

9. STABILITATEA SISTEMELOR

9.1. Introducere

Stabilitatea unui sistem este una dintre proprietățile importante ale acestuia. Noțiunea de stabilitate este întâlnită și analizată la toate categoriile de sisteme: mecanice, electrice, termice etc. Pentru înțelegerea acestei noțiuni se pot prezenta diverse exemple edificatoare.

Stabilitatea unui sistem automat nu este doar o problemă de tipul Da/ Nu (Stabil/ Instabil). Dacă un sistem automat este slab stabil, o mică creștere a unui parametru al sistemului l-ar putea împinge peste „graniță”, în zona de instabilitate. Or, intenția este de a proiecta sisteme cu o anumită rezervă („margine”) de stabilitate. De aceea, este necesară și o definiție a „măsurii a stabilității”.

9.2. Noțiunea de stabilitate. Exemple

Este îndeajuns de cunoscută problema stabilității echilibrului în mecanica corpurilor rigide. Dacă un corp se poate rezema în diferite poziții pe o suprafață, echilibrul este stabil atunci când în urma unei deplasări arbitrare de mici el revine la poziția inițială. De exemplu, bila din figura 9.1 este în echilibru instabil în poziția 1 și în echilibru stabil în poziția 2. Dacă asupra bilei, aflată în poziția 2, intervine un impuls extern aceasta execută o serie de mișcări oscilatorii în jurul poziției de echilibru. Aceste mișcări se vor amortiza datorită frecării și bila va reveni în poziția de echilibru stabil.

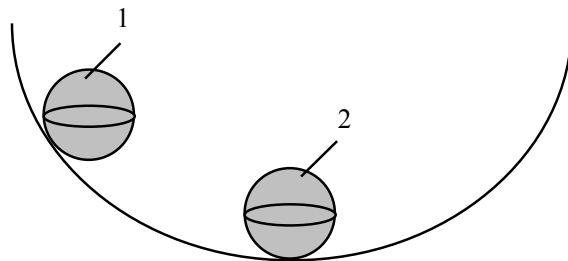


Fig. 9.1 Stabilitatea unei sfere pe o suprafață cilindrică

Conul din figura 9.2a este într-o poziție instabilă. Conul își pierde această poziție la orice stimul extern și nu mai poate reveni în poziția inițială după încetarea acestuia. Poziția din figura 9.2b (conul se sprijină pe generatoarea sa) este o poziție de stabilitate neutră (la limită). Un stimul extern provoacă conului o ușoară rulare fără ca acesta să-și părăsească contactul realizat cu solul prin generatoare. Poziția din figura 9.2c este poziția stabilă. Orice stimul extern ușor scoate conul din poziția inițială dar acesta revine la aceasta după încetarea stimulului.

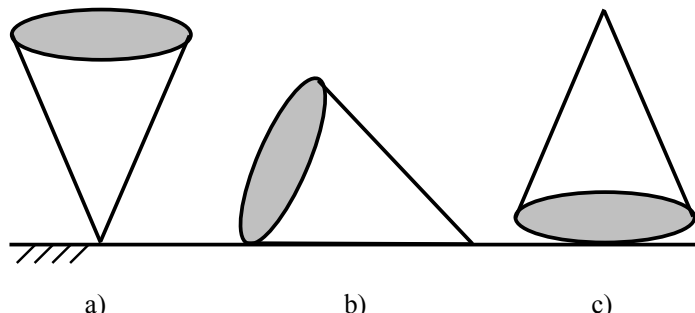


Fig. 9.2 Stabilitatea unui con

Teorema *Lagrange-Dirichlet* descrie matematic problema echilibrului stabil pentru un sistem de puncte materiale.

În planul (ω, M) se pot defini limitele admise pentru cuplu și viteză în cadrul unui sistem de acționare (SA). Această zonă va defini *domeniul admisibil* de funcționare (fig.9.3).

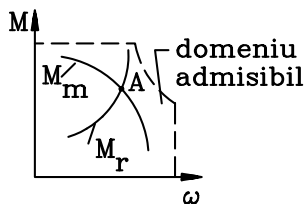


Fig. 9.3 Domeniul de funcționare

În acest sistem (ω, M) în care s-au trasat caracteristicile mecanice motoare și rezistente, regimul de funcționare staționar pentru SA corespunde punctului A de intersecție al celor două caracteristici (fig.9.3). Punctul A trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

a) - să fie un punct real de funcționare, adică să corespundă unui set de valori (ω, M) care să asigure o funcționare sigură și corectă tehnologic, mecanic, electric, etc. și să aparțină domeniului admisibil;

b) - să fie un punct de funcționare stabil.

Pentru *analiza stabilității* se prezintă calitativ în figura 9.4 cele două caracteristici mecanice (rezistentă și motoare) și punctul de funcționare A. Interesează dacă echilibrul obținut este stabil sau instabil. Se spune că funcționarea este stabilă dacă după dispariția oricărei perturbații, care cauzează variația vitezei unghiulare ω_0 ,

un agregat tinde să rămână la mișcarea inițială. În caz contrar, când după o perturbație oricât de mică, viteza unghiulară se îndepărtează de valoarea sa de regim permanent se spune că funcționarea este instabilă.

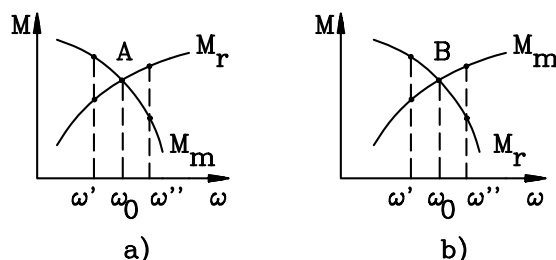


Fig. 9.4 Punct stabil și instabil de funcționare

Creșterea, datorită unei perturbații, a vitezei unghiulare la valoarea ω'' implică o relație de legătură între momente de forma $M_m < M_r$, și deci o tendință de scădere a vitezei înspre valoarea ω_0 (fig.9.4a). La o scădere a vitezei unghiulare sub cea de regim permanent $\omega' < \omega_0$ există relația $M_m > M_r$, și deci apare tendința de creștere a vitezei unghiulare spre valoarea de regim. Punctul de funcționare "A" este astfel un punct de funcționare stabil. În același mod se poate concluziona că punctul "B" este un punct de funcționare instabil (fig.9.4b).

Din punct de vedere matematic, condiția de stabilitate a unui punct de funcționare se exprimă prin relația:

$$\left(\frac{dM_r}{d\omega} \right)_A > \left(\frac{dM_m}{d\omega} \right)_A \quad (9.1)$$

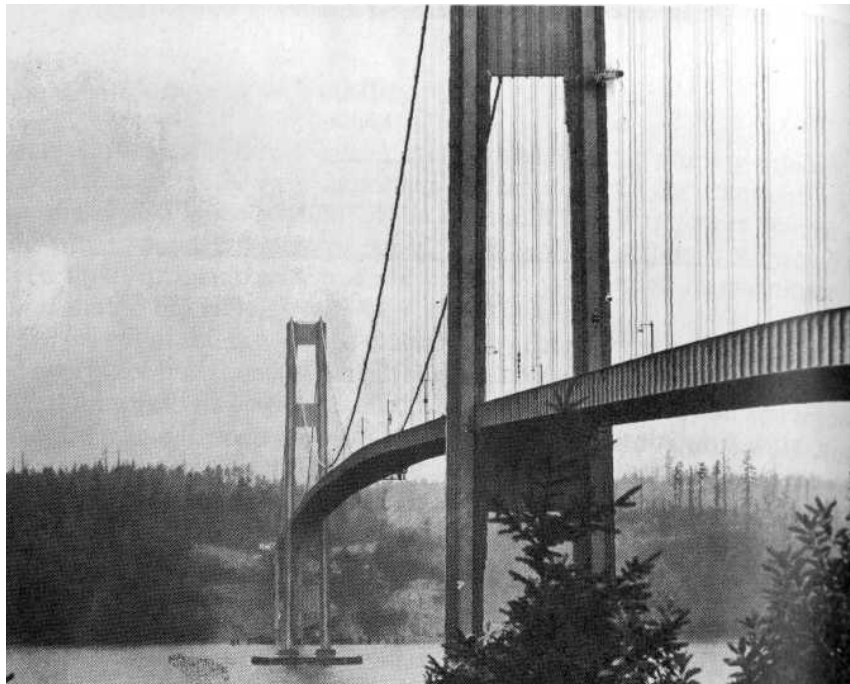
Aceasta înseamnă că pentru a avea un punct de funcționare stabil este necesar ca panta caracteristicii mecanice motoare să fie mai mică decât panta caracteristicii mecanice rezistente în acel punct.

În analiza unor sisteme mecanice mobile se pune adeseori problema deformațiilor elastice și a echilibrului. O serie de lucrări analizează problema stabilității elastice [9.4]. Un exemplu în acest sens este prezentat în figura 9.5a. În anul 1940 a fost construit un pod peste râul Tacoma (statul Whashington). S-a constatat de fiecare dată că podul are oscilații sub acțiunea unor vânturi mai puternice. După 4 luni un vânt puternic a produs o oscilație cu amplitudine ridicată cauzând o catastrofă (fig.9.5b).

Analiza stabilității din sistemele hidraulice, sistemele electrice etc. face obiectul unui studiu atent și necesar pentru o proiectare optimală.

Scopul oricărui sistem automat este de a realiza o relație de dependență între două variabile (funcție de timp) între care există relații de interdependență, rezultate din legi fizice absolute. Altfel spus, o mărime de ieșire $y(t)$ trebuie să urmărească, cât mai fidel posibil, variațiile mărimii de intrare $u(t)$ oricare ar fi variațiile mărimilor perturbatoare.

Funcționarea unui sistem sub acțiunea mărimilor din exterior este caracterizată prin două regimuri: regimul staționar și regimul tranzitoriu.



a)



b)

Fig. 9.5 Catastrofa de la podul Tacoma

Sistemele în care se poate realiza un regim staționar se numesc sisteme stabile.

În cercetarea stabilității unui sistem interesează stabilitatea *absolută*, care arată dacă sistemul este sau nu stabil și stabilitatea *relativă*, care arată gradul de stabilitate, respectiv modul în care sistemul tinde spre regimul staționar.

9.3. Stabilitatea sistemelor și poziția polilor

9.3.1. Stabilitatea și ecuația caracteristică

Un sistem este definit ca fiind stabil dacă:

- după aplicarea unui impuls la intrarea sistemului, mărimea de ieșire revine la valoarea originală;
- orice mărime de intrare finită generează / cauzează o mărime de ieșire finită.

Datorită modului diferit în care răspunde un sistem la semnale de intrare diferite, un mod general de a caracteriza stabilitatea sau instabilitatea sistemului este analiza răspunsului la semnal treaptă unitară („răspunsul indicial”). *Sistemul automat căruia i se aplică la intrare un semnal treaptă unitară este stabil, dacă componenta tranzitorie a răspunsului se anulează.*

Fiind dată funcția de transfer a unui sistem, $G(s)$, în cazul cel mai general, răspunsul indicial al sistemului în domeniul s este dat de relația:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{C_0}{s} + \sum_{k=1}^{n-i} \frac{C_k}{s - s_k} + \sum_{q=1}^i \frac{C_q}{(s - s_i)^q} \quad (9.2)$$

unde numitorul are n rădăcini (reale și imaginare), dintre care i sunt multiple.

Aplicând transformata Laplace inversă semnalului de ieșire $Y(s)$, se obține răspunsul sistemului analizat la semnal treaptă unitară în domeniul timp:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = C_0 + \sum_{k=1}^{n-i} C_k \cdot e^{s_k t} + (A_1 + A_2 t + \Lambda + A_i t^{i-1}) e^{s_i t} \quad (9.3)$$

Răspunsul include două componente:

- Componenta $h_{(t \rightarrow \infty)}$ de regim forțat în cadrul căruia variația mărimii de ieșire este determinată numai de mărimea de intrare;
- Componenta $h_i(t)$ de regim liber în care variația mărimii de ieșire depinde doar proprietățile fizice ale sistemului;

$$h(t) = h_{(t \rightarrow \infty)} + h_i(t) \quad (9.4)$$

Regimul staționar (regimul permanent când mărimea de intrare și de ieșire rămân invariabile în timp) este caracterizat prin lipsa componentei libere $h_i(t) = 0$.

Astfel,

$$h_{(t \rightarrow \infty)} = C_0 = S \cdot 1(t) \quad (9.5)$$

este valoarea de regim staționar a răspunsului, iar

$$h_t(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \sum_{k=1}^{n-i} C_k \cdot e^{s_k t} + (A_1 + A_2 t + \Lambda + A_i t^{i-1}) e^{s_i t} \quad (9.6)$$

este componenta tranzitorie, de care depinde comportarea sistemului în regim dinamic.

Să analizăm regimul liber pe baza considerațiilor referitoare la rădăcinile ecuației caracteristice.

- *Toate rădăcinile s_i sunt reale și distincte*
Dacă aceste rădăcini sunt negative atunci

$$e^{s_1 t} = e^{s_2 t} = \Lambda = 0 \quad (9.7)$$

(fiecare termen tinde aperiodic cu timpul la zero) și componenta tranzitorie se anulează pentru că fiecare din componentele sale se anulează. În acest caz sistemul este stabil.

Dacă printre rădăcini există o singură rădăcină pozitivă, de exemplu $s_k > 0$, atunci $e^{s_k t}$ va tinde cu timpul la infinit și implicit componenta liberă a răspunsului va tinde aperiodic la infinit când $t \rightarrow \infty$. În acest caz sistemul este instabil.

- *Ecuația are o pereche de rădăcini complex conjugate*

$$s_k = \sigma_k + j\omega_k; s_{k+1} = \sigma_k - j\omega_k; \quad (9.8)$$

toate celelalte rădăcini sunt reale, distincte și negative.

În acest caz suma termenilor respectivi ai componentei libere a răspunsului devine:

$$C_k \cdot e^{(\sigma_k + j\omega_k)t} + C_{k+1} \cdot e^{(\sigma_k - j\omega_k)t} = e^{\sigma_k t} \cdot (C_k \cdot e^{(j\omega_k)t} + C_{k+1} \cdot e^{(-j\omega_k)t}) \quad (9.9)$$

Utilizând relațiile lui Euler, egalitatea anterioară se poate transforma sub forma:

$$h_{lk,k+1} = C_{k,k+1} \cdot e^{\sigma_k t} \sin(\omega_k t + \varphi_k) \quad (9.10)$$

unde:

$$C_{k,k+1} = \sqrt{(C_k + C_{k+1})^2 - (C_k - C_{k+1})^2} = 2\sqrt{C_k C_{k+1}} \quad (9.11)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{C_k + C_{k+1}}{C_k - C_{k+1}} \quad (9.12)$$

Dacă partea reală σ_k a rădăcinilor complexe este negativă, atunci relația (9.10) reprezintă oscilații amortizate (de pulsație constantă și amplitudine descrescătoare în timp). Dacă însă, partea reală este pozitivă relația este caracteristică oscilațiilor amplificate.

Rezultă astfel că dacă ecuația caracteristică admite rădăcinile s_1, s_2, \dots reale și complex conjugate, atunci răspunsul este periodic amortizat și deci sistemul este stabil numai în cazul când rădăcinile reale au semnul negativ, iar partea reală a rădăcinilor complex conjugate este negativă. Se observă că analiza stabilității sistemului a condus la o analiză a semnelor rădăcinilor ecuației caracteristice, adică a semnelor valorilor care anulează numitorul funcției de transfer, polii funcției de transfer.

• *Ecuatia caracteristică admite rădăcini multiple*

Admitem că ecuația caracteristică are o rădăcină s_k multiplă de ordinul i iar restul rădăcinilor sunt reale, distincte și negative. În acest caz componenta răspunsului liber corespunzătoare celor i rădăcini are expresia (din 9.6):

$$h_{t,i}(t) = (A_1 + A_2 t + \dots + A_i t^{i-1}) e^{s_k t} \quad (9.13)$$

În relația anterioară termenul $e^{s_k t}$ este cel care definește comportamentul în timp a expresiei și implicit al sistemului. Dacă rădăcina multiplă este reală și negativă atunci $e^{s_k t} \rightarrow 0$ când $t \rightarrow \infty$. Astfel, expresia anterioară va tinde la zero și deci sistemul este stabil asimptotic. O analiză asemănătoare se poate realiza și pentru cazul unei perechi de rădăcini multiple complexe conjugate iar concluzia este asemănătoare: sistemul este stabil asimptotic dacă rădăcina are partea reală negativă.

În fig.9.6 - 9.7 sunt reprezentate variațiile componenteii tranzitorii, în funcție de semnul și valoarea rădăcinilor s_k și s_{k+1} .

Dacă toți polii funcției de transfer sunt complex conjugăți și au partea reală negativă, (adică $\sigma_k < 0$), deci sunt localizați în semiplanul stâng al planului s , sistemul este stabil (*cazul a*); la acțiunea unei perturbații, efectuează oscilații care se amortizează în timp.

Dacă toți polii funcției de transfer sunt reali (adică $\omega_k = 0$) și sunt negativi (adică $\sigma_k < 0$), sistemul este de asemenea stabil; amortizarea componenteii tranzitorii se realizează fără oscilații (*cazul b*).

Atât în *cazul a*, cât și în *cazul b*, durata regimului tranzitoriu este determinată de existența componenteii x_{ctk} cu $|\sigma_k|$ cel mai mic, adică polii cei mai apropiați de axa $j\omega$, numiți *poli dominanți*.

Dacă din cei n poli, cel puțin o pereche are $\sigma_k < 0$, sistemul este instabil; el efectuează oscilații cu amplitudine crescătoare, teoretic, până la infinit (*cazul c*). Dacă din cei n poli, cel puțin unul este real și pozitiv, ($\sigma_k > 0$, $\omega_k = 0$), atunci sistemul este de asemenea instabil, dar amplitudinea componenteii tranzitorii tinde la infinit fără oscilații (*cazul d*).

Pot să apară și două situații particulare: când din totalul rădăcinilor, cel puțin una este nulă, $s_k = 0$, (poli în origine), sau cel puțin o pereche de poli complex conjugăți au $\sigma_k = 0$ (poli pe axa imaginară) și restul de poli au $\sigma_k < 0$ (fig. 9.7). În primul caz ($s_k = 0$), după amortizarea celor $n-1$ componente, componenta tranzitorie rezultantă este:

$$h_t(t) = h_{tk} = C_k \quad (9.14)$$

și avem de a face cu o stabilitate neasimptotică. În funcție de condițiile inițiale, componenta poate lua orice valoare și un astfel de sistem automat este inutil. Sistemul este la limita aperiodică de stabilitate, adică este stabil neutru.

În al doilea caz, când polii sunt pe axa imaginară, ($s_k = \pm j\omega_k$), componenta tranzitorie este:

$$h_t(t) = C_k \sin(\omega_k t + \psi_k) \quad (9.15)$$

Sistemul efectuează oscilații neamortizate de amplitudine constantă, sistemul aflându-se la limita oscilantă de stabilitate; el este de asemenea stabil neutru.

Sistemele automate cu poli în origine sau pe axa imaginară se numesc „sisteme pseudo-stabile”.

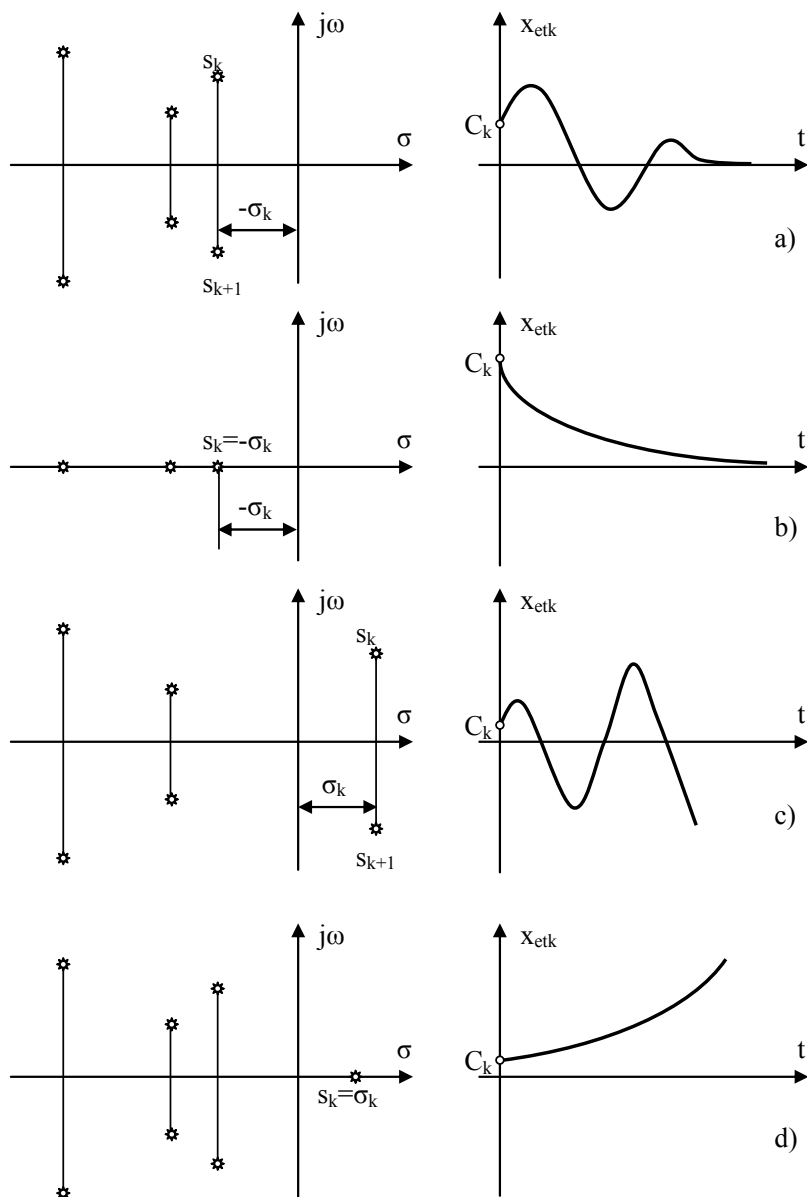


Fig. 9.6 Poziția polilor și stabilitatea sistemului (cazul I)

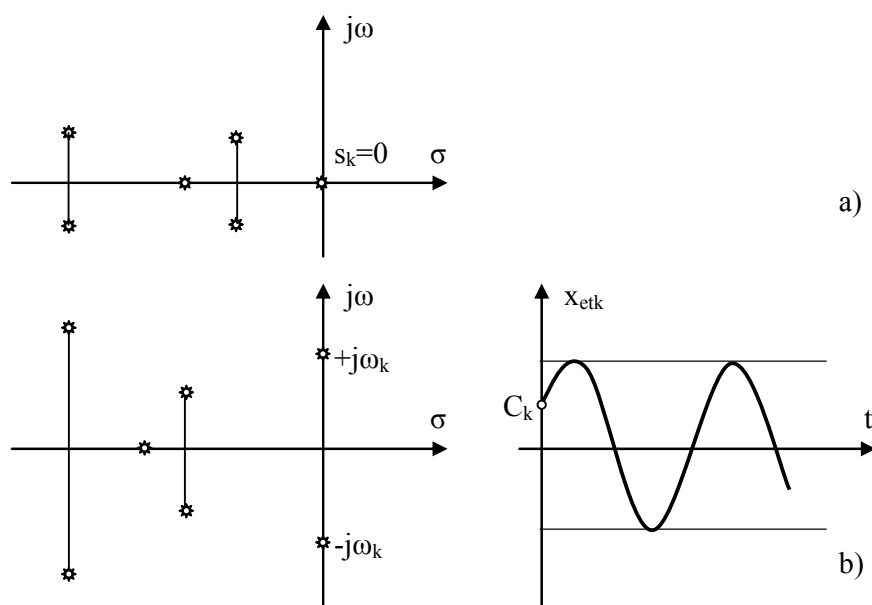


Fig. 9.7 Poziția polilor și stabilitatea sistemului (cazul II)

9.3.2. Criteriul general de stabilitate

Având în vedere cele expuse anterior, se poate enunța un criteriu general referitor la stabilitatea sistemelor liniare:

Pentru ca sistemul automat să fie stabil, este necesar și suficient ca toți polii funcției de transfer să fie localizați în semiplanul stâng al planului complex s .

În practică, determinarea polilor funcției de transfer a sistemului automat nu este totdeauna o operație simplă. De aceea, a fost necesară formularea unor criterii de stabilitate practice, care să permită analiza stabilității sistemului fără a fi necesară cunoașterea polilor funcției de transfer.

În plus, în problemele de sinteză a sistemelor trebuie determinată influența asupra stabilității a diferitelor constante fizice ce caracterizează sistemul. Se cere de asemenea determinarea modului în care pot fi modificate diferite constante fizice ale sistemului, astfel încât, stabil fiind, sistemul să funcționeze cu anumiți parametri de calitate în regim tranzitoriu și staționar.

9.3.3. Locul rădăcinilor (root locus)

Locul geometric al punctelor (în engleză *locus*) se definește ca mulțimea tuturor punctelor care satisfac un set de condiții. Termenul *root* se referă la toate rădăcinile ecuației caracteristice care sunt polii funcției de transfer a sistemului în circuit închis.

Polii funcției de transfer definesc parametrii de răspuns a sistemului și astfel performanța și stabilitatea sistemului. În aceste condiții, *root-locus* definește graficul polilor funcției de transfer a sistemului închis.

Pentru sistemul cu reacție din figura 9.8, funcția de transfer este:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)} \quad (9.16)$$

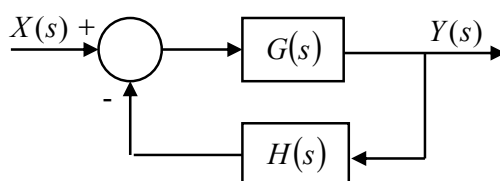


Fig. 9.8 Sistem cu reacție

Considerăm ecuația caracteristică scrisă sub forma:

$$1 + K \cdot \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_{n-1})(s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_{m-1})(s + p_m)} = 0 \quad (9.17)$$

sau

$$1 + K \cdot \frac{num}{den} = 0 \quad (9.18)$$

unde: *num* este numărătorul formei polinomiale; *den* este numitorul formei polinomiale iar *K* este amplificarea ($K > 0$). Vectorul *K* include toate valorile amplificărilor pentru fiecare buclă închisă.

Locul rădăcinilor este desenat prin utilizarea funcției din Matlab **rlocus(num,den)**. Un exemplu de fișier, *r_loc.m*, este prezentat în figura 9.9. Rezultatul obținut, *locul rădăcinilor*, prin rularea programului este prezentat în figura 9.10. Selectarea manuală a unui punct de pe grafic conduce la deschiderea unei casete care prezintă parametrii sistemului pentru punctul respectiv de funcționare.

```

1 - num=[0 1 1];
2 - den=[1 1 1];
3 - rlocus(num,den)

```

Fig. 9.9 Fișier de lucru pentru generarea locului rădăcinilor

Pentru reprezentarea rădăcinilor se poate utiliza și funcția:

r = rlocus(num,den)
plot(r, 'o')

unde în sintaxa funcției (în '?') se va introduce semnul dorit pentru reprezentarea grafică ('x' sau 'o' sau '*', etc.).

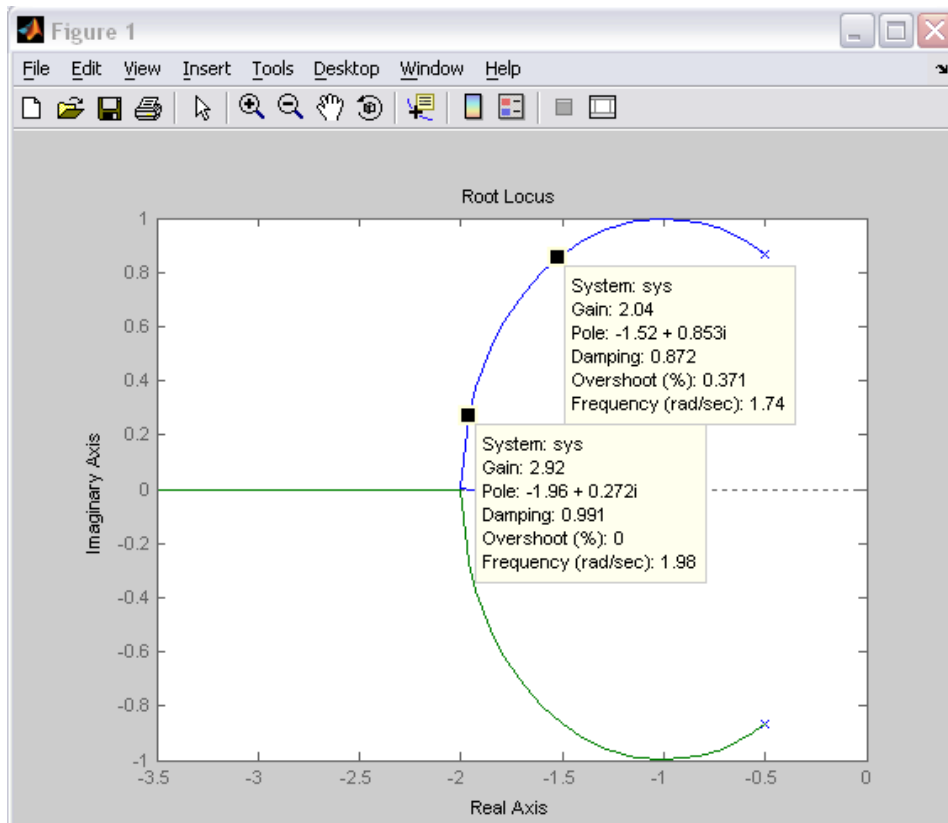


Fig. 9.10 Locul rădăcinilor

Vectorul de amplificare este introdus de utilizator. În acest mod se mai pot utiliza și funcțiile:

$$\begin{aligned}
 [r,k] &= \text{rlocus}(\text{num},\text{den}) \\
 [r,k] &= \text{rlocus}(\text{num},\text{den},k) \\
 [r,k] &= \text{rlocus}(A,B,C,D) \\
 [r,k] &= \text{rlocus}(A,B,C,D,K) \\
 [r,k] &= \text{rlocus}(\text{sys})
 \end{aligned}
 \tag{9.19}$$

9.3.4. Poli și performanțe

Comportarea sistemului de reglare automată în timpul procesului tranzitoriu, ce are loc după apariția cauzei care-l provoacă, se numește calitate dinamică a sistemului. Principalii indici care caracterizează calitatea dinamică sunt: *suprareglarea*, *durata regimului tranzitoriu*, *durata adimensională a regimului tranzitoriu* [9.5]. Indicii de calitate ai sistemului depind de poziția polilor și zerourilor. Constantele fizice ale sistemului determină acest comportament. În același timp, o analiză a modului de dependență a acestor indici de constantele fizice permite definirea unui domeniu în care trebuie să se găsească polii astfel încât indicii de calitate să fie realizați.

Exemplificăm problema abordată pentru indicele de calitate al sistemului definit prin suprareglarea admisibilă $\sigma \leq \sigma_a$.

Pentru un sistem de ordinul doi suprareglarea se poate defini prin relația:

$$\sigma = e^{-\frac{\pi \cdot \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (9.20)$$

Introducând și condiția $0 < \xi < 1$ se poate determina valoarea admisibilă a coeficientului de amortizare:

$$\xi_a = \frac{|\ln \sigma_a|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \sigma_a}} = \cos \varphi_a \quad (9.21)$$

Rezultă în acest mod că polii trebuie să fie localizați în domeniul nehașurat (fig.9.6) în stânga traseului A-O-B.

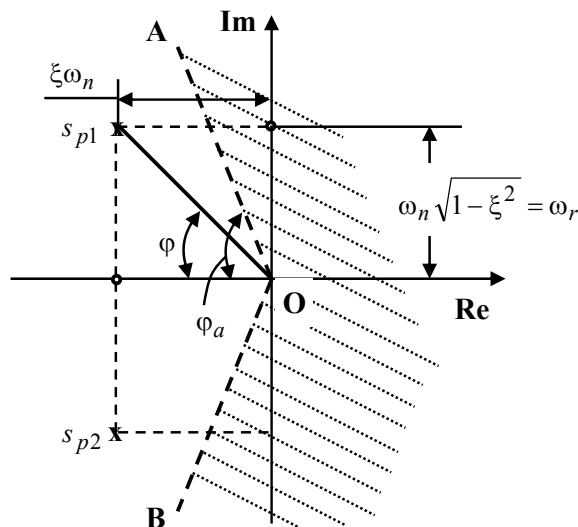


Fig. 9.11 Limitarea zonei permise pentru poziția polilor

În același context este necesar să mai introducem o noțiune des utilizată în domeniul sistemelor automate. Considerăm în acest sens sistemul cu funcția de transfer:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{400}{(s+10) \cdot (s+40)} \quad (9.22)$$

Răspunsul sistemului la un semnal de tip treaptă unitară este descris de funcția:

$$y(t) = 1 - \frac{40}{3} \cdot e^{-10 \cdot t} + \frac{1}{3} \cdot e^{-40 \cdot t} \quad (9.23)$$

Se observă că funcția de transfer are 2 poli în punctele $p_1 = -40$ și $p_2 = -10$. În cadrul răspunsului sistemului, funcția exponențială $e^{-10 \cdot t}$ este asociată lui $p_2 = -10$ și $e^{-40 \cdot t}$ lui $p_1 = -40$.

În plus, din reprezentarea grafică este evident că pentru $t \rightarrow \infty$, $e^{-10 \cdot t} \rightarrow 0$ tinde mai lent în raport cu $e^{-40 \cdot t}$. Se spune că polul $p_1 = -40$ este mai rapid ca polul $p_2 = -10$. Cu cât polul este mai aproape / mai departe față de axa imaginară, se spune că este mai *lent* / *rapid*. Polul *lent* este **dominant** față de polul *rapid*.

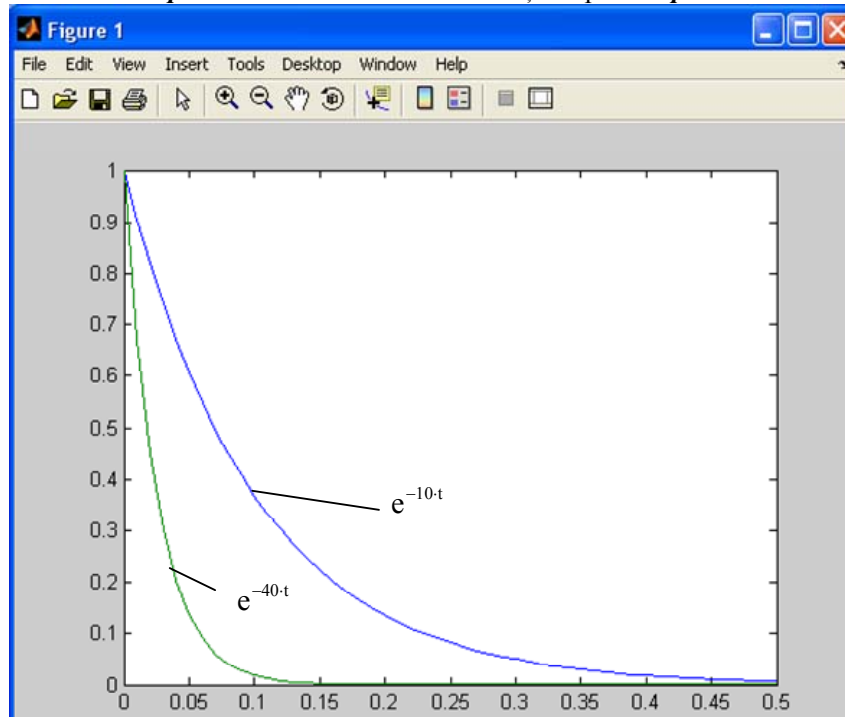


Fig. 9.12 Variația funcțiilor exponențiale cu exponenți diferiți

9.4. Criterii algebrice de stabilitate

9.4.1. Criteriul de stabilitate Hurwitz

Criteriul de stabilitate Hurwitz se bazează pe relația care trebuie să existe între coeficienții unei ecuații diferențiale, pentru ca rădăcinile acestora să fie localizate în semiplanul complex stâng. De aceea, criteriul Hurwitz este criteriu algebric și se mai numește „criteriul coeficienților”.

Fie numitorul funcției de transfer, $Q(s)$ și rădăcinile acestuia, s_1, s_2, \dots, s_n .

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = a_n (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = 0 \quad (9.24)$$

Dacă toate rădăcinile s_k sunt localizate în semiplanul s stâng, forma lor generală este:

$$\begin{aligned} s_k &= -\sigma_k + j\omega_k \\ s_{k+1} &= -\sigma_k - j\omega_k \end{aligned} \quad (9.25)$$

cu $\sigma_k > 0$.

Produsul rădăcinilor este:

$$\begin{aligned} (s - s_k) \cdot (s - s_{k+1}) &= [s - (-\sigma_k + j\omega_k)][s - (-\sigma_k - j\omega_k)] = \\ &= (s + \sigma_k)^2 + \omega_k^2 \end{aligned} \quad (9.26)$$

și este pozitiv, ca sumă de două pătrate. Rezultă că pentru $a_n > 0$ și coeficienții polinomului $Q(s)$, $a_k > 0$, sunt pozitivi. Rezultatul este reformulat prin criteriul *Stodola* [9.3]: pentru ca un polinom să aibă toate rădăcinile cu partea reală negativă este necesar ca:

$$\operatorname{sgn} a_n = \operatorname{sgn} a_{n-1} = \dots = \operatorname{sgn} a_0 \quad (9.27)$$

Reciproca nu este adevărată decât pentru sisteme de ordinul unu ($n=1$) și doi ($n=2$). Pentru sisteme cu $n \geq 3$ sunt necesare condiții suplimentare.

Exemplu

Fie ecuația polinomială cu coeficienți pozitivi:

$$Q(s) = s^3 + s^2 + 4s + 30 = 0$$

Ecuația se poate rescrie, funcție de rădăcinile sale, sub forma:

$$Q(s) = (s + 3)(s^2 - 2s + 10) = (s + 3)(s - 1 - 3j)(s - 1 + 3j)$$

Se observă că rădăcinile $s_{2,3} = 1 \pm 3j$ au partea reală pozitivă.

Polinoamele care au toate rădăcinile s_i ($i = 1, 2, \dots, n$) cu partea reală negativă se numesc polinoame Hurwitz.

În acord cu cele specificate, un sistem liniar este stabil asimptotic dacă polinomul caracteristic este de tip Hurwitz.

Pentru sisteme de ordin superior, pe lângă cerința ca toți coeficienții polinomului caracteristic să fie pozitivi, se adaugă și alte cerințe, formulate prin criteriul Hurwitz.

Pentru acest lucru, reconsiderăm polinomul caracteristic:

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (9.28)$$

Pe baza acestuia se poate construi determinantul lui Hurwitz, cu n linii și n coloane, cu ajutorul coeficienților a_k , astfel:

- se formează diagonala principală din coeficienții de la $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$:

$$H = \begin{vmatrix} a_{n-1} & ? & ? & ? & ? \\ ? & a_{n-2} & ? & ? & ? \\ ? & ? & a_{n-3} & ? & ? \\ ? & ? & ? & a_{n-4} & ? \\ ? & ? & ? & ? & \dots \end{vmatrix} \quad (9.29)$$

- se completează coloanele în celulele superioare diagonalei cu coeficienți în ordine descrescătoare, iar în celulele inferioare diagonalei principale, cu coeficienți în ordine crescătoare;
- în locul coeficienților ai căror indici sunt mai mici ca zero, sau mai mari ca n , se scrie valoarea zero:

$$H = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (9.30)$$

- se construiesc toți determinanții minori de nord-vest, adică acei minori care au linia superioară și coloana din stânga în coincidență cu cele ale determinantului Hurwitz:

$$\begin{aligned} H_1 &= a_{n-1} \\ H_2 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} \\ H_3 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \\ &\dots \end{aligned} \quad (9.31)$$

Dacă toți determinanții minori H_1, \dots, H_n sunt pozitivi, polinomul caracteristic este de tip Hurwitz și atunci toate rădăcinile ecuației polinomiale $Q(s) = 0$ sunt localizate în semiplanul stâng al planului complex s (Re, Im). Sistemul având funcția de transfer

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \text{ este stabil.}$$

Exemplificăm criteriul pentru un sistem cu polinomul caracteristic $Q(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$. Condițiile Hurwitz pentru stabilitatea sistemului sunt:

$$H_1 = a_2 > 0 \quad (9.32)$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \quad (9.33)$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \cdot (a_1 a_2 - a_0 a_3) > 0 \quad (9.34)$$

Criteriul Hurwitz permite analiza sistemului și în condițiile unor coeficienți liberi pentru ecuația caracteristică. În acest mod se poate realiza și sinteza subsistemelor componente astfel ca sistemul să fie stabil.

Exemplu

Se consideră un sistem pentru care se prezintă schema bloc (fig.9.8). Se cere să se determine condițiile pe care trebuie să le îndeplinească coeficienții utilizați astfel ca sistemul să fie stabil.

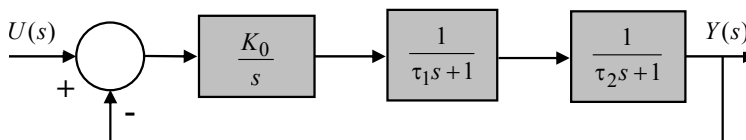


Fig. 9.13 Analiza stabilității unui sistem cu reacție unitară

$$G_0(s) = \frac{K_0}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} = \frac{K_0}{s + (\tau_1 + \tau_2)s^2 + \tau_1 \tau_2 s^3} \quad (9.35)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_0}{1 + G_0} \quad (9.36)$$

$$G(s) = \frac{K_0}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} = \frac{K_0}{K_0 + s + (\tau_1 + \tau_2)s^2 + \tau_1 \tau_2 s^3} \quad (9.37)$$

$$Q(s) = K_0 + s + (\tau_1 + \tau_2)s^2 + \tau_1 \tau_2 s^3 \quad (9.38)$$

În acord cu criteriul *Stodola și Hurwitz* este necesar să fie îndeplinite următoarele condiții pentru existența unei stabilități asmpotice:

- Coeficienții ecuației caracteristice:

$$a_3 = \tau_1 \tau_2 \quad (9.39)$$

$$a_2 = \tau_1 + \tau_2 \quad (9.40)$$

$$a_1 = 1 \quad (9.41)$$

$$a_0 = K_0 \quad (9.42)$$

trebuie să pozitivi. Rezultă astfel că este necesar ca:

$$a_0 = K_0 > 0 \quad (9.43)$$

- Este necesar ca minorii caracteristici să fie pozitivi:

$$(a_1 a_2 - a_3 a_0) > 0 \quad (9.44)$$

Înlocuind valorile coeficienților liberi, se obține:

$$\tau_1 + \tau_2 - \tau_1 \tau_2 K_0 > 0 \quad (9.45)$$

$$K_0 < \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} \quad (9.46)$$

- Din condițiile anterioare se poate concluziona pentru constanta K_0 :

$$0 < K_0 < \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} \quad (9.47)$$

Exemplu de calcul

Se consideră sistemul deschis având funcția de transfer:

$$G(s) = \frac{S}{s^3 + 3s^2 + 102s + 100} \quad (9.48)$$

Ce valoare trebuie să aibă sensibilitatea mecanică S a sistemului deschis, pentru ca sistemul cu feed-back unitar să fie stabil?

Se observă că sistemul deschis este stabil, indiferent de valoarea sensibilității mecanice S . Polii funcției de transfer pentru sistemul deschis sunt:

$$s_1 = -2 + j10, s_2 = -2 - j10, s_3 = -1 \quad (9.49)$$

Funcția de transfer a sistemului cu feedback unitar este:

$$G_f(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{S}{s^3 + 3s^2 + 102s + 100 + S} \quad (9.50)$$

Sistemul închis fiind de ordinul trei, o condiție necesară pentru a fi stabil este aceea ca toți coeficienții a_k să fie pozitivi. Singurul coeficient care depinde de S este a_0 :

$$a_0 = 100 + S \quad (9.51)$$

Conform criteriului Hurwitz, este necesar în primul rând ca acest coeficient să fie pozitiv, deci:

$$S > -100 \quad (9.52)$$

Se construiește determinantul Hurwitz și minorii săi de nord-vest:

$$H = \begin{vmatrix} 3 & 100 + S & 0 \\ 1 & 102 & 0 \\ 0 & 3 & 100 + S \end{vmatrix} \quad (9.53)$$

$$H_1 = 3$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 3 & 100 + S \\ 1 & 102 \end{vmatrix} = 306 - 100 - S = 206 - S$$

Pentru ca minorii să fie pozitivi (vezi criteriul Hurwitz), din relația (9.53) rezultă că este necesar să existe:

$$S < 206 \quad (9.54)$$

Combinând determinările (9.52) și (9.54), rezultă că, pentru ca sistemul cu

feedback unitar corespunzător sistemului deschis caracterizat prin funcția de transfer (9.48) să fie stabil, este necesar ca sensibilitatea mecanică a acestuia să satisfacă relația:

$$-100 < S < 206 \quad (9.55)$$

9.4.2. Criteriul de stabilitate Routh. Aplicabilitate și exemple.

9.4.2.1. Introducere în criteriul Routh

Acest criteriu oferă o metodă simplă și directă pentru stabilirea numărului de rădăcini cu partea reală pozitivă adică, rădăcinile localizate în semiplanul drept. Într-o formă generală, transformata Laplace a unui sistem, se poate reprezenta prin raportul a două polinoame în s :

$$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (9.56)$$

în care toți coeficienții a_i sunt prezenți în ecuație, sunt reali și pozitivi. Dacă un coeficient este nul atunci polinomul $Q(s)$ are rădăcini în semiplanul drept sau pe axa imaginară și sistemul este fie instabil fie stabil la limită.

Pe baza coeficienților ecuației anterioare se poate construi *tabela lui Routh* cu $n + 1$ linii și $n + 1$ coloane, cu ajutorul coeficienților a_k , astfel:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	\dots
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	\dots
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	\dots
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
s^1	i_1	\dots	\dots	\dots	\dots
s^0	j_1	\dots	\dots	\dots	\dots

Fig. 9.14 Tabela lui Routh

în care constantele începând cu linia 3, coeficienții se determină prin relații de forma:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{n-2} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right) \cdot a_{n-3} \\ b_2 &= a_{n-4} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right) \cdot a_{n-5} \\ b_3 &= a_{n-6} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right) \cdot a_{n-7} \\ &\dots \end{aligned} \quad (9.57)$$

Se continuă șirul de calcul până când ultimul b este nul.

Constantele c se determină într-un mod asemănător, pe baza constantelor din rândurile anterioare:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= a_{n-3} - \left(\frac{a_n}{b_1}\right) \cdot b_2 \\
 c_2 &= a_{n-5} - \left(\frac{a_n}{b_1}\right) \cdot b_3 \\
 c_3 &= a_{n-7} - \left(\frac{a_n}{b_1}\right) \cdot b_4 \\
 &\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{9.58}$$

Celelalte linii de constante din tabela lui Routh (fig.9.14) se determină în mod analog până la rândul s^0 . Fiecare din ultimele două linii conține un termen diferit de zero. După completarea tabelului se determină numărul rădăcinilor din semiplanul drept pe baza criteriului Routh-Hurwitz: *numărul rădăcinilor cu partea reală pozitivă ale ecuației caracteristice este egal cu numărul de schimbări de semn în prima coloană a coeficienților.*

Exemplu

Se consideră ecuația caracteristică pentru un sistem:

$$Q(s) = s^6 + s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 7s^2 + 4s + 4 \tag{9.59}$$

Se cere să se analizeze stabilitatea sistemului prin aplicarea criteriului Routh.

Se poate construi tabela coeficienților:

s^6	1	2	7	4
s^5	1	3	4	0
s^4	$2 - 1/1 \cdot 3 = -1$	$7 - 1/1 \cdot 4 = 3$	$4 - 1/1 \cdot 0 = 4$	0
s^3	$3 - 1/(-1) \cdot 3 = 6$	$4 - 1/(-1) \cdot 4 = 8$	0	0
s^2	$3 - (-1)/6 \cdot 0 = 3$	$4 - (-1)/6 \cdot 0 = 4$	0	0
s^2	$8 - 6/3 \cdot 8 = -8$	$0 - 6/3 \cdot 0 = 0$	0	0
s	$4 - 3/(-8) \cdot 0 = 4$	$0 - 3/(-8) \cdot 0 = 0$	0	0
s^0	$0 - (-8)/4 \cdot 0 = 0$	0	0	0

Fig. 9.15 Tabela lui Routh calculată

Din analiza rezultatelor din tabela anterioară rezultă că în prima coloană a coeficienților există 4 schimbări de semn. Aceasta înseamnă, în conformitate cu criteriul anunțat, că sistemul este instabil.

Utilizând mediul Matlab se pot determina rădăcinilor ecuației caracteristice astfel că valorile acestora confirmă faptul că sistemul nu este stabil.

$$\begin{aligned}
 ans = & \\
 & 0.8244 + 1.3621i \\
 & 0.8244 - 1.3621i \\
 & -1.0989 + 0.9362i \\
 & -1.0989 - 0.9362i \\
 & -0.2255 + 0.8404i \\
 & -0.2255 - 0.8404i
 \end{aligned}
 \tag{9.60}$$

Exemplu

Pentru un sistem dat ecuația caracteristică este:

$$Q(s) = s^5 + 2s^4 + 30s^3 + 50s^2 + 110s + 240 \quad (9.61)$$

Conform cu metodologia prezentată anterior, se poate construi tabela coeficienților:

s^5	1	30	110
s^4	2	50	240
s^3	5	-10	0
s^2	54	240	0
s^1	-32.22	0	0
s^0	240	0	0

Fig. 9.16 Tabela lui Routh calculată

Existența schimbărilor de semn (două schimbări) în prima coloană confirmă instabilitatea sistemului

Pentru confirmarea instabilității sistemului, prezentăm rădăcinilor ecuației caracteristice:

$$\begin{aligned} \text{ans} = \\ & -0.2330 + 5.0022i \\ & -0.2330 - 5.0022i \\ & 0.1966 + 2.2198i \\ & 0.1966 - 2.2198i \\ & -1.9271 \end{aligned} \quad (9.62)$$

Tabela Routh permite analiza sistemului și în condițiile unor coeficienți liberi pentru ecuația caracteristică. În acest mod se poate realiza și sinteza subsistemelor componente astfel ca sistemul să fie stabil.

Exemplu

Se consideră schema bloc a unui sistem și se cere să se determine amplificarea K ($K > 0$) astfel încât sistemul să fie stabil.

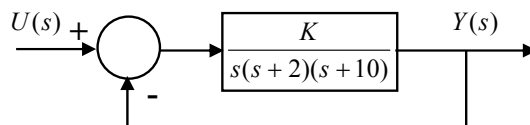


Fig. 9.17 Sistem propus pentru analiza stabilității

Funcția de transfer a sistemului echivalent (după aplicarea algebrei schemelor bloc) este:

$$G(s) = \frac{K}{s^3 + 15s^2 + 50s + K} \quad (9.63)$$

Tabela Routh construită pentru acest caz este prezentată în figura 9.18.

s^3	1	50	
s^2	15	K	
s^1	$\frac{15 - 50K}{15}$	$\frac{750 - K}{15}$	0
s^0	K		0

Fig. 9.18 Tabela Roth

Impunând condiția inexistenței schimbării de semn pe prima coloană, se determină ușor că sistemul este stabil pentru $K > 750$.

9.4.2.2. Cazuri particulare în aplicabilitatea criteriului Routh

Există cazuri când criteriul Routh nu poate fi aplicat în mod direct unei ecuații caracteristice. Se impune astfel utilizarea unei proceduri specifice particularității respective.

a) Existența unui zero în prima coloană a tabelului Routh

Prezența unui zero în prima coloană conduce, conform cu relațiile de calcul, la o valoare infinită în linia imediat următoare. Pentru a se putea aplica criteriul Routh, se multiplică polinomul caracteristic $Q(s)$ cu un factor $(s+a)$. Este necesar pentru factorul de multiplicare ca valoarea $a > 0$ și $-a$ să nu fie rădăcină a lui $Q(s)$. Se aplică criteriul Routh noului polinom rezultat $\overline{Q}(s) = Q(s) \cdot (s+a)$. Concluziile rezultate din noua aplicație sunt valabile și pentru polinomul original $Q(s)$.

Exemplu

Se consideră polinomul caracteristic

$$Q(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 \quad (9.64)$$

pentru care se cere aplicarea criteriului Routh.

Aplicarea criteriului conduce la obținerea tabelului Routh în care se constată existența unui zero și implicit a valorii infinite în prima coloană a tabelului.

s^4	1	2	3
s^3	1	2	0
s^2	0	3	0
s^1	∞		
s^0			

Fig. 9.19 Tabela lui Routh

Conform cu procedura analizată, se înmulțește polinomul caracteristic cu factorul $(s+1)$ rezultând noul polinom:

$$Q_1(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 5s + 3 \quad (9.65)$$

Aplicând criteriul Routh pe noul polinom, se obține noua tabelă:

s^5	1	3	5
s^4	2	4	3
s^3	1	3.5	0
s^2	-3	3	0
s^1	4.5	0	0
s^0	3	0	0

Fig. 9.20 Tabela calculată a lui Routh

Se constă pe prima coloană două schimbări de semn. Sistemul cu polinomul caracteristic dat este instabil.

b) Existența unei „linii zero” în tabela Routh

În acest caz tabela Routh nu poate fi completată datorită nedeterminărilor care se creează (existența unor termeni $\left(\frac{0}{0}\right)$). Este necesar să se aplice o procedură care să elimine nedeterminările specificate:

1. forma *polinomului caracteristic auxiliar* $q(s)$ se aplică liniei care precede „linia zero”;
2. se calculează forma derivativă de ordinul unu a polinomului $q(s)$ și se înlocuiește „linia zero” cu coeficienții polinomului $q'(s)$;
3. se aplică construcția tablei Routh în procedura clasică.

Exemplu

Analizăm stabilitatea unui sistem cu polinomul caracteristic:

$$Q_1(s) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 3s + 3 \quad (9.66)$$

Construcția inițială a tablei Routh conduce la situația enunțată:

s^5	1	2	3
s^4	1	2	3
s^3	0	0	0
s^2	?	?	?
s^1			
s^0			

Fig. 9.21 Tabela lui Routh calculată

Se constată că „linia de zero” coincide cu cea de a treia linie a tablei. Polinomul auxiliar în acest caz se identifică cu:

$$q(s) = s^4 + 2s^2 + 3 \quad (9.67)$$

corespunzător coeficienților din linia a doua.

Derivata întâi a „polinomului auxiliar” va fi în acest caz:

$$q^{(1)}(s) = 4s^3 + 4s \quad (9.68)$$

Coefficienții formei derivate $[4,4,0]$ înlocuiesc „linia zero” din tabela Routh inițială. Se completează în continuare noua tabelă:

s^5	1	2	3
s^4	1	2	3
s^3	4	4	0
s^2	1	3	0
s^1	-8	0	0
s^0	3	0	0

Fig. 9.22 Tabelă a lui Routh calculată

Sistemul caracterizat de polinomul caracteristic dat este instabil (două schimbări de semn în prima coloană a tabelului Routh).

9.4.3. Exemplu de analiza stabilității

Robotul industrial constituie un sistem mecatronic și ocupă un loc important în viața de zi cu zi. Proiectarea unui astfel de sistem se încadrează în aprecierile realizate anterior.

Se consideră schema bloc a sub-sistemului de poziționare a punctului caracteristic al unui robot de sudură (fig.9.13)[9.2].

Ecuția caracteristică a sistemului este:

$$1 + G(s) = 1 + \frac{K(s+a)}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = 0 \quad (9.69)$$

sau:

$$Q(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + (K+6)s + Ka = 0 \quad (9.70)$$

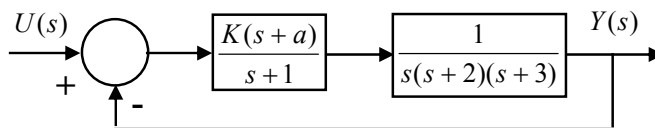


Fig. 9.23 Schema bloc a sistemului de poziționare

Pe baza relației (9.70) se poate construi tabela Routh din figura 9.24.

s^4	1	11	Ka
s^3	6	$K+6$	0
s^2	b_3	Ka	0
s^1	c_3		
s^0	Ka		

Fig. 9.24 Tabela Routh pentru relația (9.70)

unde coeficienții b_3 și c_3 au valorile:

$$b_3 = \frac{60 - K}{6} > 0 \quad (9.71)$$

$$c_3 = \frac{b_3(K + 6) - 6Ka}{b_3} > 0 \quad (9.72)$$

Din relația (9.71) rezultă că este necesar ca $K < 60$. Înlocuind relația (9.71) în (9.72) se poate deduce că este necesar să fie îndeplinită condiția:

$$a \leq \frac{(60 - K)(K + 6)}{36K} \quad (9.73)$$

9.5. Bibliografie

- [9.1]Borenstein, J., Korea, Y., Motion control analysis of a mobile robot, Trans. of ASME, J. of Dynamics, Measurement and Control, vol. 109, no.2, p.73-79
- [9.2]Dorf, R., Bishop, R., Moderne regelungssysteme, Pearson Studium, ISBN 3-8273-7162-7
- [9.3]Schmid,C., The Hurwitz criterion, <http://www.atp.ruhr-uni-bochum.de/rt1/syscontrol/node40.html>
- [9.4]Timoshenko, S.P., Gere, M., Theory of elastic stability, ISBN 0486472078
- [9.5]Voicu, M., Introducere în automatică, <http://mvoicu.intr-automatica.ac.tuiasi.ro>