicii sistemului.

Ce se înțelege însă prin sistem dinamic, în general, și în ce mod poate fi descrisă comportarea dinamică a acestuia cu ajutorul variabilelor de stare ?

Un sistem dinamic poate fi caracterizat prin:

- una sau mai multe mărimi de intrare variabile în timp $u_i(t)$ care formează intrarea sistemului;
- una sau mai multe mărimi de ieșire variabile în timp, $y_j(t)$ care formează ieșirea sistemului;
- ecuație diferențială care leagă variabilele de stare $x_n(t)$ de derivatele acestora, de mărimile de intrare $u_i(t)$ și perturbația $v(t)$;
- o ecuație de ieșire, care leagă mărimile de ieșire $y_j(t)$ de variabilele de stare $x_n(t)$ și de mărimile de intrare $u_i(t)$.

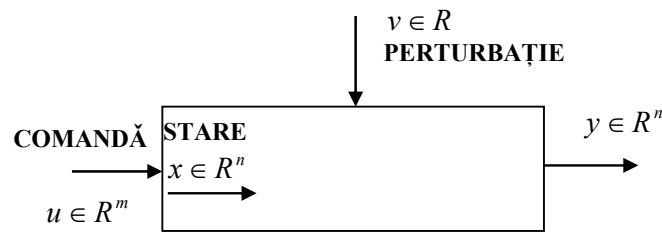


Fig.3 Sistem dinamic

2.2 Dezvoltarea modelului matematic

În etapa de analiză a sistemului, construcția modelului se încadrează într-o succesiune de etape rezultând în final modelul matematic asociat sistemului fizic.

- *Definirea “granițelor” sistemului.* Toate sistemele fizice lucrează în interacțiune cu alte sisteme. Din acest motiv este necesar să se definească aceste granițe.
- *Definirea ipotezelor simplificatoare / aproximațiilor admise.* Modelul trebuie să includă ce este esențial din sistemul fizic. Dacă sistemul este prea complicat utilitatea sa devine discutabilă.
- *Stabilirea ecuațiilor de echilibru / bilanț pentru sistemul fizic (sau pentru subsistemele componente) și definirea condițiilor suplimentare.*

Echilibrul energetic – *energy balance* – poate avea o interpretare fizică și una filozofică. Interpretarea fizică a echilibrului are semnificații specifice domeniului de aplicație: *fizică, biologie, inginerie, economie*, etc.

Energia unui sistem fizic este o mărime fizică de stare, caracterizând sistemul într-o stare staționară. Din energia totală a unui sistem se pot separa anumite forme de energie, care depind de o anumită clasă de mărimi de stare – mărimi mecanice, electrice, magnetice etc. Modificarea stării unui sistem fizic este denumită transformare. Fiecare transformare conduce la modificarea valorii diferitelor forme de energie care caracterizează sistemul fizic. În conformitate cu cele specificate în *fizică* bilanțul energetic este o prezentare sistemică a fluxului energetic și a transformărilor din sistem. Baza teoretică este prima lege a termodinamicii: “ Variația energiei interne ΔW_i a unui sistem fizic, la trecerea dintr-o stare în alta $W_2 - W_1$ este egală cu suma dintre variația lucrului mecanic ΔL și variația cantității de căldură ΔQ schimbată de sistem cu exteriorul”.

Într-o formă generalizată, bilanțul “material” se poate exprima sub prin: “ *rata de schimb a materiei în sistem este egală cu fluxul net a materialului*” (fig.4).

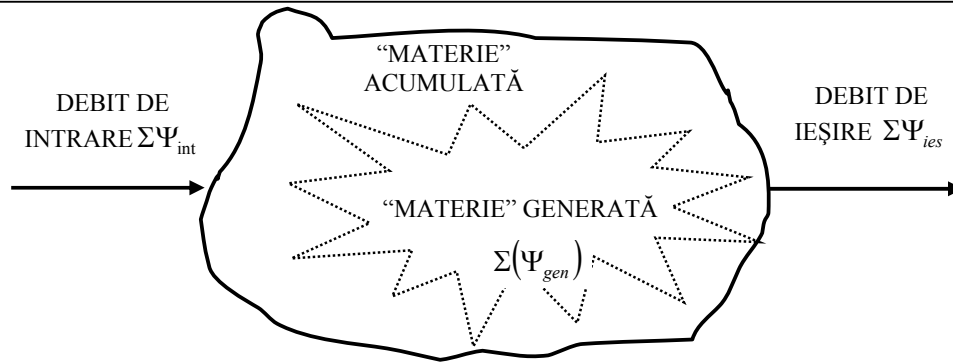


Fig.4 Bilanțul “material”

Termenul de “materie” are o semnificație generalizată definind energie, masă, impuls. Fluxul net este suma algebrică între fluxul de intrare și cel de ieșire la care se adaugă “materia” generată în sistem (de ex.: generare de energie prin reacții chimice etc.).

$$\frac{d(\text{“material”})}{dt} = \Sigma(\Psi_{int}) - \Sigma(\Psi_{ies}) + \Sigma(\Psi_{gen})$$

În domeniul mecanic multe probleme de analiză se rezolvă folosind teoremele bilanțului / echilibrului energetic / căldură, echilibrul de masă, echilibrul impulsului, echilibrul entropiei.

Construirea modelului poate porni cu aplicarea legilor fizice de bază (legile lui Newton, legile lui Maxwell, legile lui Kirckhoff etc.) la procesul care se studiază, adică un proces mecanic, electric, sau termodinamic. De la aceste legi, rezultă un număr de ecuații între variabilele sistemului și o variabilă independentă (în general t) care se identifică cu modelul matematic al sistemului analizat.

2.3 Exemplu. Bilanțul masic al lichidului dintr-un rezervor

- *Delimitarea sistemului* este sugerată prin schema bloc din figura unde debitul de intrare Q_1 și debitul de ieșire Q_2 sunt variabilele de intrare în sistem iar înălțimea h a lichidului este variabila de ieșire. Reprezentarea sistemică este dată în figura 5.



Fig.5 Reprezentarea sistemică a rezervorului de lichid

- Ipoteze simplificatoare:
 - Densitatea ρ a fluidului este constantă;
 - Lichidul este incompresibil
 - Rezervorul este poziționat vertical;
 - Secțiunea transversală a rezervorului este circulară, constantă;
- Parametrii din sistem:
 - Debitul volumic de intrare Q_1 [m^3/s] și debitul volumic de ieșire Q_2 [m^3/s];
 - h [m] – nivelul lichidului în rezervor ;
 - m [kg] – masa de lichid ;
 - A [m^2] – aria transversală ;
 - V [m^3] – volumul de lichid.

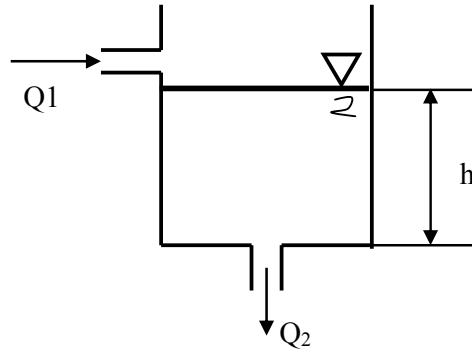


Fig.6 Delimitarea sistemului

- Ecuația de bilanț aplicată pentru masa unui sistem poartă de numirea de echilibrul masic și are forma :

$$\frac{dm(t)}{dt} = \sum_i Q_{mi}$$

unde m [kg] este masa, Q_{mi} [kg/s] este debitul masic iar t [s] este parametrul timp.

Particularizată pentru echilibrul masic de lichid din rezervor ecuația anterioară are forma :

$$\frac{dm(t)}{dt} = \rho Q_1(t) - \rho Q_2(t)$$

Ecuația diferențială în m este modelul matematic al sistemului iar ρ este parametrul modelului. Există o condiție suplimentară pentru ecuația anterioară $m \geq 0$. Prin rezolvarea analitică sau numerică a ecuației se obține modul de variație a masei de lichid în timp.

Între parametrii geometrici ai rezervorului și masa de lichid din rezervor există relația simplă:

$$m(t) = \rho V(t) = \rho A h(t)$$

Ecuația diferențială în “ m ” se poate transforma, pe baza relației anterioare, luând forma:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A} \cdot [Q_1(t) - Q_2(t)]$$

cu condiția suplimentară $h \geq 0$. Această ecuația diferențială este o altă formă de exprimare a modelului matematic pentru sistemul analizat.

Admițând că variabila Q_2 depinde de nivelul lichidului din rezervor – nu mai este o variabilă independentă, se poate scrie:

$$Q_2(t) = K \cdot \sqrt{\rho g h(t)}$$

astfel că bilanțul masic poate fi exprimat și prin ecuația diferențială:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \rho Q_1(t) - \rho K \sqrt{\rho g h(t)}$$

Ecuația diferențială se constituie într-un nou model matematic al rezervorului de lichid.

3. Mersul lucrării

3.1 Analiza noțiunii de sistem

- Se vor vizualiza structuri mecanice, electrice prezente în sala de laborator și li se asociază noțiunea de sistem explicitându-se relațiile dintre obiectele din sistem, intrările, ieșirile și efectele perturbatoare

-
- b) Se vor exemplifica aspectele teoretice anterioare printr-un exemplu ales de fiecare student în parte;
 - c) Se vor consemna concluziile în referatul laboratorului.

3.2 Construirea modelului matematic pentru un system

- a) Se discută etapele de construcție a unui model matematic;
- b) Se construiesc modelele matematice pentru sistemele fizice:
 - i. Circuitul electric de curent continuu format dintr-o sursă de tensiune și un resistor;
 - ii. O transmisie reductoare (prin roți dințate cilindrice);
- c) Se construiesc modelele matematice pentru sistemele fizice:
 - i. Un circuit electric de curent continuu format dintr-o sursă de tensiune, un resistor R și inductivitatea L ;
 - ii. O masă "M" suspendată printr-un element elastic de constantă "K";
- d) Se consemnează concluziile privind etapele de lucru, ipotezele simplificatorii, parametrii sistemului;
- e) Se consemnează concluziile referitoare la natura ecuațiilor care definesc modelul matematic pentru cazul c) și respectiv d)