8. MODELE DE STARE ALE SISTEMELOR

8.1. Introducere

O conexiune esențială între inginerul proiectant / analist şi sistemul real constă în abilitatea primului de a găsi metodele şi “uneltele” de a descrie sistemul în mod eficient scopului urmărit.

În orice descriere ***modelul*** este elementul cheie. În acelaşi timp trebuie subliniat faptul că această descriere nu este unică. Un rol aparte din punctul de vedere al mecatronicii îl joacă descrirea dinamicii sistemului. Modelele pentru sistemele dinamice pot fi construite în domeniul timp continuu, discret sau mixt.

O primă definiție a sistemelor este cea de sistem termodinamic: porțiune din univers pentru care se poate delimita un “interior” şi un “exterior”, interiorul conținând un număr oarecare de corpuri macroscopice, considerate ca având o structură fizică continuă [8.10]. Caracterizarea acestor sisteme se realizează prin *stările* lor termodinamice, reprezentate ca o mulțime de parametri, care descriu aspecte interne ale sistemului şi relațiile cu mediul înconjurător (exteriorul sistemului). Tranziția de stare a unui sistem termodinamic este denumită *proces fizic.*

Un sistem strict *cauzal* este caracterizat de transferul mărimii de intrare spre ieşirea sistemului conform schemei prezentate în figura 8.1.

$$\text{intrare } u(t) \rightarrow \text{stare } x(t) \rightarrow \text{ieşire } y(t)$$

Fig. 8.1 Transferul mărimii de ieşire

Noțiunea “stare” reprezintă o noțiune care s-a dovedit în decursul timpului extrem de recomandată pentru înțelegerea naturii sistemelor dinamice. Apărută pentru prima dată în lucrările matematiceanului H. Poincaré, noțiunea de “stare” a fost utilizată pentru studiul comportării dinamice a sistemelor oscilante mecanice, descrise ca şi modele matematice de ordinul doi. Ulterior, conceptul a fost generalizat – prin lucrările matematiceanului A. Leapunov – pentru modele de ordin superior.

Ce se înțelege însă prin sistem dinamic, în general, şi în ce mod poate fi descrisă comportarea dinamică a acestuia cu ajutorul variabilelor de stare ?

Un sistem dinamic poate fi caracterizat prin:

- una sau mai multe mărimi de intrare variabile în timp $u_i(t)$ care formează intrarea sistemului;

- una sau mai multe mărimi de ieşire variabile în timp, $y_j(t)$ care formează ieşirea sistemului;
- o ecuație diferențială care leagă variabilele de stare $x_n(t)$ de derivatele acestora, de mărimile de intrare $u_i(t)$ şi perturbația $v(t)$;
- o ecuație de ieşire, care leagă mărimile de ieşire $y_j(t)$ de variabilele de stare $x_n(t)$ şi de mărimile de intrare $u_i(t)$.

În figura 8.2 se prezintă schema bloc a unui sistem dinamic. Sistemul este strict cauzal deoarece variabila de intrare afectează mai întâi variabila de stare, prin *ecuația diferențială de stare* (aceasta defineşte dinamica sistemului), iar variabila de stare determină, printr-o ecuație algebrică (ecuația de ieşire), variabila de ieşire a sistemului.

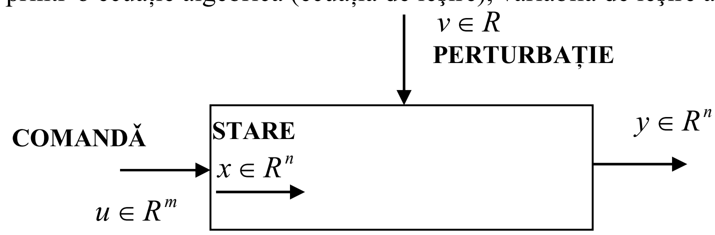


Fig. 8.2 Sistemul dinamic

Se defineşte sistemul simplu strict cauzal ca şi sistemul de tipul:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,v,t) \qquad y = g(x) \tag{8.1}$$

în care nu există nici o conexiune de tip reacție inversă.

La sistemele la limită cauzale, schema transferului intrare – ieşire este prezentată în figura 8.3.

intrare $u(t)$ $\rightarrow$ stare $x(t)$ $\rightarrow$ ieşire $y(t)$

Fig. 8.3 Transferul intrare - ieşire

Pe lângă transferul principal (cauzal) intrare – stare – ieşire, există şi un transfer direct intrare – ieşire, fără dinamică (la limita cauzal), generat de prezența variabilei *u* în ecuația de ieşire.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,v,t) \qquad y = g(x,u) \tag{8.2}$$

Ecuația diferențială de stare şi ecuația de ieşire formează împreună modelul matematic al sistemului dinamic. Un astfel de model este capabil să descrie orice sistem dinamic cu parametri constanţi cu condiţia ca ecuaţia diferenţială propriu zisă să descrie corect legile fizice care guvernează sistemul.

Exemplu

Pentru un sistem termic trecerea dintr-o stare de echilibru în altă stare de echilibru poartă denumirea de proces. Exemplu de variabile de stare: masa, temperatura, volumul, presiunea, densitatea, entropia etc. (fig.8.4).

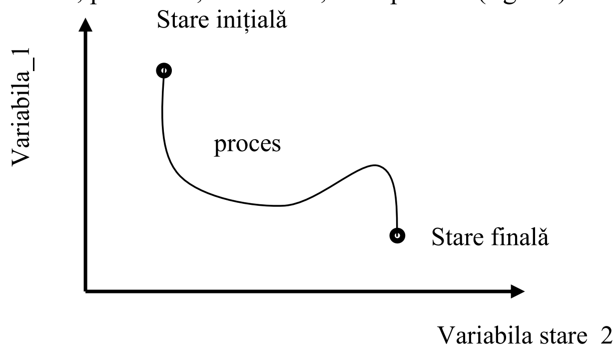


Fig. 8.4 Stări ale unui proces termodinamic

8.2. Variabilele de stare, conceptul de bază

8.2.1. Definiţii şi prezentare generală

În modul de descriere a unui sistem se specifică că acesta are la bază elemente între care există o serie de relaţii de dependenţă şi interacţiune. Aceste aspecte sunt descrise printr-un set de ecuaţii bazate pe variabilele interne ale sistemului. Aceste variabile sunt denumite drept ***variabile de stare*** ale sistemului. Expresia este sinonimă cu cea de ***starea sistemului***. ***Alegerea variabilelor de stare nu este unică.***

Fie **x** un vector, de dimensiune $1xn$ care în particular descrie starea sistemului şi îl vom denumi vectorul de stare:.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) & .... & x_n(t) \end{bmatrix}^T \quad \textbf{(8.3)}$$

Vectorul de stare reuneşte variabilele de stare $x_i(n), i = 1,2,...,n$ care caracterizeză dinamica sistemului.

Ecuaţia de stare (*n* ecuaţii) şi ecuaţia de ieşire (*r* ecuaţii) reprezintă ansamblul de ecuaţii diferenţiale ale sistemului conform relaţiei (8.1).

Forma matematică a modelului de stare (8.1) pentru sistemele continue în timp, strict cauzale este în acest caz:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{G}[\mathbf{x}(t), t] \end{aligned} \quad \textbf{(8.4)}$$

Într-o formă compactă modelul de stare a sistemului poate fi descris de cele două ecuații:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{u} \quad (\textit{ecuatia diferentiala de stare}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\cdot\mathbf{x} \quad (\textit{ecuatia de iesire}) \end{aligned} \tag{8.5}$$

unde:

- $\mathbf{A_{nxn}}$ este matricea coeficienților aferentă celor "n" stări ale sistemului, $\mathbf{B_{nxm}}$ este matricea de comandă cu "m" numărul intrărilor în sistem , $\mathbf{C_{rxm}}$ matricea de ieşire cu "r" numărul de ieşiri;
- **x** este vectorul de stare iar **y** este vectorul de ieşire

Dacă sistemul este cu parametri variabili în timp descrierea se poate realiza cu ajutorul unor ecuații similare cu (8.5):

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} &= \mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{x}+\mathbf{B}(t)\cdot\mathbf{u} \quad (\textit{ecuatia diferentiala de stare}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\cdot\mathbf{x} \quad (\textit{ecuatia de iesire}) \end{aligned} \tag{8.6}$$

unde matricele B(t), C(t) au componente dependente de timp iar matricea coeficienților A(t) este compusă pe baza coeficienților variabili în timp.

Observație

Dacă *funcția de transfer* a sistemului este descrisă sub forma $G(s) = P(s)/Q(s)$ iar $grP(x) = m$, $grQ(x) = n$, sistemul este [8.5]:

- ***necauzal*** dacă $n < m$;
- ***la limită cauzal*** dacă $n = m$;
- ***strict cauzal*** dacă $n > m$.

Ecuația diferențială a unui sistem poate fi transformată prin operații matematice simple sub forma:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \ldots b_0 u(t)$$

sau

$$y^{(n)}(t) + \frac{a_{n-1}}{a_n}y^{(n-1)}(t) + \ldots + \frac{a_0}{a_n}y(t) = \frac{b_m}{a_n}u^{(m)}(t) + \ldots\frac{b_0}{a_n}u(t) \tag{8.7}$$

sau

$$y^{(n)}(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n}y^{(n-1)}(t) - \ldots - \frac{a_0}{a_n}y(t) + \frac{b_m}{a_n}u^{(m)}(t) + \ldots\frac{b_0}{a_n}u(t)$$

Forma matematică a modelului de stare pentru sistemul cu ecuația dată se obține prin introducerea variabilelor de stare $x_i(t)$ definite în următorul mod:

$$
\begin{aligned}
&x_1(t) = y(t)\\
&x_2(t) = x_1^{'}(t) = y^{'}(t)\\
&...\\
&x_n(t) = x_{n-1}^{(n-1)}(t) = y^{(n-1)}(t)\\
&si\\
&x_n^{'}(t) = y^{(n)}(t)
\end{aligned}
\tag{8.8}
$$

astfel că ecuația (8.7) se poate scrie:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)\\
&\frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t)\\
&...\\
&\frac{dx_n(t)}{dt} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}x_n - \frac{a_{n-2}}{a_n}x_{n-1} - ... - \frac{a_0}{a_n}x_1 + \frac{b_m}{a_n}u^{(m)}(t) + ...\frac{b_0}{a_n}u(t)
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

Din sistemul de ecuații (8.9) se determină forma restrânsă (8.6) prin identificarea termenilor matricilor A, B, C, D.

Ecuația de stare are forma matriceală:

$$
\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \frac{dx_3(t)}{dt} \\ .. \\ \frac{dx_n}{dt}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ & & & ... & \\ & & & ... & \\ \frac{a_0}{a_n} & \frac{a_1}{a_n} & \frac{a_2}{a_n} & ... & \frac{a_{n-2}}{a_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ .. \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}
\tag{8.10}
$$

8.2.2. Modelul de stare pentru sistemul de ordinul doi

8.2.2.1. Forma generală

Considerăm ecuația dinamică a unui sistem de ordinul doi:

$$
a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u(t)
\tag{8.11}
$$

Conform cu cele prezentate anterior, variabilele de stare (8.8) pot fi descrise sub forma:

$$
x_1 = x
\tag{8.12}
$$

$$
x_2 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx}{dt}
\tag{8.13}
$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{8.14}$$

Forma generală (8.9) pentru cazul analizat poate primi forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 \end{aligned} \tag{8.15}$$

sau sub o formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{8.15a}$$

8.2.2.2. Exemplu de calcul

Fie sistemul din figura 8.5 ($m = 10\ kg; F = 100\, N$)

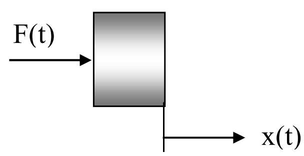


Fig. 8.5 Sistem format din masa *M* sub acțiunea unei forțe *F*

Ecuația dinamică corespunzătoare modelului matematic este:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F$$

sau

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} \cdot F \tag{8.16}$$

astfel că variabilele de stare se pot stabili sub forma (8.12 – 8.14). Ca urmare ecuația (8.16) – ecuația de stare - se determină ca fiind:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot [F] \tag{8.17}$$

Ecuația de ieşire poate avea, opțional, una din formele:

$$[y] = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \tag{8.18}$$

sau

$$[y]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{x} \tag{8.19}$$

Ecuația de stare (varianta numerică) devine:

$$\begin{bmatrix}\frac{dx_1}{dt}\\ \frac{dx_2}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{10}\end{bmatrix}\cdot[100] \tag{8.20}$$

cu matricile:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{8.21}$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix} \tag{8.22}$$

8.2.3. Modelul de stare al unui sistem de ordinul unu

Fie circuitul R - L într-o alimentare în c.c. cu tensiunea U şi pentru care ecuația care descrie variația curentului în timp poate fi scrisă sub forma:

$$U=R\cdot i+L\cdot\frac{di}{dt} \tag{8.23}$$

sau:

$$\frac{di}{dt}=-\frac{R}{L}\cdot i+\frac{1}{L}\cdot U \tag{8.24}$$

Fie:

$$x_1=i \text{ şi } \frac{dx_1}{dt}=\frac{di}{dt} \tag{8.25}$$

şi astfel ecuația de stare este:

$$\frac{dx(t)}{dt}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}(t)$$
$$\textit{unde}: \tag{8.26}$$
$$\mathbf{A}=\left[-\frac{R}{L}\right],\mathbf{x}=[i],\mathbf{B}=\left[\frac{1}{L}\right],\mathbf{u}=[U]$$

Ecuația de ieşire a modelului de stare se poate scrie sub forma:

$$y=[1]\cdot[x_1]=\mathbf{C}\cdot\mathbf{x} \tag{8.27}$$

cu matricea de ieşire de forma $C=[1]$.

8.3. Matlab / Simulink şi spaţiul stărilor

8.3.1. Generalităţi

Localizarea facilităţii de rezolvare a sistemului de ecuaţii corespunzător modelului de stare este facilitată de mediul Matlab / Simulink. Localizarea blocului aferent se găseşte apelând calea ***Matlab/Simulink/Continuou /State – Space*** (fig.8.6).

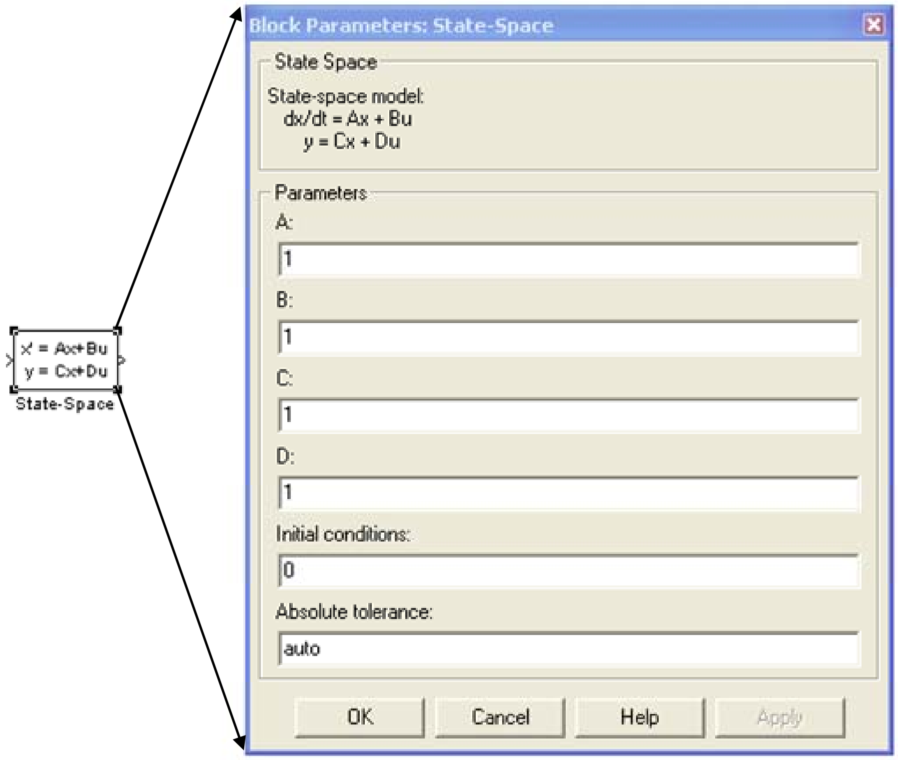


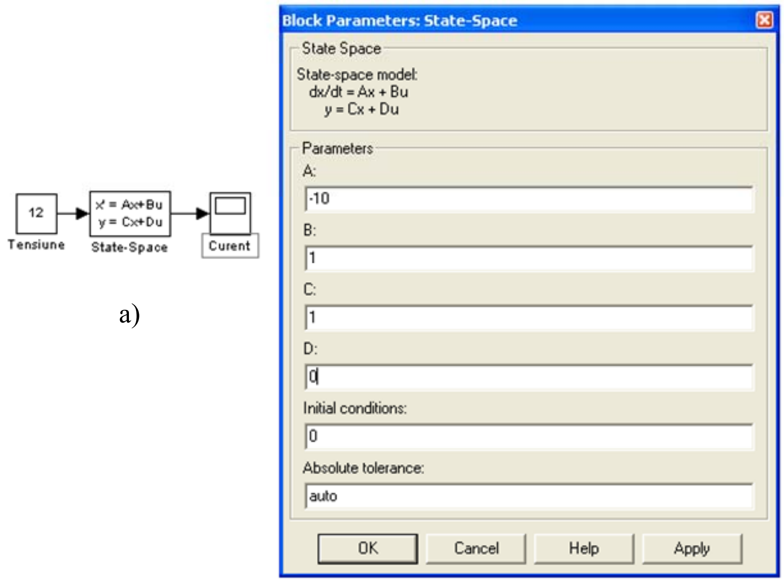
Fig. 8.6 Spaţiul stărilor în Matlab/Simulink

Pe baza celor specificate anterior, se construieşte modelul de stare (conform celor specificate anterior) şi se detrmină matricele **A, B, C.** Se construieşte apoi modelul pentru simulare în mediul Matlab / Simulink prin selectarea modulelor:

- un modul pentru intruducerea variabilelor de comandă (de exemplu: modulul ***Constant*** – permite introducerea vectorului de comandă "u" corespunzător unei forţe de acţionare $F = 100\ N$ din exemplul 8.2.2.2 sau al unei tensiuni de alimentare $U = 12\ V$ pentru exemplul 8.2.3);
- modulul ***State-Space*** pentru introducerea matricelor A,B,C,D.
- modulul ***Scope*** - pentru vizualizarea formei de variaţie a mărimii de ieşire;
- ***Se fixează parametrii de simulare pentru aprox. 3 – 4 constante de timp a circuitului (Simulation / Simulation parameters / Stop time) şi se rulează programul.***

8.3.2. Exemplu de calcul

Pentru modelul de stare al unui circuit R-L (exemplul 8.2.3) modelul construit în Matlab / Simulink este prezentat în figura 8.7.



a) b)

Fig. 8.7 Simularea în Matlab / Simulink a modelului de stare: a) – modelul Simulink; b) caseta dialog pentru introducerea matricilor A, B, C

Variația în timp a mărimii de ieşire – valoarea curentului – este prezentată în figura 8.8.

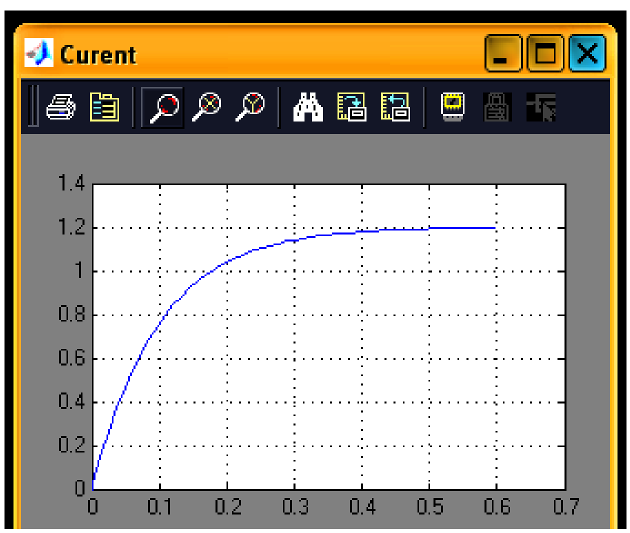


Fig. 8.8 Variația în timp a curentului

Modelul matematic al stărilor din exemplul 8.2.2.2 este prezentat în figura 8.9. În caseta de dialog se prezintă şi modul de introducere a matricelor A, B, C. S-a optat pentru varianta ecuaţiei de ieşire cu o singură variabilă de stare (ecuaţia 8.18).

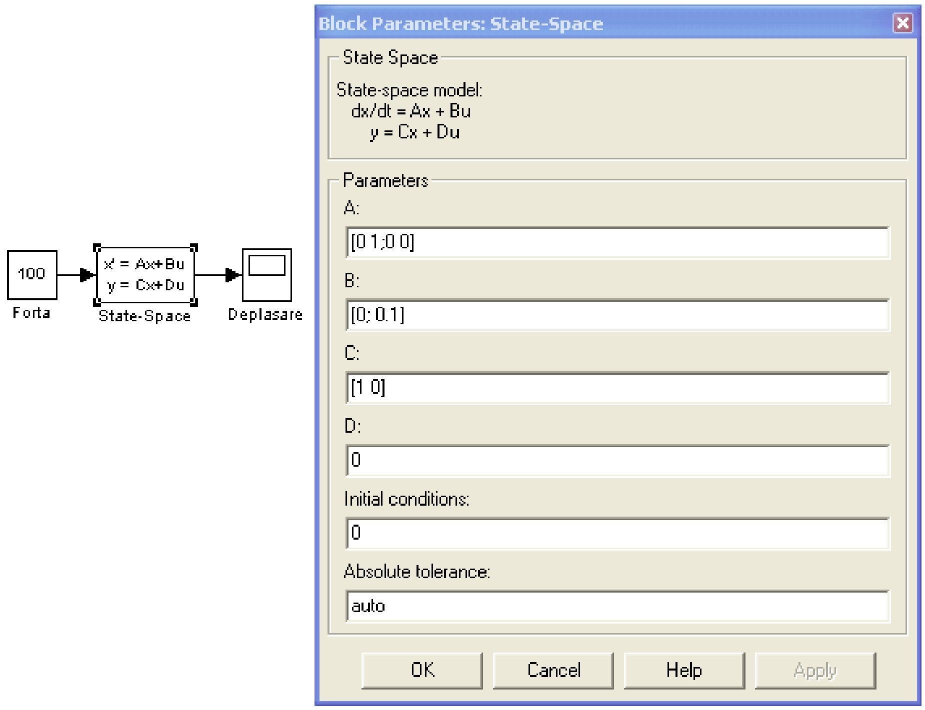


Fig. 8.9 Modelul de stare (exemplul 8.2.2.2) în mediul Matlab / Simulink

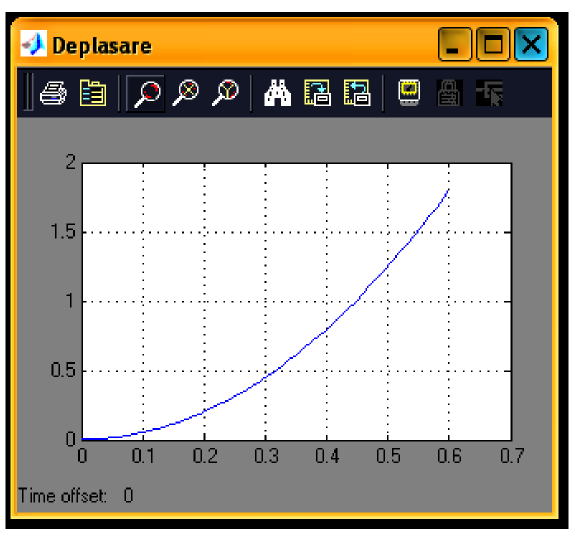


Fig. 8.10 Mărimea de ieşire (deplasarea masei *m*)

Dacă se optează pentru ecuația de ieşire (8.19), singura modificare în modelul realizat constă în introducerea matricei C corespunzătoare. În figura 8.11 se prezintă modelul realizat iar în figura 8.12 variațiile mărimilor de ieşire în timp.

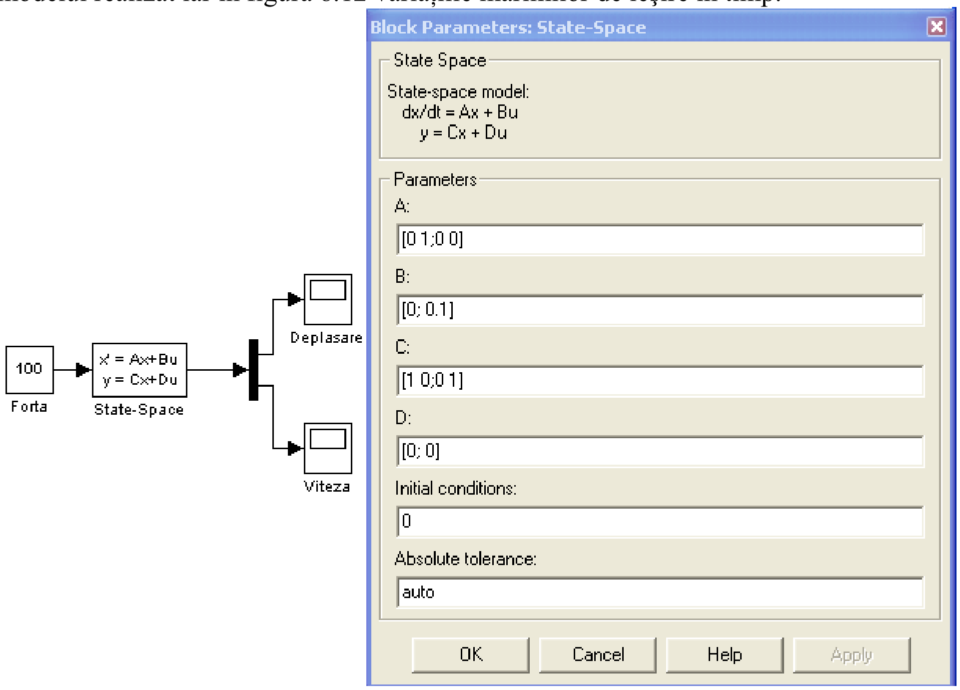
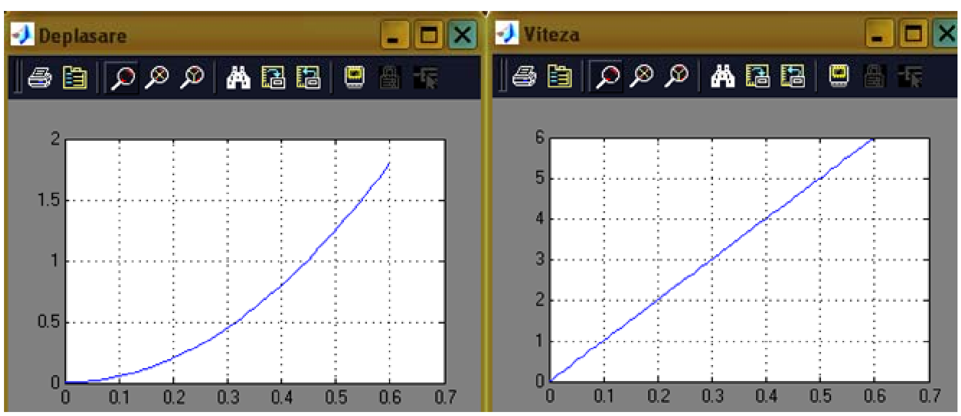


Fig. 8.11 Modelul Matlab / Simulink (exemplul 8.2.2.2, var.2)



a) b)

Fig. 8.12 Mărimile de ieşire: a) deplasare (variabila x_1); b) viteza (variabila x_2)

Din graficul vitezei (fig.8.12b) se determină uşor valoarea accelerației $10\, m/s^2$ (raportul mărime de ieşire / mărime de intrare = viteză / timp = accelerație).

8.3.3. Exemplu de calcul

Un sistem de ordinul 4 este descris prin ecuaţia diferenţială:

$$a_4 \frac{d^4 y}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = u(t) \qquad \textbf{(8.28)}$$

unde *y(t)* mărimea de ieşire a sistemului iar *u(t)* este mărimea de intrare în sistem. Se cere determinarea ecuaţiilor de stare a sistemului.

Se introduc următoarele notaţii pentru variabilele de stare:

$$x_1 = y(t) \quad x_2 = \frac{dy}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \quad x_3 = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt} \quad x_4 = \frac{d^3 y}{dt^3} = \frac{dx_3}{dt} \qquad \textbf{(8.29)}$$

Pe baza acestor notaţii şi a faptului că $\frac{d^4 y}{dt^4} = \frac{dx_4}{dt}$, ecuaţia diferenţială anterioară (8.28) şi variabilele (8.29) permit scrierea:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 - a_3 x_4 + u(t) \end{aligned} \qquad \textbf{(8.30)}$$

sau sub formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_1}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad \textbf{(8.31)}$$

Ecuaţia anterioară se poate prezenta în formă compactă :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{dt}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \qquad \textbf{(8.32)}$$

unde:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_2}{dt} & \frac{dx_3}{dt} & \frac{dx_4}{dt} \end{bmatrix}^T \qquad \textbf{(8.33)}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3\end{bmatrix};\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix};\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix};\quad \mathbf{u}=u(t) \qquad (8.34)$$

8.3.4. Exemplu de calcul

Schema principială a unui sistem electromecanic este prezentată în figura 8.13. Rotorul *1* al unui motor electric are momentul de inerție *J*. Momentul motor transmis prin arborele *2* este M_2. Pe arborele doi este montată roata dințată *3* care angrenează cu cremaliera 4 (de masă *m*).

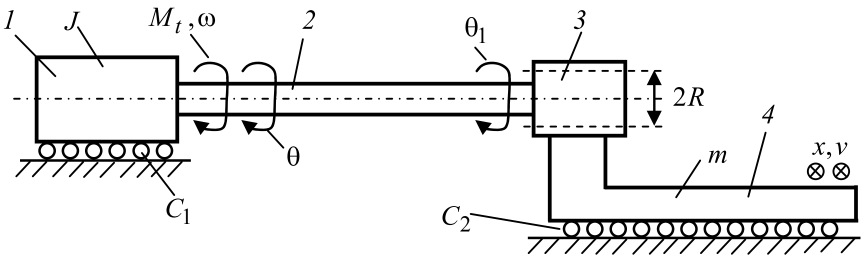


Fig. 8.13 Schema unui sistem electromecanic

Forțele / momentele care acționează asupra componentelor sistemului sunt prezentate în figura 8.14.

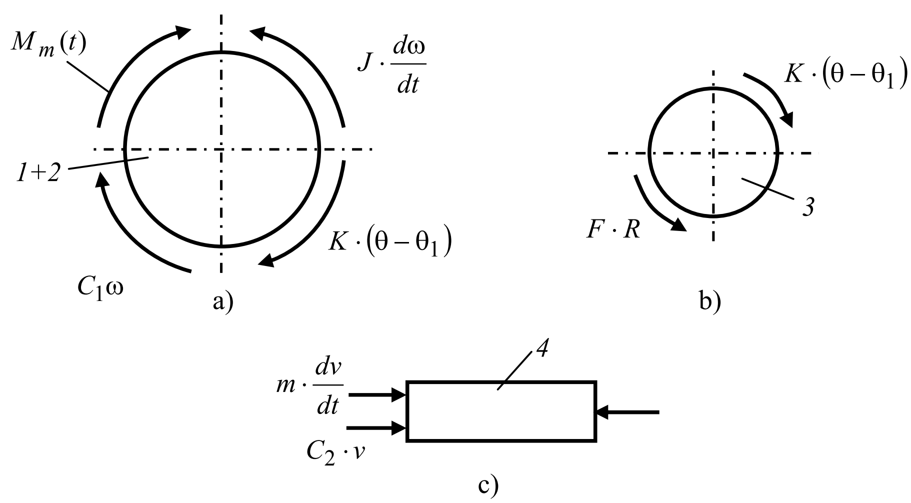


Fig. 8.14 Forțele și momentele din sistem

În corespondență cu principiile de modelare ale sistemelor mecanice și a modului de notare din figurile 8.13-8.14, se poate construi modelul matematic al sistemului.

$$\begin{aligned}
&J\frac{d\omega}{dt}+C_1\cdot\omega+K\cdot(\theta-\theta_1)=M_m(t)\\
&K\cdot(\theta-\theta_1)=R\cdot F\\
&m\cdot\frac{dv}{dt}+C_2\cdot v=F\\
&\frac{dx}{dt}=v\\
&\frac{d\theta}{dt}=\omega\\
&x=R\cdot\theta_1
\end{aligned} \tag{8.35}$$

Introducem variabilele de stare în corespondență cu parametrii geometrici din figurile 8.13-8.14: $x_1=\theta$, $x_2=x$, $x_3=\omega$, $x_4=v$

Sistemul de ecuații de stare are, după transformări ale relațiilor 8.35, forma:

$$\begin{bmatrix}\frac{d\theta}{dt}\\ \frac{dx}{dt}\\ \frac{d\omega}{dt}\\ \frac{dv}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{K}{J} & \frac{K}{J\cdot R} & -\frac{C_1}{J} & 0\\ \frac{K}{m\cdot R} & -\frac{K}{m\cdot R^2} & 0 & -\frac{C_2}{m}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\theta\\ x\\ \omega\\ v\end{bmatrix}+M_m\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{J}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ v\\ F\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{K}{R} & -\frac{K}{R^2} & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\theta\\ x\\ \omega\\ v\end{bmatrix} \tag{8.36}$$

8.4. Matlab şi modelul de stare

8.4.1. Generalități

Funcția de transfer a unui sistem poate fi scrisă sub forma:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{num}{den} \tag{8.37}$$

Reprezentarea în spațiul stărilor pe baza mediul de lucru Matlab, se poate obține pe baza comenzii *tf2ss*:

$$[\mathrm{A}\quad \mathrm{B}\quad \mathrm{C}\quad \mathrm{D}]=\mathrm{tf2ss}(\mathrm{num},\mathrm{den}) \tag{8.38}$$

Utilizând funcția Matlab `ss` se obține modelul de stare, prin utilizarea matricelor A, B, C, D, cu o sintaxă de forma:

```
sys = ss(A, B, C, D)
```
(8.39)

Dacă un sistem este deja este definit, fie acesta `sys`, şi se doreşte să se afle parametrii săi matriceali A, B, C, D atunci se utilizează sintaxa:

```
[A,B,C,D]=ssdata(sys)
```
(8.40)

Alte comenzi utile pentru lucrul în Matlab sunt prezentate în cap.12 / Anexa 8.

Pentru un sistem descris prin sistemul de ecuații de stare (8.5) se pot utiliza comenzi pentru generarea grafică a răspunsului sistemului la diverse semnale de intrare:

- Semnal de intrare de tip *treaptă unitară*:

```
[y,x,t] = step(A, B, C, D, iu)
```
(8.41)

```
[y,x,t] = step(A, B, C, D, iu,t)
```
(8.42)

- Semnal de intrare de tip *impuls*

```
[y,x,t] = impulse(A, B, C, D)
```
(8.43)

```
[y,x,t] = impulse(A, B, C, D,iu)
```
(8.44)

```
[y,x,t] = impulse(A, B, C, D,iu,t)
```
(8.45)

- Semnal de intrare *arbitrar*

```
y = lsim(A, B, C, D,u,t)
```
(8.46)

- Răspunsul pentru condiții inițiale
  Sistemul se poate defini în acest caz sub forma:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}\quad;\mathbf{x}(\mathbf{0})=\mathbf{x_0}\\&\mathbf{y}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{x}\end{aligned}\qquad (8.47)$$

Pentru a găsi răspunsul sistemului în condiții inițiale, se utilizează comanda:

```
y = initial(A, B, C, D,[initial condition],t)
```
(8.48)

8.4.2. Exemplu de calcul

Se consideră un sistem reprezentat prin funcția de transfer:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^2+3s+2}{s^3+4s^2+12s+6}\qquad (8.49)$$

Se cere să se scrie fişierele **.m* pentru conversia formei date de reprezentare în spaţiul stărilor.

În figura 8.15 se prezintă o variantă a conversiei prin utilizarea funcţiei *ss* iar în figura 8.16 rezultatul obţinut

```
% Conversia functiei de transfer polinomiale in reprezentare
% corespunzatoare spatiului de stare
% Varianta_1
num=[1 3 2];
den=[1 4 12 6];
sys_tf=tf(num,den);
sys_ss=ss(sys_tf)
```

Fig. 8.15 Fişier de conversie a funcţiei de transfer din forma polinomială

```
a =                      b =        c =                        d =
       x1   x2   x3           u1          x1    x2     x3           u1
   x1  -4   -3  -1.5     x1   2     y1  0.5  0.375  0.25      y1   0
   x2   4    0    0      x2   0
   x3   0    1    0      x3   0                 c)                d)

            a)                b)
```

Fig. 8.16 Rezultatul conversiei

```
% Conversia functiei de transfer polinomiale in reprezentare
% corespunzatoare spatiului de stare
% Varianata_2
num=[1 3 2];
den=[1 4 12 6];
sys=tf(num, den)
[A B C D]=ssdata(sys)
```

Fig. 8.17 Fişier de conversie a funcţiei de transfer din forma polinomială

```
% Conversia functiei de transfer polinomiale in reprezentare
% corespunzatoare spatiului de stare
% Varianata_3
num=[2 8 6];
den=[1 8 16 6];
[A, B, C, D]=tf2ss(num,den)
printsys(A,B,C,D)
```

Fig. 8.18 Fişier de conversie a funcţiei de transfer din forma polinomială

8.4.3. Exemplu de calcul

Se consideră sistemul descris prin matricile sistemului de stare:

$$A=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix};\ D=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix} \qquad (8.50)$$

şi condiţiile iniţiale:

$$x0=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} \qquad (8.51)$$

Se cere să se determine răspunsul sistemului prin utilizarea funcţiei *lsim.*

Fişierul utilizat, pentru determinarea răspunsului sistemului, este prezentat în figura 8.19 iar răspunsul sistemului în figura 8.20.

```
% Raspunsul in timp a sistemului pentru conditii initiale nenule
A=[0 -2;2 -3]; B=[2;0];C=[1 1];D=[0];
sys=ss(A,B,C,D);
x0=[1 1];
t=0:0.01:1;
u=0*t;
[y,t,x]=lsim(sys,u,t,x0);
plot(t,x(:,1),'.')
grid
hold
plot(t,x(:,2),'o')
xlabel('timpul [s]'),ylabel('X_1 / X_2')
```

Fig. 8.19 Fişerul utilizat pentru determinarea răspunsului sistemului cu condiţii iniţiale

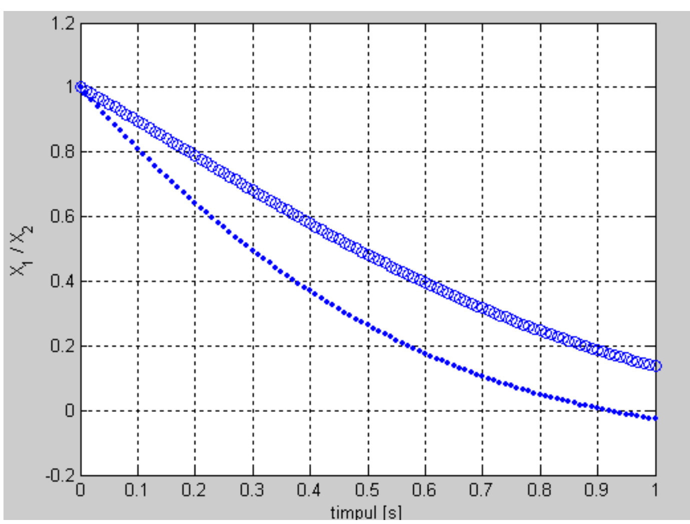


Fig. 8.20 Răspunsul sistemului determinat pe baza funcţiei *lsim*

8.4.4. Exemplu de calcul

Se consideră sistemul descris prin funcţia de transfer:

$$G(s) = \frac{2s^2 + 8s + 6}{s^3 + 8s^2 + 16s + 6} \qquad (8.52)$$

Se cere să se realizeze conversia de reprezentare a sistemului în spaţiul stărilor şi să se determine răspunsul sistemului la un semnal de tip treaptă unitară şi impuls unitar.

Fişierul utilizat pentru simularea sistemului este prezentat în figura 8.21 iar răspunsul sistemului în figura 8.22.

```
% Raspunsul sistemului la un semnal treapta unitara
%
num=[2 8 6];
den=[1 8 16 6];
[A, B, C, D]=tf2ss(num,den)
[y,x,t]=step(A,B,C,D,1)
plot(t,x)
```

Fig. 8.21 Fişierul utilizat pentru determinarea răspunsului sistemului

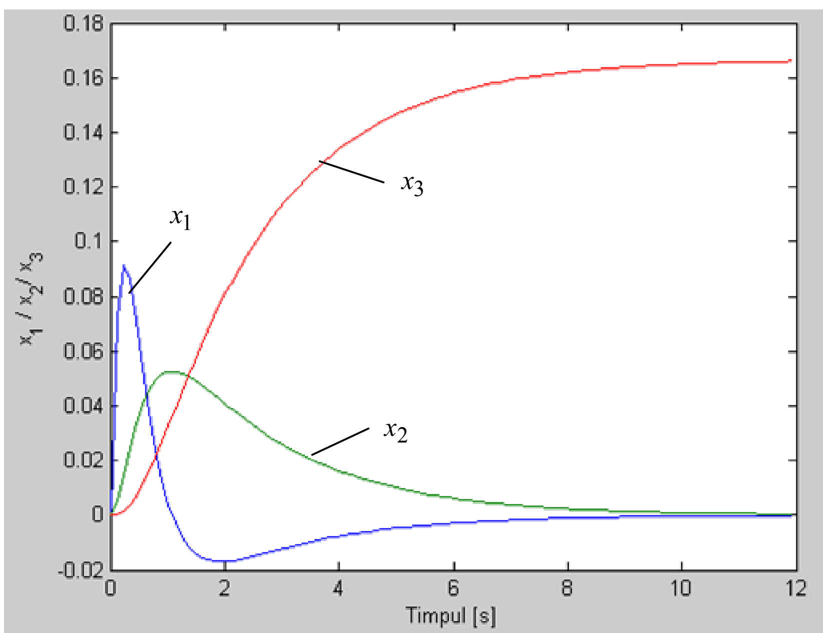


Fig. 8.22 Răspunsul sistemului la semnal de tip treaptă unitară

Fişierul utilizat pentru simularea sistemului este prezentat în figura 8.23 iar răspunsul sistemului în figura 8.24.

```
% Raspunsul sistemului la un semnal impuls unitar
%
num=[2 8 6];
den=[1 8 16 6];
[A, B, C, D]=tf2ss(num,den)
[y,x,t]=impulse(A,B,C,D,1)
plot(t,x)
xlabel('Timpul [s]');ylabel('x_1 / x_2/ x_3')
```

Fig. 8.23 Fişierul pentru determinarea răspunsului sistemului

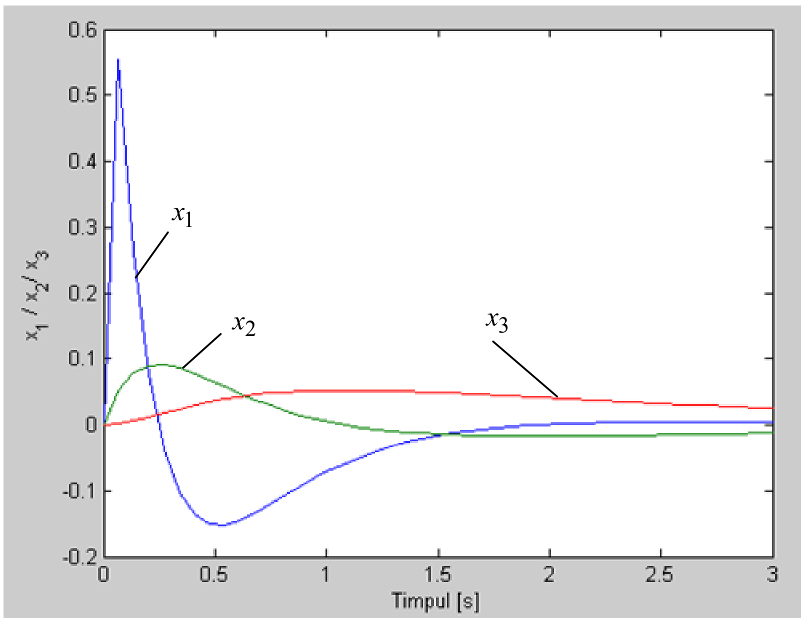


Fig. 8.24 Răspunsul sistemului la un semnal impuls unitar

8.5. Observabilitatea şi controlabilitatea stării sistemelor liniare

8.5.1. Controlabilitatea stării

Considerăm un sistem dinamic reprezentat prin modelul de stare:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{D}\cdot\mathbf{u} \end{aligned} \qquad (8.53)$$

Analiza calitativă a transferului *intrare – stare* este posibilă pe baza proprietății de *controlabilitate* a stării unui sistem dinamic liniar.

Controlabilitatea stării unui sistem este proprietatea acestuia prin care o intrare

$u(t)$ transferă starea sistemului $x(t)$, dintr-o stare inițială x_0 într-o stare finală oarecare x_f, pe un interval de timp finit. Se pot defini şi cazurile particulare:

- *sistem cu stare parțial controlabilă* – evoluția stării sub influența comenzii externe este posibilă numai pornind de la anumite stări inițiale spre anumite stări finale;
- *sistem cu stare necontrolabilă* – evoluția stării nu este posibilă indiferent de comanda aplicată sistemului.

Analiza controlabilității se bazează pe matricea de controlabilitate, construită pe baza matricei coeficienților $\mathbf{A}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ aferentă celor "n" stări ale sistemului şi matricei de comandă $\mathbf{B}_{\mathbf{n}\times\mathbf{m}}$ **:**

$$\Gamma_C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \ldots\ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \qquad \textbf{(8.54)}$$

Sistemul este:

- *cu stare controlabilă* – dacă şi numai dacă rangul matricei de controlabilitate este egal cu dimensiunea *n*: $rang\ \Gamma_C = n$. Pentru rangul unei matrice vezi cap.12, anaxa 7.
- *cu stare parțial controlabilă* dacă $rang\ \Gamma_C = r < n$;
- *cu stare necontrolabilă* dacă $rang\,\Gamma_C = 0$.

8.5.2. Observabilitatea stării

Analiza calitativă a transferului *stare – ieşire*, realizat de sistemele dinamice liniare poate fi analizată pe baza proprietății de *observabilitate* a stării.

Un sistem dinamic liniar descris prin modelul de stare (8.53) este de *stare complet observabilă* dacă pe baza cunoaşterii mărimilor de intrare $u(t)$ şi de ieşire $y(t)$ pe un interval finit de timp, se poate determina evoluția stării. Se pot defini şi cazurile particulare:

- *stare parțial observabilă* – vor exista stări care datorită decuplării transferului stare – ieşire, nu generează evoluții distincte ale ieşirii sistemului;
- *stare neobservabilă* – transferul stare – ieşire este decuplat astfel încât nu se pot distinge ieşiri ale sistemului indiferent de vectorul de comandă a sistemului.

Analiza observabilității sistemului se poate realiza pe baza calculului rangului matricei de observabilitate:

$$\Gamma_O = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \ldots\ldots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T \qquad \textbf{(8.55)}$$

Astfel, sistemul este cu:

- *stare complet observabilă* – dacă şi numai dacă rangul matricei de observabilitate este egal cu dimensiunea *n*, $rang\ \Gamma_O = n$. Pentru rangul unei matrice vezi cap.12, anaxa 7.
- *stare parțial observabilă* – dacă $rang\ \Gamma_O = r < n$;
- *stare neobservabilă* – dacă $rang\ \Gamma_O = 0$.

8.5.3. Exemplu de calcul

Se consideră modelul de stare a unui sistem:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix};\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix};\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix} \tag{8.56}$$

Se cere să se analizeze controlabilitatea şi observabilitatea sistemului.

Conform cu cele precizate anterior (§ 8.5.1), matricea de controlabilitate a sistemului este:

$$\mathbf{\Gamma_C}[\mathbf{A},\mathbf{B}]=[\mathbf{B}\quad \mathbf{AB}] \tag{8.57}$$

Se determină din (8.56):

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \tag{8.58}$$

şi astfel:

$$\mathbf{\Gamma_C}[\mathbf{A},\mathbf{B}]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} \tag{8.59}$$

Sistemul este complet controlabil dacă şi numai dacă matricea de contolabilitate are rang de linie complet (rangul matricei este egal cu numărul liniilor). Se observă că :

$$\det(\mathbf{\Gamma_C}[\mathbf{A},\mathbf{B}])\neq 0 \tag{8.60}$$

şi deci $rang\ \Gamma_C=2$. Sistemul este complet controlabil.

În acelaşi mod se poate analiza observabilitatea sistemului. Matricea de observabilitate este:

$$\mathbf{\Gamma_O}[\mathbf{A},\mathbf{C}]=\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\end{bmatrix} \tag{8.61}$$

Având în vedere că:

$$\mathbf{CA}=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 2\end{bmatrix} \tag{8.62}$$

rezultă matricea de observabilitate de forma:

$$\mathbf{\Gamma_O}[\mathbf{A},\mathbf{C}]=\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix} \tag{8.63}$$

pentru care se determină că $\det(\mathbf{\Gamma_O}[\mathbf{A},\mathbf{C}])\neq 0$ şi deci $rang\ \Gamma_O=2$. Sistemul este complet observabil (rangul matricii este egal cu numărul coloanelor).

8.5.4. Exemplu de calcul

Un sistem de amortizare inerţial este prezentat în figura 8.25 [8.8]. Mărimea de intrare în sistem este reprezentată de forţa creată de elemental elastic "1" iar mărimea de ieşire este reprezentată de deplasarea "x" a barei "2". Se consideră exemplul numeric : $L_1 = 0.5$ m; $L_2 = 1$ m; M = 5 kg; C = 5 N/(m/s); K = 4 N/m; F = 5 N. Se cere:

a) să se determine modelul de stare şi răspunsul sistemului la un semnal treaptă unitară; să se analizeze observabilitatea şi controlabilitatea sistemului.

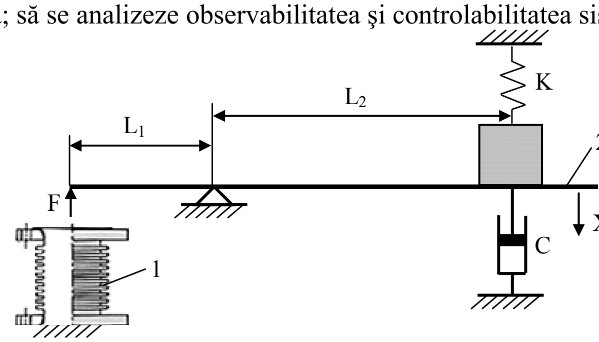


Fig. 8.25 Sistem de amortizare inerţial

a) Ecuaţia care descrie funcţionarea sistemului inerţial este:

$$M \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + C \cdot \frac{dx}{dt} + K \cdot x = -\frac{L_1}{L_2} \cdot F \qquad (8.64)$$

Modelul de stare se determină din ecuaţia (8.64) prin stabilirea variabilelor de stare:

$$x_1 = x$$
$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx}{dt} \qquad (8.65)$$

şi transformarea ecuaţiei în sistemul:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{K}{M} \cdot x_1 - \frac{C}{M} \cdot x_2 - \frac{L_1}{L_2 M} \cdot F \qquad (8.66)$$

sau sub formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{L_1}{L_2 M} \end{bmatrix} \cdot [F]$$
$$[y] = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] \cdot [F] \qquad (8.67)$$

Matricile modelului de stare au forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-K}{M} & \frac{-C}{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.8 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-L_1}{L_2 M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \qquad (8.68)$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Răspunsul sistemului este prezentat în figura 8.26.

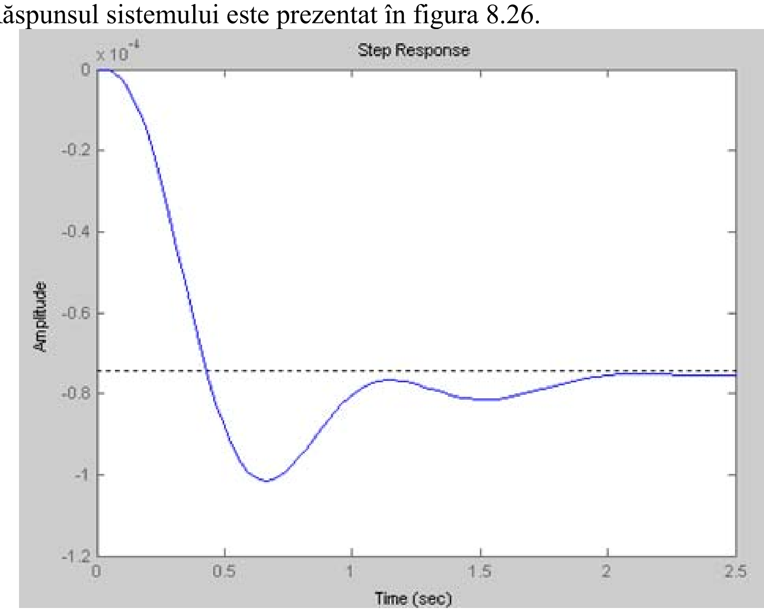


Fig. 8.26 Răspunsul sistemului la semnal treaptă unitară

b) Matricea de controlabilitate este dată de rel.8.54. Pe baza relațiilor (8.68), se calculează:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-K}{M} & \frac{-C}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-L_1}{L_2 M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-L_1}{L_2 M} \\ \frac{-L_1 C}{L_2 M^2} \end{bmatrix} \qquad (8.69)$$

astfel că matricea de controlabilitate va avea forma:

$$\mathbf{\Gamma_C}[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-L_1}{L_2 M} \\ \frac{-L_1}{L_2 M} & \frac{-L_1 C}{L_2 M^2} \end{bmatrix} \qquad (8.70)$$

Se observă că $\det\Gamma_C \neq 0$, rangul matricii este 2 şi deci sistemul este controlabil.

Matricea de observabilitate este dată de rel. 8.55. Se calculează, pe baza relațiilor 8.68:

$$\mathbf{CA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-K}{M} & \frac{-C}{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.71}$$

şi astfel matricea de observabilitate va fi:

$$\mathbf{\Gamma_O}[\mathbf{A,C}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.72}$$

Se observă că $\det\Gamma_O \neq 0$, rangul matricei este 2 şi deci sistemul este observabil.

8.6. Modelul spațiului stărilor pentru sisteme interconectate

Construcția modelului de stare pentru sisteme complexe este utilă şi pentru descrierea sistemelor complexe. Interconectările sunt în general combinații ale unor structuri de bază: conexiuni serie, conexiuni paralele şi conexiuni cu reacție.

Să considerăm două sisteme descrise prin modelele de stare:

- Sistemul 1:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{dx_1}}{\mathbf{dt}} &= \mathbf{A_1} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{B_1} \cdot \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{y_1} &= \mathbf{C_1} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{D_1} \cdot \mathbf{u_1} \end{aligned} \tag{8.73}$$

- Sistemul 2:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{dx_2}}{\mathbf{dt}} &= \mathbf{A_2} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{B_2} \cdot \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{y_2} &= \mathbf{C_2} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{D_2} \cdot \mathbf{u_2} \end{aligned} \tag{8.74}$$

Utilizând modul de notație clasic, modelul de stare al unei interconectări realizate, are forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{dx_1}}{\mathbf{dt}} \\ \frac{\mathbf{dx_2}}{\mathbf{dt}} \end{bmatrix} &= \mathbf{A_{12}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \end{bmatrix} + \mathbf{B_{12}} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C_{12}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \end{bmatrix} + \mathbf{D_{12}} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \tag{8.75}$$

Se impune determinarea formei matricelor corespunzătoare sistemului realizat.

8.6.1. Conexiunea serie

Fie cele două sisteme conectate în serie (fig.8.27).

Construcția modelului pentru interconectarea realizată are în vedere următoarele observații referitoare la notații:

$$u(t) = u_2(t)\ ;\ y_2(t) = u_1(t)\ ;\ y(t) = y_1(t) \qquad (8.76)$$

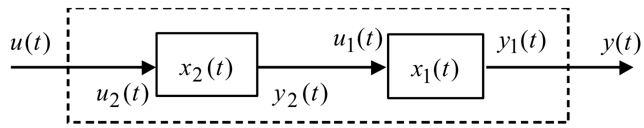


Fig. 8.27 Conexiune serie

Pe baza relațiilor de definire (8.73-8.74) şi observațiilor (8.76) se deduc formele matricelor:

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1\mathbf{C}_2 \end{bmatrix}; \ \mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \qquad (8.77)$$

8.6.2. Conexiunea paralelă

Considerăm interconectarea paralelă prezentată în figura 8.28. În corelație cu notațiile utilizate şi conexiune considerată, se impun câteva considerații particulare. Astfel:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1(t) = u_2(t) \\ y(t) &= y_1(t) + y_2(t) \end{aligned} \qquad (8.78)$$

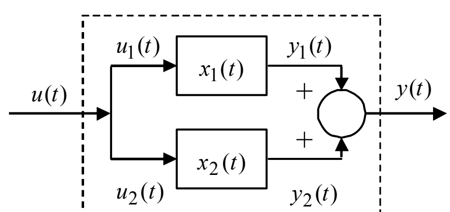


Fig. 8.28 Conexiunea paralelă

Pe baza relațiilor de definire (8.73-8.74) şi observațiilor (8.78) se deduc formele matricelor:

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}; \ \mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \qquad (8.79)$$

8.6.3. Conexiunea cu reacție

Modul de interconectare a celor două sisteme se include în principiul clasic al sistemelor cu reacție (fig.8.29). Sistemul S_1 este echivalent obiectului reglat iar sistemul S_2 este echivalent controlerului. În mod asemănător cazurilor anterioare, conexiunea impune câteva precizări suplimentare. Astfel:

$$u(t) = u_2(t) + y_1(t)$$
$$y(t) = y_1(t) \tag{8.80}$$
$$u_1(t) = y_2(t)$$

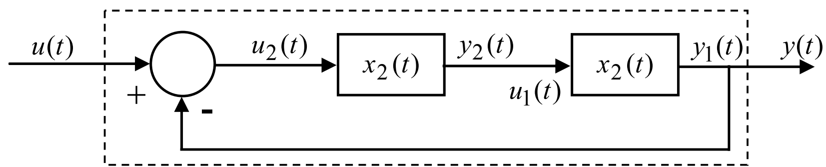


Fig. 8.29 Conexiunea cu reacție unitară negativă

Pe baza relațiilor de definire (8.73-8.74), a observațiilor (8.80) şi considerând $\mathbf{D}_1 = 0$, se deduc formele matricelor:

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ \text{-}\mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C}_{12} = [\mathbf{C}_1 \quad 0];\ \mathbf{D}_{12} = [0] \tag{8.81}$$

8.7. Modelul de stare pentru sisteme neliniare

8.7.1. Modelul de stare liniarizat

Să reconsiderăm modelul matematic al unui sistem invariant în timp:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \tag{8.82}$$

pentru care există *un punct de echilibru* $\{\mathbf{x}_0, \mathrm{u}_0, \mathbf{y}_0\}$ astfel încât există egalitățile:

$$0 = \mathbf{F}[\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0]$$
$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{G}[\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0] \tag{8.83}$$

Liniarizarea, sistemului admis pentru analiză, se realizează în jurul acestui punct de funcționare, descris prin trei vectori constanți. Dezvoltând în serie Taylor sistemul (8.82) şi reținând din dezvoltare doar termenii de ordinul 1, se obține forma liniarizată descrisă de ecuațiile:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x_0}, \mathbf{u_0}) + \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) + \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u_0})$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{x_0}, \mathbf{u_0}) + \left.\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) + \left.\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u_0}) \tag{8.84}$$

Ecuațiile (8.84) se pot scrie în formă concentrată:

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \Delta\mathbf{u}$$
$$\Delta\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \Delta\mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \Delta\mathbf{u} \tag{8.85}$$

unde:

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0,\ \Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0,\ \Delta\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0 \tag{8.86}$$

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}},\ \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}},\ \mathbf{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}},\ \mathbf{D} = \left.\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}} \tag{8.87}$$

8.7.2. Exemplu de calcul

Reconsiderăm sistemul de levitație prezentat în capitolul 3. Modelul dinamic al sistemului de levitație a fost reprezentat prin ecuațiile:

$$\frac{dx}{dt} = v \tag{8.88}$$

$$e = Ri + \frac{d[L(x)i]}{dt} \tag{8.89}$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - F_{em} \tag{8.90}$$

unde: x – reprezintă poziția bilei față de poziția de referință; v – reprezintă viteza bilei; i – reprezintă curentul în înfăşurarea electromagnetului; e – reprezintă tensiunea de alimentare a bobinei; R – reprezintă rezistența înfăşurării electromagnetului; L – reprezintă inductivitatea înfăşurării; g – reprezintă accelerația gravitațională (constantă); m – reprezintă masa bilei.

O dezvoltare a modelul matematic construit se poate realiza pe baza stării sistemului considerând variabilele de stare $x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T = [x \quad v \quad i]^T$ şi $u = e$. Considerăm relația de calcul a inductivității ca fiind:

$$L = \frac{\mu_0 S N^2}{\frac{l}{\mu_r} + x} \tag{8.91}$$

unde: N reprezintă numărul de spire al înfăşurării; S – aria secțiunii transversale prin fluxul magnetic; l – lungimea circuitului feromagnetic; x – mărimea întrefierului; μ_0 –

permiabilitatea magnetică a vidului; μ_r – permiabilitatea magnetică a materialului feromagnetic.

Pe baza relațiilor (8.88) – (8.90) şi ale variabilelor de stare considerate, se obține modelul de stare ($k = \mu_0 S N^2$):

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \tag{8.92}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = g - \frac{k}{2m}\left(\frac{x_3}{\frac{l}{\mu_r} + x_1}\right)^2 \tag{8.93}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{e}{k}\left(\frac{l}{\mu_r} + x_1\right) + \left(\frac{x_2}{\frac{l}{\mu_r} + x_1} - R\cdot\frac{\frac{l}{\mu_r} + x_1}{k}\right)x_3 \tag{8.94}$$

Modelul neliniar obținut se poate liniariza pe principiul clasic de liniarizare a sistemelor.

Pe baza relațiilor (8.92) - (8.94) se obțin parametrii punctului de echilibru:

$$x_{10} = -\frac{l}{\mu_r} + \frac{e}{R}\cdot\sqrt{\frac{k}{2mg}}\ ;\ x_{20} = 0\ ;\ x_{30} = \frac{e}{R} \tag{8.95}$$

Liniarizând modelul (8.92) – (8.94) în concordanță cu cele prezentate anterior, se obține modelul liniarizat al sistemului de levitație analizat [8.9]:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \Delta x_2 \\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{2Rg}{e}\cdot\sqrt{\frac{2mg}{k}}\cdot\Delta x_1 - \frac{2gR}{e}\cdot\Delta x_3 \\
\frac{dx_3}{dt} &= \sqrt{\frac{2mg}{k}}\cdot\Delta x_2 - \frac{e}{\sqrt{2mgk}}\cdot\Delta x_3 + \frac{e}{R\sqrt{2mgk}}\cdot\Delta e
\end{aligned} \tag{8.96}$$

Forma liniarizată a modelului de stare este similară celei descrisă de rel. 8.85 în care matricea coeficienților, matricea de comandă şi matricea de ieşire au formele de definire:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{e}{R\sqrt{2mgk}} \end{bmatrix}^T \tag{8.97}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.98}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2Rg}{e}\cdot\sqrt{\frac{2mg}{k}} & 0 & -\frac{2gR}{e} \\ 0 & \sqrt{\frac{2mg}{k}} & -\frac{e}{\sqrt{2mgk}} \end{bmatrix} \qquad (8.99)$$

8.8. Utilizarea funcțiilor Matlab pentru analiza controlabilității şi observabilității sistemelor

Matlab dispune de funcții adecvate pentru calculul matricei de controlabilitate – `ctrb` şi a celei de observabilitate `obsv`. Pentru calcul rangului matricei, în vederea stabilirii calității sistemului, se apelează la funcția `rank`. În figura 8.30 este prezentat fişierul *.m pentru calculul matricelor şi rangului acestora iar rezultatele în figura 8.31 şi figura 8.32.

```
% Exemplu de calcul al matricei de controlabilitate si observabilitate

% Definirea matricelor modelului de stare
A=[0 -1 -1 -3;-5 2 3 4;2 -2 4 1;-3 1 -2 -2];
B=[2 -1;-4 4; 2 5;1 -1];
C=[1 2 -2 3;1 1 0 -1];

% Calculul matricei de controlabilitate
Q=ctrb(A,B)

% Calculul rangului matricei de controlabilitate
r = rank(Q)

% Calculul matricei de observabilitate
W=obsv(A,C)

% Calculul rangului matricei de controlabilitate
r = rank(W)
```

Fig. 8.30 Fişierul de calcul al matricelor de controlabilitate şi observabilitate

```
Q =

     2    -1    -1    -6    35   -30   -25  -154
    -4     4    -8    24   -12   101   -13   381
     2     5    21     9    82   -25   407  -336
     1    -1   -16    -1   -15    26  -251   189
```
a)

```
r =

     4
```
b)

Fig. 8.31 Matricea de controlabilitate şi rangul acesteia

Matricea de controlabilitate are numărul de linii n egal cu rangul matricei, $n = r = 4$ şi deci sistemul este controlabil.

```
W =

     1     2    -2     3
     1     1     0    -1
   -23    10    -9    -3
    -2     0     4     3
   -59    58    23   106
    -1    -3    12     4
  -562   235   113   220
    27   -25    32    -5
```

a)

```
r =

     4
```

b)

Fig. 8.32 Matricea de observabilitate şi rangul acesteia

Matricea de observabilitate are numărul de coloane m egal cu rangul matricei, $m = r = 4$ şi deci sistemul este observabil.

8.9. Bibliografie capitolul 8

[8.1]Bishop, H. Robert, The Mechatronics Handbook, CRC Press, London-New York-Washington, 2002

[8.2]Dorf, R.C., Bishop, R.H., Modern Control Systems, Pearson Studium, ISBN 3-8273-7162-7, 2006

[8.3]Dolga, V., Dolga, L., Modelling and simulation of a magnetic levitation systems, Annals of the Oradea University, fascicle of Management and Technological Engineering, vol.v(xv) 2007, ISSN 1583-0691, p.1108-1117

[8.4]Dolga, V., Dolga, L., The analysis of a magnetic levitation system, 18th Intern. Symp. DAAAM 2007, p.247, Zadar (Croaţia)

[8.5]Dragomir, T.L., Teoria sistemelor, Lito. UPT, Timişoara, 1980

[8.6]Dukkipati, R.V., Matlab. An introduction with applications, New Age Intern., 2010, ISBN 978-81-224-2920-6

[8.7]Salgado, M.E., Yuz, J.I., State Space Analysis and System Properties, in „Mechatronics an introduction", editor Bishop, R.H., CRC Press, 2005, ISBN 978-084-936-358-0

[8.8]Singh, K., Agnihotri, G., System Design through Matlab, Control Toolbox and Simulink, ISBN: 1852333375 / 1-85233-337-5

[8.9]Teodorescu,A., Dolga, V., About the observability and controllability of a levitation systems, 18th Intern. Symp. DAAAM 2007, Zadar (Croaţia)

[8.10]Ţiţeica, Ş., Termodinamica, Ed. Academiei, 1982

[8.11]***, Simulink. Simulation and Model-Based Design, V.6, MathWorks, 2006